Física Tipler 6ª Ed. Vol. 1. TEMAS:1-8

Thegoodking

Fundamentos de Física I

1º Grado en Física

Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Educación a Distancia

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Física

para la ciencia y la tecnología

Tipler | Mosca

6ª edición

Volumen 1

Mecánica/Oscilaciones y ondas/
Termodinámica

SEXTA EDICIÓN

FÍSICA PARA LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA

VOLUMEN 1

Mecánica/Oscilaciones y ondas/Termodinámica

Paul A. Tipler
Gene Mosca

EDITORIAL REVERTÉ

Barcelona • Bogotá • Buenos Aires • Caracas • México

Registro bibliográfico (ISBD)

Tipler, Paul A.

[Physics for scientists and engineers. Español]

Física para la ciencia y la tecnología. Mecánica, oscilaciones y ondas, termodinámica / Paul A. Tipler, Gene Mosca ; coordinador y traductor: José Casas Vázquez; traductores: Albert Bramon Planas… [et al.]. – Barcelona : Reverté, 2010.

XXIV , 456, [12] p. : il. col. ; 27 cm.

Índice.

DL B-25919-2010. – ISBN 978-84-291-4429-1

1. Física. I. Mosca. Gene, coaut. II. Casas-Vázquez, José, coord., trad. III. Bramon Planas, Albert, trad. IV. Título.

53

Título de la obra original:

Physics for Scientists and Engineers, Sixth Edition.

Edición original en lengua inglesa publicada por

W. H. FREEMAN AND COMPANY, New York and Basingstoke
41 Madison Avenue, New York (NY) – U.S.A.

Copyright © 2008 by W. H. Freeman and Company. All Rights Reserved

Edición en español:

© Editorial Reverté, S. A., 2010

ISBN: 978-84-291-4429-1 Volumen 1
ISBN: 978-84-291-4428-4 Obra completa

Versión española:

COORDINADOR Y TRADUCTOR

Dr. José Casas-Vázquez
Catedrático de Física de la Materia Condensada

TRADUCTORES

Dr. Albert Bramon Planas
Catedrático de Física Teórica

Dr. Josep Enric Llebot Rabagliati
Catedrático de Física de la Materia Condensada

Dr. Fernando M. López Aguilar
Catedrático de Física Aplicada

Dr. Vicenç Méndez López
Profesor Agregado de Física de la Materia Condensada

Departamento de Física
Universidad Autónoma de Barcelona
España

MAQUETACIÓN: REVERTÉ-AGUILAR
CORRECCIÓN DE ESTILO: CARLOS CISTUÉ SOLÁ

Propiedad de:

EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15. Local B
Tel: (34) 93 419 33 36
Fax: (34) 93 419 51 89
08029 Barcelona. ESPAÑA
reverte@reverte.com

www.reverte.com

Reservados todos los derechos. La reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos, queda rigurosamente prohibida sin la autorización escrita de los titulares del copyright, bajo las sanciones establecidas por las leyes.

Impreso en España - *Printed in Spain*

Depósito Legal: B-25919-2010
Impresión y encuadernación: Liberdúplex, S.L.U.

Índice abreviado de la obra completa

VOLUMEN 1

Volumen 1A

Thinkstock/Alamy

PARTE I MECÁNICA

1 Medida y vectores / 1
2 El movimiento en una dimensión / 27
3 Movimiento en dos y tres dimensiones / 63
4 Leyes de Newton / 93
5 Aplicaciones adicionales de las leyes de Newton / 127
6 Trabajo y energía cinética / 173
7 Conservación de la energía / 201
8 Conservación del momento lineal / 247
9 Rotación / 289
10 Momento angular / 331
11 Gravedad / 363
12 Equilibrio estático y elasticidad / 397
13 Fluidos / 423

Volumen 1B

PARTE II OSCILACIONES Y ONDAS

14 Oscilaciones / 457
15 Movimiento ondulatorio / 495
16 Superposición y ondas estacionarias / 533

Volumen 1C

PARTE III TERMODINÁMICA

17 Temperatura y teoría cinética de los gases / 563
18 Calor y primer principio de la termodinámica / 591
19 Segundo principio de la termodinámica / 629
20 Propiedades y procesos térmicos / 665
R Relatividad especial / R.1

VOLUMEN 2

Volumen 2A

PARTE IV ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

21 Campo eléctrico I: distribuciones discretas de carga / 693
22 Campo eléctrico II: distribuciones continuas de carga / 727
23 Potencial eléctrico / 763
24 Capacidad / 801
25 Corriente eléctrica y circuitos de corriente continua / 839
26 El campo magnético / 887
27 Fuentes del campo magnético / 917
28 Inducción magnética / 959
29 Circuitos de corriente alterna / 995
30 Ecuaciones de Maxwell y ondas electromagnéticas / 1029

Volumen 2B

PARTE V LUZ

31 Propiedades de la luz / 1055
32 Imágenes ópticas / 1097
33 Interferencia y difracción / 1141

FÍSICA MODERNA

PARTE VI MECÁNICA CUÁNTICA, RELATIVIDAD Y ESTRUCTURA DE LA MATERIA

34 Dualidad onda-partícula y física cuántica / 1173
35 Aplicaciones de la ecuación de Schrödinger / 1203
36 Átomos / 1227
37 Moléculas / 1261
38 Sólidos / 1281
39 Relatividad / 1319
40 Física nuclear / 1357
41 Las partículas elementales y el origen del universo / 1389

APÉNDICES Y RESPUESTAS

Apéndice A Unidades SI y factores de conversión / AP.1
Apéndice B Datos numéricos / AP.3
Apéndice C Tabla periódica de los elementos / AP.6
Apéndice de matemáticas / M.1
Respuestas de los problemas impares del final de los capítulos / A.1

Prefacio

La sexta edición de *Física para la ciencia y la tecnología* presenta un texto y herramientas *online* completamente integrados que ayudarán a los estudiantes a aprender de un modo más eficaz y que permitirá a los profesores adaptar sus clases para enseñar de un modo más eficiente.

El texto incluye un nuevo enfoque estratégico de resolución de problemas, un apéndice de matemáticas integrado y nuevas herramientas para mejorar la comprensión conceptual. Los nuevos temas de actualidad en física destacan temas innovadores que ayudan a los estudiantes a relacionar lo que aprenden con las tecnologías del mundo real.

CARACTERÍSTICAS CLAVE

¡NUEVO!

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En la sexta edición destaca una nueva estrategia de resolución de problemas en la que los Ejemplos siguen un formato sistemático de **Planteamiento**, **Solución** y **Comprobación**. Este formato conduce a los estudiantes a través de los pasos implicados en el análisis del problema, la resolución del problema y la comprobación de sus respuestas. Los Ejemplos a menudo incluyen útiles secciones de **Observación** que presentan formas alternativas de resolución de problemas, hechos interesantes, o información adicional relativa a los conceptos presentados. Siempre que se considera necesario, los Ejemplos van seguidos de **Problemas Prácticos** para que los estudiantes puedan evaluar su dominio de los conceptos.

En esta edición, las etapas de resolución de problemas siguen contando con las ecuaciones necesarias al lado, de manera que a los estudiantes les resulte más fácil seguir el razonamiento.

Después de cada enunciado del problema, los estudiantes van al **Planteamiento** del problema. Aquí, el problema se analiza tanto conceptualmente como visualmente.

En la sección **Solución**, cada paso de la solución se presenta con un enunciado escrito en la columna de la izquierda y las ecuaciones matemáticas correspondientes en la columna de la derecha.

La **Comprobación** recuerda a los estudiantes que han de verificar que sus resultados son precisos y razonables.

La **Observación** sugiere una forma distinta de enfocar un ejemplo o da información adicional relevante para el ejemplo.

A la solución le sigue normalmente un **Problema Práctico**, lo que permite a los estudiantes comprobar su comprensión. Al final del capítulo se incluyen las respuestas para facilitar una comprobación inmediata.

Ejemplo 3.4 **Tomando una curva**

Un coche se mueve hacia el este a 60 km/h. Toma una curva y 5 s más tarde viaja hacia el norte a 60 km/h. Determinar la aceleración media del coche.

PLANTEAMIENTO Calculamos la aceleración media a partir de su definición, $\vec{a}_m = \Delta\vec{v}/\Delta t$. Primero calculamos $\Delta\vec{v}$ que es el vector que sumado a $\vec{v}_i$ nos da $\vec{v}_f$.

SOLUCIÓN

1. La aceleración media es el cociente entre la variación de velocidad y el intervalo de tiempo: $\vec{a}_m = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$
2. Para hallar $\Delta\vec{v}$, debemos especificar primero $\vec{v}_i$ y $\vec{v}_f$. Dibujemos $\vec{v}_i$ y $\vec{v}_f$ (figura 3.7*a*), y tracemos el diagrama de suma vectorial (figura 3.7*b*) correspondiente a $\vec{v}_f = \vec{v}_i + \Delta\vec{v}$:
3. El cambio de velocidad viene determinado por las velocidades inicial y final: $\vec{v}_f = \vec{v}_i + \Delta\vec{v}$
4. Sustituya los resultados anteriores para determinar la aceleración media: $\vec{a}_m = \dfrac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{\Delta t} = \dfrac{60\ \text{km/h}\,\hat{j} - 60\ \text{km/h}\,\hat{i}}{5{,}0\ \text{s}}$
5. Convierta 60 km/h a metros por segundo: $60\ \text{km/h} \times \dfrac{1\ \text{h}}{3600\ \text{s}} \times \dfrac{1000\ \text{m}}{1\ \text{km}} = 16{,}7\ \text{m/s}$
6. Exprese la aceleración en metros por segundo al cuadrado: $\vec{a}_m = \dfrac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{\Delta t} = \dfrac{16{,}7\ \text{m/s}\,\hat{j} - 16{,}7\ \text{m/s}\,\hat{i}}{5{,}0\ \text{s}} = \boxed{-3{,}4\ \text{m/s}^2\,\hat{i} + 3{,}4\ \text{m/s}^2\,\hat{j}}$

COMPROBACIÓN La componente de la velocidad en dirección este disminuye de 60 km/h a cero, de tal forma que cabría esperar que la componente x de la aceleración fuese negativa. Así mismo, la componente de la velocidad en dirección norte aumenta de cero a 60 km/h, de forma que cabría esperar que la componente y de la aceleración fuese positiva. El resultado del apartado 6 concuerda con estas expectativas.

OBSERVACIÓN Obsérvese que el coche sigue acelerando aunque el módulo de su velocidad se mantenga constante.

PROBLEMA PRÁCTICO 3.1 Determinar el módulo y la dirección del vector aceleración media.

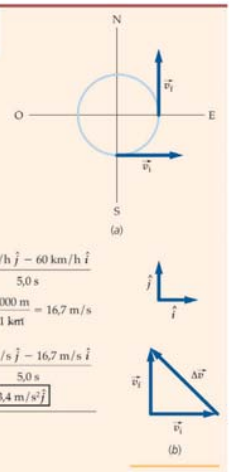


FIGURA 3.7

En casi todos los capítulos se incluye un recuadro llamado **Estrategia de resolución de problemas** para reforzar el formato **Planteamiento**, **Solución** y **Comprobación** para solucionar satisfactoriamente los problemas.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Velocidad relativa

PLANTEAMIENTO El primer paso para la resolución de problemas de velocidad relativa es identificar y marcar los sistemas de referencia relevantes. Aquí les llamaremos sistema de referencia A y B.

SOLUCIÓN

1. Utilizando $\vec{v}_{pB} = \vec{v}_{pA} + \vec{v}_{AB}$ (ecuación 3.9), relacione la velocidad del objeto móvil (partícula p) relativa al sistema A con la velocidad de la partícula relativa al sistema B.
2. Trace un diagrama de suma vectorial para la ecuación $\vec{v}_{pB} = \vec{v}_{pA} + \vec{v}_{AB}$. Incluya ejes de coordenadas en el dibujo.
3. Calcule la incógnita en cuestión. Utilice la trigonometría cuando sea necesario.

COMPROBACIÓN Asegúrese de que obtiene la velocidad o posición del cuerpo respecto del sistema de referencia correcto.

APÉNDICE DE MATEMÁTICAS INTEGRADO

Esta edición ha mejorado el apoyo matemático a los estudiantes que estudian Matemáticas al mismo tiempo que introducción a la Física o a los estudiantes que requieren repasar las Matemáticas.

El **Apéndice de Matemáticas completo**

- revisa resultados básicos de álgebra, geometría, trigonometría y cálculo,
- relaciona conceptos matemáticos con conceptos físicos del libro,
- proporciona Ejemplos y Problemas Prácticos para que los estudiantes puedan comprobar su comprensión de los conceptos matemáticos.

Ejemplo M.13 **Desintegración radiactiva del cobalto-60**

El período de semidesintegración del cobalto-60 (^{60}Co) es 5,27 años. A $t = 0$ se tiene una muestra de ^{60}Co de masa 1,20 mg. ¿Cuánto tiempo t (en años) habrá de transcurrir para que 0,400 mg de la muestra de ^{60}Co se hayan desintegrado?

PLANTEAMIENTO En la deducción del período de semidesintegración pusimos $N/N_0 = 1/2$. En este ejemplo, hemos de hallar el tiempo de permanencia de dos tercios de la muestra, es decir, cuando la fracción N/N_0 sea de 0,667.

SOLUCIÓN

1. Expresar la fracción N/N_0 como una función exponencial: $\frac{N}{N_0} = 0{,}667 = e^{-\lambda t}$
2. Obtener los valores recíprocos de ambos miembros: $\frac{N_0}{N} = 1{,}50 = e^{\lambda t}$
3. Despejar t: $t = \frac{\ln 1{,}50}{\lambda} = \frac{0{,}405}{\lambda}$
4. La constante de desintegración está relacionada con el período de semidesintegración por medio de $\lambda = (\ln 2)/t_{1/2}$ (ecuación M.70). Sustituir $(\ln 2)/t_{1/2}$ por λ y calcular el tiempo: $t = \frac{\ln 1{,}5}{\ln 2} t_{1/2} = \frac{\ln 1{,}5}{\ln 2} \times 5{,}27 \text{ años} = 3{,}08 \text{ años}$

COMPROBACIÓN Para que la masa de una muestra de ^{60}Co decreciese hasta el 50% de su masa inicial habrían de transcurrir 5,27 años. Por lo tanto, es de esperar que la muestra tardase menos de 5,27 años para perder el 33,3% de su masa. Por tanto, el resultado obtenido (3,08 años), concuerda con lo esperado.

PROBLEMAS PRÁCTICOS

27. La constante de tiempo de descarga de un condensador en ur que tarda el condensador en descargarse hasta e^{-1} (o sea 0,368) $\tau = 1$ s para un condensador, ¿cuánto tiempo t (en segundos) descargarse hasta el 50% de su carga inicial?
28. Si la población de coyotes en un determinado lugar está creci por década y continúa creciendo al mismo ritmo indefinidamen canzará una población 1,5 veces la actual?

M.12 CÁLCULO INTEGRAL

El **cálculo integral** se puede considerar el inverso del cálculo diferencial. Si una función $f(t)$ se integra, se obtiene una función $F(t)$, de forma que $f(t)$ es la derivada de $F(t)$ con respecto a t.

LA INTEGRAL COMO UN ÁREA BAJO UNA CURVA. ANÁLISIS DIMENSIONAL

La integración está relacionada con el problema de hallar el área bajo una curva. La figura M.27 muestra una función $f(t)$. El área del elemento sombreado es aproximadamente $f_i\,\Delta t_i$, en donde f_i se calcula en un punto cualquiera del intervalo Δt_i. Esta aproximación mejora si Δt_i es muy pequeño. Se halla el área total desde t_1 hasta t_2 sumando todos los elementos de área desde t_1 a t_2 y tomando el límite cuando Δt_i tiende a cero. Este límite se denomina la **integral** de f extendida al intervalo t_1, t_2 y se escribe

$$\int f\,dt = \text{área}_i = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_i f_i \Delta t_i \qquad \text{M.74}$$

Las dimensiones físicas de una integral de una función $f(t)$ se hallan multiplicando las dimensiones del integrando (la función que se ha de integrar) por las dimensiones de la variable de in-

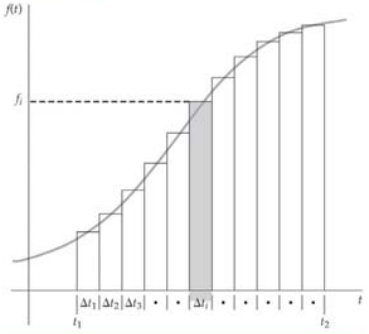
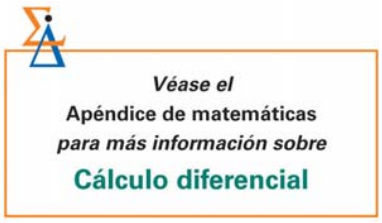


FIGURA M.27 Función general $f(t)$. El área del elemento sombreado es aproximadamente $f_i\,\Delta t_i$, en donde f_i se calcula para un punto cualquiera del intervalo.

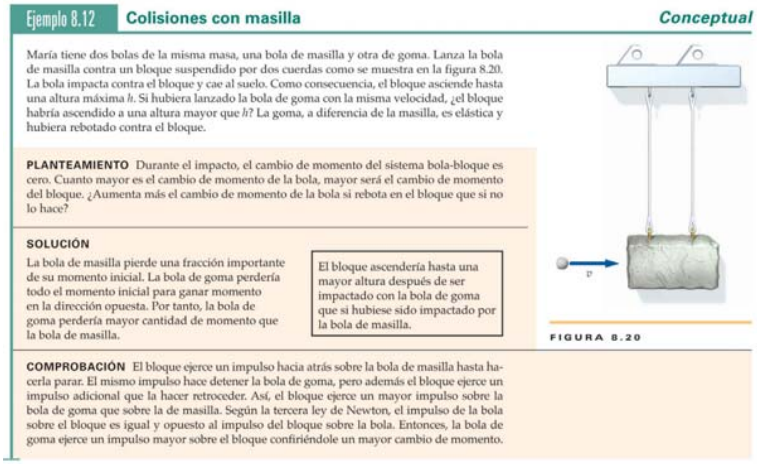
Además, las notas al margen permiten a los estudiantes ver fácilmente la relación entre los conceptos físicos del texto y los conceptos matemáticos.



¡NUEVO! PEDAGOGÍA PARA ASEGURAR LA COMPRENSIÓN CONCEPTUAL

Se han añadido herramientas prácticas para los estudiantes para facilitar un mejor comprensión conceptual de la física.

- Se han introducido nuevos **Ejemplos conceptuales**, para ayudar a los estudiantes a comprender en profundidad conceptos físicos esenciales. Estos ejemplos utilizan la estrategia **Planteamiento**, **Solución** y **Comprobación**, de modo que los estudiantes no sólo obtienen una comprensión conceptual básica sino que tienen que evaluar sus respuestas.



Ejemplo 8.12 **Colisiones con masilla** *Conceptual*

María tiene dos bolas de la misma masa, una bola de masilla y otra de goma. Lanza la bola de masilla contra un bloque suspendido por dos cuerdas como se muestra en la figura 8.20. La bola impacta contra el bloque y cae al suelo. Como consecuencia, el bloque asciende hasta una altura máxima h. Si hubiera lanzado la bola de goma con la misma velocidad, ¿el bloque habría ascendido a una altura mayor que h? La goma, a diferencia de la masilla, es elástica y hubiera rebotado contra el bloque.

PLANTEAMIENTO Durante el impacto, el cambio de momento del sistema bola-bloque es cero. Cuanto mayor es el cambio de momento de la bola, mayor será el cambio de momento del bloque. ¿Aumenta más el cambio de momento de la bola si rebota en el bloque que si no lo hace?

SOLUCIÓN

La bola de masilla pierde una fracción importante de su momento inicial. La bola de goma perdería todo el momento inicial para ganar momento en la dirección opuesta. Por tanto, la bola de goma perdería mayor cantidad de momento que la bola de masilla.

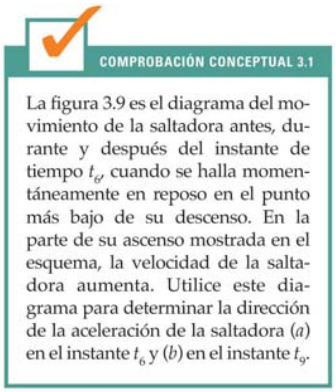
El bloque ascendería hasta una mayor altura después de ser impactado con la bola de goma que si hubiese sido impactado por la bola de masilla.

COMPROBACIÓN El bloque ejerce un impulso hacia atrás sobre la bola de masilla hasta hacerla parar. El mismo impulso hace detener la bola de goma, pero además el bloque ejerce un impulso adicional que la hacer retroceder. Así, el bloque ejerce un mayor impulso sobre la bola de goma que sobre la de masilla. Según la tercera ley de Newton, el impulso de la bola sobre el bloque es igual y opuesto al impulso del bloque sobre la bola. Entonces, la bola de goma ejerce un impulso mayor sobre el bloque confiriéndole un mayor cambio de momento.

FIGURA 8.20

- Las nuevas **Comprobaciones de conceptos** facilitan a los estudiantes comprobar su comprensión conceptual de conceptos físicos mientras leen los capítulos. Las respuestas están situadas al final de cada capítulo para permitir una comprobación inmediata. Las comprobaciones de conceptos se colocan cerca de temas relevantes, de modo que los estudiantes puedan releer inmediatamente cualquier material que no comprendan del todo.

- Los nuevos **avisos de errores frecuentes**, identificados mediante signos de exclamación, ayudan a los estudiantes a evitar errores habituales. Estos avisos están situados cerca de los temas que habitualmente causan confusión, de manera que los estudiantes puedan resolver de inmediato cualquier dificultad.



COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 3.1

La figura 3.9 es el diagrama del movimiento de la saltadora antes, durante y después del instante de tiempo t_6, cuando se halla momentáneamente en reposo en el punto más bajo de su descenso. En la parte de su ascenso mostrada en el esquema, la velocidad de la saltadora aumenta. Utilice este diagrama para determinar la dirección de la aceleración de la saltadora (a) en el instante t_6 y (b) en el instante t_9.

donde U_0 la constante arbitraria de integración, es el valor de la energía potencial para $y = 0$. Como sólo definimos la variación de energía potencial, el valor real de U no es importante. Por ejemplo, si a la energía potencial gravitatoria del sistema Tierra-esquiador se le asigna un valor igual a cero cuando el esquiador está en el fondo de la pista, su valor a la altura h sobre este nivel es mgh. También podemos asignar el valor cero de energía potencial al momento en que el esquiador está en un punto P a medio camino de la pendiente, en cuyo caso su valor en cualquier otro punto sería mgy, donde y es la distancia del esquiador respecto al punto P.

Tenemos libertad para dar a U el valor cero en cualquier punto de referencia.

TEMAS DE ACTUALIDAD EN FÍSICA

Los **temas de actualidad en Física**, que aparecen al final de ciertos capítulos, tratan de aplicaciones actuales de la Física y relacionan estas aplicaciones con conceptos descritos en los capítulos. Estos temas van desde un parque eólico hasta termómetros moleculares y motores de detonación pulsar.

Temas de actualidad en Física

Soplando aire cálidos

Los parques eólicos están desperdigados por la costa danesa, las planicies del alto medio-oeste de EE.UU. y las montañas desde California hasta Vermont. El aprovechamiento de la energía cinética del viento no es nada nuevo. Durante siglos, los molinos de viento se han utilizado para bombear agua, ventilar minas[1] y moler el grano.

En la actualidad, las turbinas de viento hacen funcionar generadores eléctricos. Esas turbinas transforman energía cinética en energía electromagnética. Las turbinas modernas tienen precios, tamaños y rendimientos muy variados. Algunas de ellas son pequeñas y sencillas máquinas que cuestan unos 500 dólares y producen unos 100 watts de potencia.[2] Otras son gigantes y complejas y cuestan unos 2 millones de dólares pero generan hasta 2,5 MW por turbina.[3] Todas ellas funcionan gracias a una fuente de energía fácilmente disponible —el viento.

La teoría que hay detrás de la conversión de energía cinética en electromagnética es simple. Las moléculas de aire golpean sobre las aspas de la hélice y hacen girar la turbina. Las aspas hacer girar unos engranajes que hacen aumentar la velocidad de rotación que a su vez hace girar el rotor generador. El generador envía energía electromagnética a cables que soportan alta tensión.

Sin embargo, la conversión de la energía cinética del viento en energía electromagnética no es perfectamente eficiente; de hecho, no puede ser 100% eficiente. Si las turbinas convirtieran completamente la energía cinética del viento en energía eléctrica, el aire saldría de las turbinas sin energía cinética. Es decir, las turbinas pararían el aire. Si la turbina parase completamente el aire, éste fluiría alrededor de la turbina en lugar de fluir a través de ella.

Así, la turbina debe ser capaz de capturar la energía cinética del aire en movimiento y de evitar el flujo de aire a su alrededor. Las turbinas propulsadas por hélices son las más comunes y su eficiencia teórica varía de 30% a 59%.[4] (Las eficiencias teóricas varían en función de cómo el aire fluye alrededor de la turbina y a través de las hélices.)

En resumen, ni la más eficiente de las turbinas puede convertir el 100% de la energía disponible. ¿Qué sucede? Antes de llegar a la turbina el aire fluye de forma laminar mientras que al dejar atrás la turbina el aire se vuelve turbulento. La componente rotacional del movimiento del aire de detrás de la turbina, aumenta su energía aunque también hay alguna disipación debida a la viscosidad del aire. Si un determinado volumen de aire se mueve más lentamente, aparecerá un rozamiento entre este aire y el aire más veloz que fluye a su alrededor.[5] Las hélices se calientan y el aire también. Los engranajes de la turbina también disipan energía debido al rozamiento. Las hélices vibran individualmente —la energía absorbida para producir estas vibraciones también hace disminuir la eficiencia. Finalmente, la turbina necesita corriente para hacer funcionar los motores que lubrican los engranajes y el motor que orienta la turbina en la dirección más apropiada para la captura del viento.

Un parque eólico que convierte la energía cinética del aire en energía eléctrica. *(Image Slate.)*

MATERIAL COMPLEMENTARIO Y RECURSOS ADICIONALES

Esta nueva edición dispone de gran cantidad de recursos y materiales complementarios para alumnos y profesores. Todos estos materiales se encuentran disponibles en su versión original en inglés.

Si es usted profesor y piensa utilizar este libro como texto para su asignatura, puede acceder al material complementario registrándose en la siguiente página web, www.reverte.com/microsites/tipler6ed, o contactando con promocion@reverte.com

También está disponible en soporte físico el siguiente material:

Para el alumno

Student Solutions Manual proporciona la resolución completa de los problemas impares de final de capítulo.

Volume 1 (Chapters 1-20, R) 9781429203029
Volume 2 (Chapters 21-33) 9781429203036
Volume 3 (Chapters 34-41) 9781429203012

Study Guide destaca las magnitudes físicas y ecuaciones clave y los errores que deben evitarse. Incluye problemas prácticos y cuestiones para mejorar la comprensión de los conceptos físicos, además de test para su comprobación.

Volume 1 (Chapters 1-20, R) 978071784678
Volume 2 (Chapters 21-33) 9781429204101
Volume 3 (Chapters 34-41) 9781429204118

Para el profesor

Instructor's Resource CD-ROM contiene ilustraciones en formato jpg, presentaciones PowerPoint, un completo *test bank* con más de 4000 problemas tipo test y las herramientas para diseñar presentaciones y páginas web.

Volume 1 (Chapters 1-20, R) 9780716784708
Volume 2 (Chapters 21-33) 9781429202688
Volume 3 (Chapters 34-41) 9781429202671

Answer Booklet with Solution CD Resource son libros que contienen las respuestas de todos los problemas de final de capítulo e incluyen un CD-ROM con sus resoluciones completas. Estas soluciones también están disponibles en el Instructor's CD-ROM.

Volume 1 (Chapters 1-20, R) 9780716784791
Volume 2 (Chapters 21-33) 9781429204576
Volume 3 (Chapters 34-41) 9781429205146

Puede adquirir este material en Los Andes Libros S.L. a través de su página web, www.andeslibros.com, o contactando con libros@andeslibros.com.

FLEXIBILIDAD PARA LOS CURSOS DE FÍSICA

Nos damos cuenta de que no todos los cursos de física son iguales. Para facilitar la utilización del libro, *Física para la ciencia y la tecnología* se halla disponible en las siguientes versiones:

Volumen 1 *Mecánica/Oscilaciones y ondas/Termodinámica* (Capítulos 1–20, R) 978-84-291-4429-1

Volumen 2 *Electricidad y magnetismo/Luz* (Capítulos 21–33) 978-84-291-4430-7

Volumen 1A *Mecánica* (Capítulos 1–13) 978-84-291-4421-5

Volumen 1B *Oscilaciones y ondas* (Capítulos 14–16) 978-84-291-4422-2

Volumen 1C *Termodinámica* (Capítulos 17–20) 978-84-291-4423-9

Volumen 2A *Electricidad y magnetismo* (Capítulos 21–30) 978-84-291-4424-6

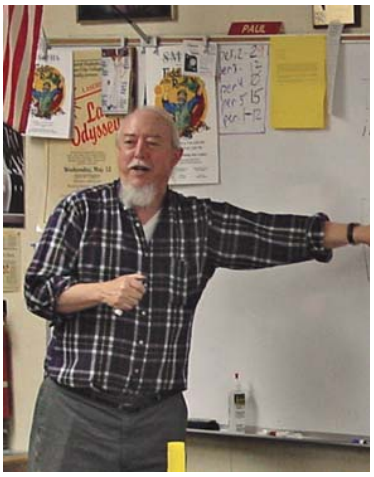
Volumen 2B *Luz* (Capítulos 31–33) 978-84-291-4425-3

Física moderna *Mecánica cuántica, relatividad y estructura de la materia* (Capítulos R, 34–41) 978-84-291-4426-0

Apéndices y respuestas 978-84-291-4427-7

Acerca de los autores

Paul Tipler nació en la pequeña ciudad agrícola de Antigo, Wisconsin, en 1933. Realizó sus estudios medios en Oshkosh, Wisconsin, en donde su padre era superintendente de las Escuelas Públicas. Recibió el título de Bachelor of Science en la Universidad de Purdue en 1955 y obtuvo su Ph.D. en la Universidad de Illinois, en donde estudió la estructura del núcleo. Impartió la enseñanza durante un año en la Wesleyan University de Connecticut mientras redactaba su tesis. Después se trasladó a la Universidad de Oakland en Michigan, donde fue uno de los primeros miembros del Departamento de Física, y desempeñó un papel importante en el desarrollo de los planes de estudio. Durante los siguientes 20 años, enseñó casi todas las disciplinas de la física y escribió la primera y segunda ediciones de sus ampliamente difundidos textos *Física Moderna* (1969, 1978) y *Física* (1976, 1982). En 1982, se mudó a Berkeley, California, donde ahora reside y donde escribió *Física preuniversitaria* (1987) y la tercera edición de *Física* (1991). Además de la física, sus aficiones incluyen la música, excursionismo y camping. Es un excelente pianista de jazz y un buen jugador de póker.



Gene Mosca nació en la ciudad de Nueva York y se crió en Shelter Island, en el Estado de Nueva York. Estudió en la Universidad de Villanova, en la Universidad de Michigan y en la Universidad de Vermont, donde obtuvo su Ph.D. en física. Recientemente jubilado, Gene Mosca ha sido profesor en la U.S. Naval Academy, donde fue el impulsor de numerosas mejoras en la enseñanza de la Física, tanto en los laboratorios como en las aulas. Proclamado por Paul Tipler como "el mejor crítico que he tenido", Mosca se ha convertido en coautor del libro a partir de su quinta edición.

PARTE I **MECÁNICA**

CAPÍTULO 1

Medida y vectores

1.1 La naturaleza de la física
1.2 Unidades
1.3 Conversión de unidades
1.4 Dimensiones de las magnitudes físicas
1.5 Cifras significativas y órdenes de magnitud
1.6 Vectores
1.7 Propiedades generales de los vectores

EN UNA PLAYA HAY DEMASIADOS GRANOS DE ARENA PARA CONTARLOS UNO POR UNO, PERO SE PUEDE OBTENER EL NÚMERO APROXIMADO POR MEDIO DE HIPÓTESIS RAZONABLES Y CÁLCULOS SENCILLOS. *(Corbis.)*

? ¿Cuántos granos de arena hay en su playa favorita? (Véase el ejemplo 17.)

La humanidad siempre ha sentido curiosidad por el mundo que le rodea. Como demuestran los primeros documentos gráficos, siempre hemos buscado el modo de imponer orden en la enmarañada diversidad de los sucesos observados, el color del cielo, el cambio del sonido de un coche cuando pasa, el balanceo de un árbol, la salida y la puesta del Sol, el vuelo de un ave o de un avión. Esta búsqueda para entender ha adoptado distintas formas: una es la religión, otra es el arte y otra es la ciencia. Aunque el vocablo *ciencia* viene del latín y significa "saber", la ciencia no sólo es saber sino, especialmente, comprensión del mundo natural. La Física pretende describir los fundamentos del universo y cómo funciona. Es la ciencia de la materia y de la energía, del espacio y del tiempo.

Como toda ciencia, la Física se estructura de una forma específica y racional. Los físicos construyen, prueban y relacionan modelos con el objetivo de describir, explicar y predecir la realidad. Este proceso comporta elaborar hipótesis, llevar a cabo repetidamente experimentos y observaciones y, en consecuencia, elaborar nuevas hipótesis. El resultado final es un conjunto de principios fundamentales y de leyes que describen el mundo. Estas leyes y principios se aplican tanto a fenómenos exó-

ticos como los agujeros negros, la energía oscura y partículas con nombres tan peculiares como leptoquarks o bosones como a la vida cotidiana. Como veremos, hay innumerables cuestiones de nuestro entorno cotidiano que pueden explicarse con un conocimiento básico de física. ¿Por qué el cielo es azul? ¿Por qué los astronautas flotan en el espacio? ¿Cómo funcionan los reproductores de discos compactos? ¿Por qué un oboe suena distinto de una flauta? ¿Por qué un helicóptero debe tener dos rotores? ¿Por qué los objetos metálicos parecen más fríos que los objetos de madera a igual temperatura? ¿Por qué los relojes que se mueven van más lentos?

En este libro, aplicaremos los principios de la física para contestar estas y otras cuestiones. Estudiaremos los temas clásicos de la física, la mecánica, el sonido, la luz, el calor, la electricidad, el magnetismo, la física atómica y nuclear. También aprenderemos algunas técnicas útiles para la resolución de problemas. En este proceso esperamos que el lector tome conciencia de la importancia de la física y aprecie toda su belleza.

En este capítulo, empezaremos a prepararnos estudiando algunos conceptos previos que se necesitan para el estudio de la física. Examinaremos brevemente la naturaleza de la física, estableceremos algunas definiciones básicas, introduciremos los sistemas de unidades y aprenderemos a usarlos y presentaremos una introducción a la matemática de los vectores. También trataremos de la exactitud de las medidas, las cifras significativas y las estimaciones.

1.1 LA NATURALEZA DE LA FÍSICA

El vocablo *física* procede del griego y significa el conocimiento del mundo natural. Por lo tanto, no nos ha de sorprender que los primeros esfuerzos registrados por el ser humano para reunir sistemáticamente el conocimiento sobre el movimiento de los cuerpos procedan de la antigua Grecia. En la filosofía natural establecida por Aristóteles (384–322 a.C.), las explicaciones de los fenómenos físicos se deducían de hipótesis sobre el mundo y no de la experimentación. Por ejemplo, una hipótesis fundamental afirmaba que toda sustancia tenía un "lugar natural" en el universo. Se estableció que el movimiento era el resultado del intento de una sustancia de alcanzar su lugar natural. El acuerdo entre las deducciones de la física aristotélica y los movimientos observados en el universo físico, y la falta de una tradición experimental que derrocase la física antigua, hizo que el punto de vista de los griegos fuera aceptado durante casi dos mil años. Fue el científico italiano Galileo Galilei (1564–1642) quien, con sus brillantes experimentos sobre el movimiento, estableció para siempre la absoluta necesidad de la experimentación en la física e inició la desintegración de la física de Aristóteles. Unos cien años después, Isaac Newton generalizó los resultados experimentales de Galileo en sus tres leyes fundamentales del movimiento, y el reino de la filosofía natural de Aristóteles se extinguió.

Durante los siguientes doscientos años la experimentación aportó innumerables descubrimientos y surgieron nuevas preguntas. Se descubrieron los fenómenos térmicos y eléctricos, y algunos relacionados con la expansión y la compresión de los gases. Estos descubrimientos y las nuevas preguntas que planteaban inspiraron el desarrollo de nuevos modelos para su explicación. A finales del siglo XIX, las leyes de Newton referentes a los movimientos de los sistemas mecánicos se asociaron a las igualmente impresionantes leyes de James Maxwell, James Joule, Sadi Carnot y otros científicos, para describir el electromagnetismo y la termodinámica. Los temas que ocuparon a los físicos durante la última parte del siglo XIX —mecánica, luz, calor, sonido, electricidad y magnetismo— constituyen lo que se denomina *física clásica*. Dado que necesitamos la física clásica para comprender el mundo macroscópico donde vivimos, le dedicaremos las partes I a V de este libro.

El notable éxito alcanzado por la física clásica llevó a muchos científicos al convencimiento de que la descripción del universo físico se había completado. Sin embargo, el descubrimiento de los rayos X realizado por Wilhelm Roentgen en 1895 y el de la radiactividad por Antoine Becquerel y Marie y Pierre Curie poco

después parecían estar fuera del marco de la física clásica. La teoría de la relatividad especial propuesta por Albert Einstein en 1905 contradecía las ideas de espacio y tiempo de Galileo y Newton. En el mismo año, Einstein sugirió que la energía luminosa estaba cuantizada; es decir, que la luz se propaga en paquetes discretos de energía y no en forma ondulatoria y continua como suponía la física clásica. La generalización de esta idea a la cuantización de todos los tipos de energía es un concepto fundamental de la mecánica cuántica, con sorprendentes e importantes consecuencias. La aplicación de la relatividad especial y, particularmente, la teoría cuántica a sistemas microscópicos, tales como átomos, moléculas y núcleos, ha conducido a una comprensión detallada de sólidos, líquidos y gases, y constituye lo que generalmente se denomina *física moderna*, a la que dedicamos la parte VI de este texto.

Comenzaremos nuestro estudio de la física con los temas clásicos. Sin embargo, de vez en cuando elevaremos nuestra mirada para analizar la relación entre la física clásica y la física moderna. Así, por ejemplo, en el capítulo 2 dedicaremos un espacio a las velocidades próximas a la de la luz, atravesando brevemente el universo relativista imaginado primeramente por Einstein. Igualmente, después de abordar la conservación de la energía en el capítulo 7, trataremos de la cuantización de la energía y de la famosa relación de Einstein entre la masa y la energía, $E = mc^2$. Unos capítulos más adelante, en el capítulo R, estudiaremos la naturaleza del espacio y del tiempo, tal como fue desvelada por Einstein en 1903.

1.2 UNIDADES

Las leyes de la Física expresan relaciones entre magnitudes físicas. Las **magnitudes físicas** son números que se obtienen a partir de medir fenómenos físicos. Por ejemplo, las páginas que ocupa este libro, el tiempo que se necesita para leer un párrafo o la temperatura de la clase son magnitudes físicas.

La medida de toda magnitud física exige compararla con cierto valor unitario de la misma. Así, para medir la distancia entre dos puntos, la comparamos con una unidad estándar de distancia tal como el metro. La afirmación de que una cierta distancia es de 25 metros significa que equivale a 25 veces la longitud de la unidad metro; es decir, una regla métrica patrón se ajusta 25 veces en dicha distancia. Es importante añadir la unidad metros junto con el número 25 al expresar una distancia debido a que existen otras unidades de longitud de uso común. Decir que una distancia es 25 carece de significado. Toda magnitud física debe expresarse con una cifra y una unidad.

Algunas de las magnitudes físicas más básicas, como el tiempo, la distancia y la masa, se definen mediante los procesos que las miden. Una magnitud física se define frecuentemente de **forma operacional**, es decir, de una forma que define la magnitud física mediante el procedimiento que debe realizarse para medirla. Otras magnitudes físicas se definen haciendo explícito el procedimiento de cálculo a partir de las magnitudes fundamentales. La velocidad de un cuerpo, por ejemplo, se calcula dividiendo la distancia por el tiempo invertido en recorrerla. Muchas de las magnitudes físicas que se estudiarán, como la velocidad, la fuerza, el momento, el trabajo, la energía y la potencia, pueden expresarse en función de tres magnitudes fundamentales: la longitud, el tiempo y la masa. En consecuencia, basta con pocas magnitudes básicas para poder expresar todas las demás magnitudes físicas. La elección de las unidades estándar para expresar estas magnitudes fundamentales determina un sistema de unidades.

> ! Cuando se usa una cifra para determinar una magnitud física, el número debe ir acompañado siempre de una unidad.

El reloj de agua usado para medir intervalos de tiempo durante el siglo XIII. *(The Granger Collection.)*

EL SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES

En física es importante usar un conjunto consistente de unidades. En el año 1960 un comité internacional estableció un conjunto estándar para la comunidad científica, denominado SI (a partir de Système International). En este sistema hay siete magnitudes fundamentales: longitud, masa, tiempo, intensidad eléctrica, tempera-

Tabla 1.1 Prefijos de las potencias de 10*

Múltiplo	Prefijo	Abreviatura
10^{18}	exa	E
10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{3}	kilo	k
10^{2}	hecto	h
10^{1}	deca	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a

* Los prefijos hecto (h), deca (da) y deci (d) no son múltiplos de 10^3 ó 10^{-3} y se utilizan con poca frecuencia. El otro prefijo que no es múltiplo de 10^3 ó 10^{-3} es centi (c). Los prefijos que se usan con más frecuencia en este libro se escriben en rojo. Observése que todos los símbolos de prefijos múltiplos de 10^6 y superiores se escriben en mayúsculas; las demás se escriben con minúsculas.

PREFIJOS

Muchas veces es necesario trabajar con medidas que son mucho más pequeñas o mucho mayores que la unidad estándar del SI. En estas situaciones, se pueden usar otras unidades que son múltiplos o submúltiplos (potencias de 10) de las unidades SI estándar. Estas unidades se expresan mediante un prefijo como, por ejemplo, el prefijo "kilo" que significa 1000, o 10^3, o el prefijo "micro" que significa 0,000 001, o 10^{-6}. En la tabla 1.1 se relacionan los prefijos de los múltiplos y submúltiplos más corrientes de las unidades del SI. Los prefijos pueden aplicarse a cualquier unidad del SI; por ejemplo, 0,001 segundos es un milisegundo (ms); 1 000 000 watts es un megawatt (MW).

PROBLEMA PRÁCTICO 1.1
Use los prefijos para describir: (*a*) el retraso de la señal al propagarse por el cable de la televisión por cable que es de 0,000 000 3 segundos o (*b*) la longitud de la circunferencia de un meridiano terrestre que es de 40 000 000 metros.

OTROS SISTEMAS DE UNIDADES

Además del SI, en determinadas circunstancias se usan otros sistemas de unidades. Uno de estos sistemas es el *sistema cgs*, basado en el centímetro, el gramo y el segundo. Otras unidades cgs son la dina (unidad de fuerza) y el erg (unidad de energía).

Existen otros sistemas de unidades como el sistema técnico inglés utilizado en los EE.UU. y otros países de habla inglesa, en el que se toma el pie como unidad de longitud, el segundo como unidad de tiempo y la libra como unidad funda-

mental de fuerza. En el capítulo 4, veremos que la masa es una elección mejor que la fuerza como unidad fundamental, por tratarse de una propiedad intrínseca de un objeto que es independiente de su localización. Actualmente, el sistema técnico inglés se define en base a las unidades del SI.

1.3 CONVERSIÓN DE UNIDADES

Cuando se usan distintos sistemas de unidades es importante saber cómo convertir magnitudes expresadas en una unidad de un sistema en unidades de otro sistema. Cuando estas magnitudes se suman, se multiplican o se dividen en una ecuación algebraica, las unidades pueden tratarse como cualquier otra magnitud algebraica. Por ejemplo, supongamos que deseamos hallar la distancia recorrida en 3 horas (h) por un coche que se mueve con una velocidad constante de 80 kilómetros por hora (km/h). La distancia x es precisamente la velocidad v multiplicada por el tiempo t:

$$x = vt = \frac{80 \text{ km}}{\cancel{\text{h}}} \times 3 \cancel{\text{h}} = 240 \text{ km}$$

Eliminamos la unidad de tiempo, la hora, igual que haríamos con cualquier otra magnitud algebraica para obtener la distancia en la unidad de longitud correspondiente, el kilómetro. Este método permite fácilmente pasar de una unidad de distancia a otra. A continuación, supongamos que queremos convertir los kilómetros (km) en millas (mi). Teniendo en cuenta que 1 mi = 1,609 km (véase el apéndice A). Si dividimos los dos miembros de esta igualdad por 1,609 km se obtiene

$$\frac{1 \text{ mi}}{1{,}609 \text{ km}} = 1$$

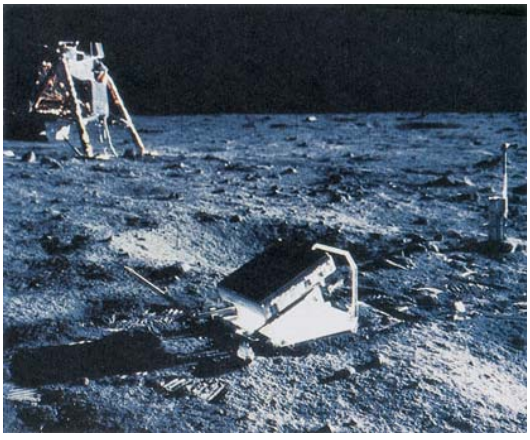
Obsérvese que el factor anterior es una fracción igual a 1. El factor (1 mi)/(1,609 km) se denomina **factor de conversión**. Todos los factores de conversión tienen el valor de 1 y se utilizan para pasar una magnitud expresada en una unidad de medida a su equivalente en otra unidad de medida.

$$240 \text{ km} = 240 \cancel{\text{km}} \times \frac{1 \text{ mi}}{1{,}609 \cancel{\text{km}}} = 149 \text{ mi}$$

Escribiendo de forma explícita las unidades, no es necesario pensar si hay que multiplicar o dividir por 1,609 para pasar de kilómetros a millas, ya que las unidades indican si hemos escogido el factor correcto o el incorrecto.

! Si las unidades de una cantidad y el factor de conversión no se simplifican para dar las unidades deseadas, significa que la conversión no se ha realizado correctamente.

(*a*)



(*b*)

(*a*) Haces de láser emitidos desde el Observatorio Macdonald para medir la distancia hasta la Luna. Esta distancia se mide con un error de pocos centímetros midiendo el tiempo transcurrido en el viaje de ida y vuelta del rayo láser a la Luna después de reflejarse en un espejo (*b*) allí emplazado por los astronautas del *Apolo* 14. (*a, McDonald Observatory; b, Bruce Coleman).*

Ejemplo 1.1 Uso de los factores de conversión

Un empleado de una empresa con sede en Estados Unidos ha de viajar, por encargo de su empresa, a un país donde las señales de tráfico muestran la distancia en kilómetros y los velocímetros de los coches están calibrados en kilómetros por hora. Si con su vehículo viaja a 90 km por hora, ¿a cuánto equivale su velocidad expresada en metros por segundo y en millas por hora?

PLANTEAMIENTO Utilizaremos el hecho de que 1000 m = 1 km, 60 s = 1 min y 60 min = 1 h para convertir los kilómetros por hora en metros por segundo. Se multiplica la magnitud 90 km/h por una serie de factores de conversión de valor 1 de modo que el valor de la velocidad no varía. Para convertir la velocidad en millas por hora, se utiliza el factor de conversión (1 mi)/(1,609 km) = 1.

SOLUCIÓN

1. Multiplicar 90 km/h por los factores de conversión que transforman los kilómetros en metros y las horas en segundos:

$$\frac{90\ \text{km}}{\text{h}} \times \frac{1\ \text{h}}{3600\ \text{s}} \times \frac{1000\ \text{m}}{1\ \text{km}} = \boxed{25\ \text{m/s}}$$

2. Multiplicar 90 km/h por 1 mi/1,61 km:

$$\frac{90\ \text{km}}{\text{h}} \times \frac{1\ \text{mi}}{1{,}609\ \text{km}} = \boxed{56\ \text{mi/h}}$$

COMPROBACIÓN Verificar que las unidades, al final de cada paso, son las correctas. Si no se han tenido en cuenta los factores de conversión de forma correcta, por ejemplo si se multiplica por 1 km/1000 m en vez de por 1000 m/1 km, las unidades al final no son las correctas.

OBSERVACIÓN El primer paso puede simplificarse sustituyendo 1 h/3600 s por 1h/3,6 ks y eliminando los prefijos en ks y km. Es decir

$$\frac{90\ \text{km}}{\text{h}} \times \frac{1\ \text{h}}{3{,}6\ \text{ks}} = \boxed{25\ \text{m/s}}$$

Eliminar estos prefijos equivale a dividir el numerador y el denominador por 1000.

Puede resultar útil memorizar los resultados de este ejemplo, ya que puede facilitar la conversión de velocidades habituales rápidamente

$$25\ \text{m/s} = 90\ \text{km/h} \approx (60\ \text{mi/h})$$

Conocer estos valores puede ser útil para convertir de forma más rápida las velocidades a unidades con las que esté más familiarizado.

(Eunice Harris/Photo Researchers.)

1.4 DIMENSIONES DE LAS MAGNITUDES FÍSICAS

Dar un valor de una magnitud física comporta dar un número y la unidad en que está expresado. La unidad indica el estándar que se usa para la medida y la cifra nos muestra la comparación con una cantidad estándar. No obstante, para saber lo que se está midiendo hay que conocer la dimensión de la magnitud física. La longitud, el tiempo y la masa son dimensiones. La distancia entre dos objetos tiene dimensiones de longitud y expresamos esta relación como $[d] = \text{L}$, donde $[d]$ representa la dimensión de la distancia d y L es la dimensión de la longitud. Todas las dimensiones se representan con una letra mayúscula; así, T y M representan, respectivamente, las dimensiones del tiempo y de la masa. Las dimensiones de muchas magnitudes físicas pueden expresarse en función de estas tres dimensiones fundamentales. Por ejemplo, el área A de una superficie. Puesto que el área es el producto de dos longitudes, se dice que tiene dimensiones de longitud por longitud, o longitud al cuadrado, que suele escribirse $[A] = \text{L}^2$. En esta ecuación, $[A]$ representa la dimensión de A, y L es la dimensión de la longitud. La velocidad tiene dimensiones de longitud dividida por tiempo o L/T. Las dimensiones de otras magnitudes, tales como fuerza o energía, se escriben en función de las magnitudes fundamentales longitud, tiempo y masa. La suma de dos magnitudes físicas sólo tiene sentido si ambas tienen las mismas di-

mensiones. Por ejemplo, no podemos sumar un área a una velocidad y obtener una suma que signifique algo. Si tenemos una ecuación como

$$A = B + C$$

las magnitudes A, B y C deben tener las tres las mismas dimensiones. La suma de B y C exige que las dos magnitudes estén además expresadas en las mismas unidades. Por ejemplo, si B es un área de 500 cm^2 y C es 4 m^2, debemos convertir B en m^2 o C en cm^2 para hallar la suma de las dos áreas.

A veces pueden detectarse errores en un cálculo comprobando las dimensiones y unidades de las magnitudes que intervienen en él. Supóngase, por ejemplo, que estamos utilizando erróneamente la fórmula $A = 2\pi r$ para el área de un círculo. Veremos inmediatamente que esto no puede ser correcto, ya que $2\pi r$, tiene dimensiones de longitud, mientras que el área tiene dimensiones de longitud al cuadrado.

! La coherencia dimensional es una condición necesaria, pero no suficiente, para que una ecuación sea correcta. Al expresar el área de un círculo el análisis dimensional no indicará si la expresión correcta es πr^2 o $2\pi r^2$. (La expresión correcta es πr^2.)

Ejemplo 1.2 Las dimensiones físicas de la presión

La presión de un fluido en movimiento depende de su densidad ρ y de su velocidad v. Determinar una combinación sencilla de densidad y velocidad que nos dé las dimensiones correctas de la presión.

PLANTEAMIENTO En la tabla 1.2 se ve que la presión tiene dimensiones de $M/(LT^2)$, la densidad es M/L^3 y la velocidad L/T. Además, se observa que tanto la presión como la densidad tienen unidades de masa en el numerador, mientras que la velocidad no contiene la dimensión M. Por lo tanto, tenemos que multiplicar o dividir dimensiones de densidad y dimensiones de velocidad para obtener la masa en las dimensiones de la presión. Para determinar con exactitud la relación comenzaremos dividiendo las unidades de presión por las de densidad e inspeccionemos el resultado con respecto a las dimensiones de la velocidad.

SOLUCIÓN

1. Se dividen las unidades de presión por las de densidad:
$$\frac{[P]}{[\rho]} = \frac{M/LT^2}{M/L^3} = \frac{L^2}{T^2}$$

2. El resultado tiene dimensiones de v^2. Las dimensiones de la presión son las mismas que las de densidad multiplicadas por las de velocidad al cuadrado:
$$[P] = [\rho][v^2] = \frac{M}{L^3} \times \left(\frac{L}{T}\right)^2 = \frac{M}{L^3} \times \frac{L^2}{T^2} = \boxed{\frac{M}{LT^2}}$$

COMPROBACIÓN Dividir las dimensiones de la presión por las dimensiones de la velocidad al cuadrado y el resultado tiene dimensiones de densidad $[P]/[v^2] = (M/LT^2)/(L^2/T^2) = M/L^3 = [\rho]$.

1.5 CIFRAS SIGNIFICATIVAS Y ÓRDENES DE MAGNITUD

Muchos de los números que se manejan en la ciencia son el resultado de una medida y, por lo tanto, sólo se conocen con cierta incertidumbre experimental. La magnitud de esta incertidumbre, que depende de la habilidad del científico y del aparato utilizado, frecuentemente sólo puede estimarse. Se suele dar una indicación aproximada de la incertidumbre de una medida mediante el número de dígitos que se utilizan. Por ejemplo, si decimos que la longitud de una mesa es 2,50 m, queremos indicar que probablemente su longitud se encuentra entre 2,495 m y 2,505 m; es decir, conocemos su longitud con una exactitud aproximada de ±0,005 m = ±0,5 cm de la longitud establecida. Si utilizamos un metro en el que se puede apreciar el milímetro y medimos esta misma longitud de la mesa cuidadosamente, podemos estimar que hemos medido la longitud con una precisión de ±0,5 mm, en lugar de ±0,5 cm. Indicamos esta precisión utilizando cuatro dígitos, como por ejemplo, 2,503 m, para expresar la longitud. Recibe el nombre de **cifra significativa** todo dígito (exceptuando el cero cuando

Tabla 1.2 Dimensiones de las magnitudes físicas

Magnitud	Símbolo	Dimensión
Área	A	L^2
Volumen	V	L^3
Velocidad	v	L/T
Aceleración	a	L/T^2
Fuerza	F	ML/T^2
Presión (F/A)	p	M/LT^2
Densidad (M/V)	ρ	M/L^3
Energía	E	ML^2/T^2
Potencia (E/T)	P	ML^2/T^3

se utiliza para situar el punto decimal) cuyo valor se conoce con seguridad. El número 2,50 tiene tres cifras significativas; 2,503 tiene cuatro. El número 0,00103 tiene tres cifras significativas. (Los tres primeros ceros no son cifras significativas, ya que simplemente sitúan la coma decimal.) En notación científica, este número se escribiría como $1{,}03 \times 10^{-3}$. Un error muy común entre los estudiantes, particularmente desde que se ha generalizado el uso de calculadoras de bolsillo, es arrastrar en el cálculo muchos más dígitos de los que en realidad se requieren.

Supongamos, por ejemplo, que medimos el área de un campo de juego circular midiendo el radio en pasos y utilizando la fórmula del área $A = \pi r^2$. Si estimamos que la longitud del radio es 8 m y utilizamos una calculadora de 10 dígitos para determinar el valor del área, obtenemos $\pi(8\text{ m})^2 = 201{,}0619298\text{ m}^2$. Los dígitos situados detrás del punto decimal no sólo dificultan el cálculo sino que inducen a confusión respecto a la exactitud con la que conocemos el área. Una regla general válida cuando se manejan diferentes números en una operación de multiplicación o división es:

> El número de cifras significativas del resultado de una multiplicación o división no debe ser mayor que el menor número de cifras significativas de cualesquiera de los factores.

En el ejemplo anterior sólo se conoce una cifra significativa del radio; por lo tanto, sólo se conoce una cifra significativa del área. Esta se debe expresar como $2 \times 10^2\text{ m}^2$, lo que implica que el área está comprendida entre 150 m^2 y 250 m^2.

La precisión de la suma o resta de dos medidas depende de la precisión menor de estas medidas. Una regla general es:

> El resultado de la suma o resta de dos números carece de cifras significativas más allá de la última cifra decimal en que ambos números originales tienen cifras significativas.

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 1.1

¿Cuántas cifras significativas tiene el número 0,010 457?

! Los valores exactos tienen un número ilimitado de cifras significativas. Por ejemplo, un valor obtenido tras contar mesas no tiene incertidumbre, es un resultado exacto. Además, el factor de conversión 1 m/100 cm es un valor exacto porque 1 m es exactamente igual a 100 cm.

! Cuando trabajamos con números con incertidumbres debemos asegurarnos de no incluir más dígitos de los que incluye la precisión de las medidas.

Ejemplo 1.3 Cifras significativas

Determinar la resta de 1,040 de 1,21342.

PLANTEAMIENTO El primer número, 1,040, tiene sólo tres cifras significativas tras la coma decimal, mientras que el segundo, 0,21342, tiene cinco. De acuerdo con la regla anterior, la suma sólo puede tener tres cifras significativas después de la coma decimal.

SOLUCIÓN

Restar los números manteniendo sólo 3 dígitos más allá de la coma decimal: $1{,}21342 - 1{,}040 = 0{,}17342 = \boxed{0{,}173}$

COMPROBACIÓN La respuesta no puede tener una precisión mayor que la cifra menos precisa de la operación, es decir, 1,040 y, por lo tanto, la respuesta tiene, más allá de la coma, tres cifras significativas.

OBSERVACIÓN En este ejemplo, los números tienen cuatro y seis cifras significativas, pero la diferencia tiene sólo tres. La mayoría de los ejemplos y ejercicios de este libro tienen dos, tres o, excepcionalmente, cuatro cifras significativas.

PROBLEMA PRÁCTICO 1.2 Aplicar la regla apropiada para determinar el número de cifras significativas en las operaciones: (*a*) $1{,}58 \times 0{,}03$, (*b*) $1{,}4 + 2{,}53$, (*c*) $2{,}456 - 2{,}453$.

NOTACIÓN CIENTÍFICA

El manejo de números muy grandes o muy pequeños se simplifica utilizando la notación científica. En esta notación, el número se escribe como el producto de un número entre 1 y 10 y una potencia de 10, por ejemplo 10^2 (= 100) ó 10^3 (= 1000). Por ejemplo, el número 12 000 000 se escribe $1{,}2 \times 10^7$; la distancia entre la Tierra y el Sol, 150 000 000 000 m, aproximadamente, se escribe $1{,}5 \times 10^{11}$ m, donde hemos supuesto que ninguno de los ceros que sigue al cinco es una cifra significativa. Si alguno de los ceros que sigue al cinco fuera significativo escribiríamos el número

como $1{,}500 \times 10^{11}$ m. El número 11 en 10^{11} se llama **exponente**. Cuando los números son menores que 1, el exponente es negativo. Por ejemplo, $0{,}1 = 10^{-1}$, y $0{,}0001 = 10^{-4}$. El diámetro de un virus es, aproximadamente, igual a 0,000 000 01 m $= 1 \times 10^{-8}$ m. Observemos que al escribir los números de esta forma se identifican claramente las cifras significativas. Por ejemplo, en $1{,}5 \times 10^{11}$ m hay sólo dos cifras significativas (el 1 y el 5).

Véase el
Apéndice de matemáticas
para más información sobre
Potencias

PROBLEMA PRÁCTICO 1.3
Aplicar la regla apropiada para las cifras significativas y calcular $2{,}34 \times 10^2 + 4{,}93$.

Utilice la siguiente estrategia de resolución de problemas para hacer cálculos con notación científica.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Notación científica

PLANTEAMIENTO Si las cifras de un determinado cálculo son muy grandes o muy pequeñas, es conveniente escribirlas en notación científica. Esta notación permite determinar fácilmente el número de cifras significativas que tiene una cantidad y hace más fácil llevar a cabo los cálculos.

SOLUCIÓN Use las siguientes recomendaciones para resolver problemas con notación científica.

1. Al multiplicar dos números con notación científica, los exponentes se suman; en la división, se restan. Estas reglas pueden comprobarse fácilmente en los siguientes ejemplos:

   Ejemplo: $10^2 \times 10^3 = 100 \times 1000 = 100\,000 = 10^5$

   Ejemplo: $\dfrac{10^2}{10^3} = \dfrac{100}{1000} = \dfrac{1}{10} = 10^{-1}$

2. En la notación científica, 10^0 se define como 1. En efecto, dividamos por ejemplo 1000 por sí mismo. Resulta

   Ejemplo: $\dfrac{1000}{1000} = \dfrac{10^3}{10^3} = 10^{3-3} = 10^0 = 1$

3. Vaya con cuidado al sumar o restar números en notación científica si los exponentes no coinciden

   Ejemplo: $(1{,}200 \times 10^2) + (8 \times 10^{-1}) = 120{,}0 + 0{,}8 = 120{,}8$

4. Para hacer el cálculo anterior sin convertir las cifras a la forma decimal hay que reescribirlas de forma que tengan el mismo exponente

   Ejemplo: $(1200 \times 10^{-1}) + (8 \times 10^{-1}) = 1208 \times 10^{-1} = 120{,}8$

5. Cuando se eleva una potencia a otra potencia los exponentes se multiplican

   Ejemplo: $(10^2)^4 = 10^2 \times 10^2 \times 10^2 \times 10^2 = 10^8$

COMPROBACIÓN Al convertir a notación científica cifras inferiores a uno asegúrese que el exponente sea negativo. Compruebe con atención cuándo los exponentes se suman, se restan o se multiplican, ya que si se realiza la operación equivocada se obtiene una respuesta incorrecta a nivel de potencias de 10.

OBSERVACIÓN Al resolver un problema evite introducir en la calculadora resultados intermedios; es preferible conservar estos resultados en la memoria de la calculadora. Cuando se tengan que introducir los resultados intermedios en la calculadora, añada uno o dos dígitos más (no significativos). Esta técnica sirve para minimizar errores de redondeo.

Todos los exponentes son adimensionales y no tienen unidades.

Ejemplo 1.4 ¿Cuánta agua?

Un litro (L) es el volumen de un cubo de 10 cm × 10 cm × 10 cm. Si una persona bebe 1 L de agua, ¿qué volumen en centímetros cúbicos y en metros cúbicos ocupará este líquido en su estómago?

PLANTEAMIENTO El volumen de un cubo de lado ℓ es $V = \ell^3$. El volumen en cm^3 se determina directamente a partir de $\ell = 10$ cm. Para determinar el volumen en m^3 hay que transformar los cm^3 en m^3 utilizando el factor de conversión 1 cm $= 10^{-2}$ m.

SOLUCIÓN

1. Calcular el volumen en cm^3:

$$V = \ell^3 = (10\text{ cm})^3 = 1000\text{ cm}^3 = \boxed{10^3\text{ cm}^3}$$

2. Convertir a m^3:

$$10^3\text{ cm}^3 = 10^3\text{ cm}^3 \times \left(\frac{10^{-2}\text{ m}}{1\text{ cm}}\right)^3$$

El factor de conversión (igual a 1) puede elevarse a la tercera potencia sin modificar su valor, permitiéndonos cancelar las unidades implicadas.

$$= 10^3\text{ cm}^3 \times \frac{10^{-6}\text{ m}^3}{1\text{ cm}^3} = \boxed{10^{-3}\text{ m}^3}$$

COMPROBACIÓN Obsérvese que las respuestas se dan en m^3 y en cm^3. Estas respuestas son consistentes con el hecho de que el volumen es una longitud elevada al cubo. Obsérvese también que 10^3 es mayor que 10^{-3}, lo cual es consistente con que el metro es mayor que el centímetro.

Ejemplo 1.5 Recuento de átomos

En 12 g de carbono existen $N_A = 6{,}02 \times 10^{23}$ átomos de esta sustancia (número de Avogadro). Si contáramos un átomo por segundo, ¿cuánto tiempo tardaríamos en contar los átomos de 1 g de carbono? Expresar el resultado en años.

PLANTEAMIENTO Necesitamos determinar el número total de átomos, N, que hemos de contar y tener en cuenta que el número contado es igual a la tasa de recuento R multiplicada por el tiempo t.

SOLUCIÓN

1. El tiempo es igual al número total de átomos N dividido por la tasa de recuento $R = 1$ átomo/s:

$$N = Rt$$

2. Determinar el número de átomos de carbono en 1 g:

$$N = \frac{6{,}02 \times 10^{23}\text{ átomos}}{12{,}0\text{ g}} = 5{,}02 \times 10^{22}\text{ átomos}$$

3. Calcular el número de segundos necesarios para contar los átomos si contamos 1 por segundo:

$$t = \frac{N}{R} = \frac{5{,}02 \times 10^{22}\text{ átomos}}{1\text{ átomo/s}} = 5{,}02 \times 10^{22}\text{ s}$$

4. Calcular el número de segundos que contiene un año:

$$n = \frac{365\ \cancel{\text{d}}}{1{,}00\text{ a}} \times \frac{24\ \cancel{\text{h}}}{1\ \cancel{\text{d}}} \times \frac{3600\text{ s}}{1\ \cancel{\text{h}}} = 3{,}15 \times 10^7\text{ s/a}$$

5. Utilizar el factor de conversión $3{,}15 \times 10^7$ s/a (una magnitud que conviene recordar) y convertir la respuesta del paso 3 en años:

$$t = 5{,}02 \times 10^{22}\text{ s} \times \frac{1{,}00\text{ a}}{3{,}15 \times 10^7\text{ s}}$$

$$= \frac{5{,}02}{3{,}15} \times 10^{22-7}\text{ a} = \boxed{1{,}59 \times 10^{15}\text{ a}}$$

COMPROBACIÓN La respuesta puede verificarse estimando que si se necesitan aproximadamente 10^{22} segundos para contar los átomos en un gramo de carbono y un año son unos 10^7 segundos, se necesitarían $10^{22}/10^7 = 10^{15}$ años.

OBSERVACIÓN El tiempo requerido es, aproximadamente, 100 000 veces la edad del universo.

PROBLEMA PRÁCTICO 1.4 Si dividiéramos esta tarea de modo que cada persona contase átomos diferentes, ¿cuántos años tardaría un equipo formado por 5000 millones (5×10^9) de personas para contar los átomos que contiene 1 g de carbono?

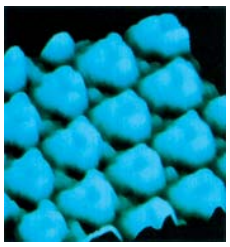
Tabla 1.3 El universo por órdenes de magnitud

Tamaño o distancia	(m)	Masa	(kg)	Intervalo de tiempo	(s)
Protón	10^{-15}	Electrón	10^{-30}	Tiempo invertido por la luz en atravesar un núcleo	10^{-23}
Átomo	10^{-10}	Protón	10^{-27}	Periodo de la radiación de luz visible	10^{-15}
Virus	10^{-7}	Aminoácido	10^{-25}	Periodo de las microondas	10^{-10}
Ameba gigante	10^{-4}	Hemoglobina	10^{-22}	Periodo de semidesintegración de un muón	10^{-6}
Nuez	10^{-2}	Virus de la gripe	10^{-19}	Periodo del sonido audible más alto	10^{-4}
Ser humano	10^{0}	Ameba gigante	10^{-8}	Periodo de las pulsaciones del corazón humano	10^{0}
Montaña más alta	10^{4}	Gota de lluvia	10^{-6}	Periodo de semidesintegración de un neutrón libre	10^{3}
Tierra	10^{7}	Hormiga	10^{-4}	Periodo de rotación terrestre	10^{3}
Sol	10^{9}	Ser humano	10^{2}	Periodo de revolución terrestre alrededor del Sol	10^{7}
Distancia Tierra-Sol	10^{11}	Cohete espacial Saturno 5	10^{6}		
Sistema solar	10^{13}	Pirámide	10^{10}	Vida media de un ser humano	10^{9}
Distancia de la estrella más cercana	10^{16}	Tierra	10^{24}	Periodo de semidesintegración del plutonio 239	10^{12}
		Sol	10^{30}	Vida media de una cordillera	10^{15}
Galaxia Vía Láctea	10^{21}	Galaxia Vía Láctea	10^{41}	Edad de la Tierra	10^{17}
Universo visible	10^{26}	Universo	10^{52}	Edad del universo	10^{18}

ORDEN DE MAGNITUD

Cuando se realizan cálculos aproximados o comparaciones se suele redondear un número hasta la potencia de 10 más próxima. Tal número recibe el nombre de **orden de magnitud**. Por ejemplo, la altura de un pequeño insecto, digamos un hormiga, puede ser 8×10^{-4} m ó, aproximadamente, 10^{-3} m. Diremos que el orden de magnitud de la altura de una hormiga es de 10^{-3} m. De igual modo, como la altura de la mayoría de las personas se encuentra próxima a 2 m, podemos redondear este número y decir que el orden de magnitud de la altura de una persona es $h \sim 10^{0}$, donde el símbolo $\sim$ significa "es del orden de magnitud de". Esto no quiere decir que la altura típica de una persona sea realmente de 1 m, sino que está más próxima a 1 m que a 10 m ó $10^{-1} = 0{,}1$ m. Podemos decir que una persona típica es tres órdenes de magnitud más alta que una hormiga típica, queriendo decir con esto que el cociente entre las alturas es, aproximadamente, igual a 10^{3} (relación 1000 a 1). Un orden de magnitud no proporciona cifras que se conozcan con precisión; es decir, debemos considerar que no tiene cifras significativas. La tabla 1.3 especifica los valores de los órdenes de magnitud de algunas longitudes, masas y tiempos relacionados con la Física.

En muchos casos, el orden de magnitud de una cantidad puede estimarse mediante hipótesis razonables y cálculos simples. El físico Enrico Fermi era un maestro en el cálculo de respuestas aproximadas a cuestiones ingeniosas que parecían a primera vista imposibles de resolver por la limitada información disponible. El siguiente es un ejemplo de problema de Fermi.



Moléculas de benceno del orden de 10^{-10} m de diámetro, vistas mediante un microscopio electrónico de barrido. *(IBM Research, Almaden Research Center.)*

El diámetro de la galaxia Andrómeda es del orden de 10^{21} m. *(Smithsonian Institution.)*

Distancias familiares en nuestro mundo cotidiano. La altura de la muchacha es del orden de 10^{0} m y la de la montaña de 10^{4} m. *(Kent and Donnan Dannon/Photo Researchers.)*

Ejemplo 1.6 Desgaste de los neumáticos

¿Qué espesor de la banda de caucho de un neumático de automóvil se ha desgastado en un recorrido de 1 km?

PLANTEAMIENTO Supongamos que el espesor de la banda de un neumático nuevo es de 1 cm. Quizás varíe en un factor de 2, pero desde luego no es 1 mm, ni tampoco 10 cm. Como los neumáticos deben reemplazarse cada 60 000 km, podemos admitir que la banda está gastada completamente después de recorrer esta distancia, es decir, que su espesor disminuye a razón de 1 cm cada 60 000 km.

(Corbis.)

SOLUCIÓN

Utilizar la estimación de desgaste de 1 cm por cada 60 000 km de recorrido para calcular la disminución de espesor en 1 km:

$$\frac{\text{desgaste de 1 cm}}{\text{60 000 km recorrido}} = \frac{\text{desgaste de } 1{,}7 \times 10^{-5} \text{ cm}}{\text{1 km recorrido}}$$

$$\approx \boxed{2 \times 10^{-7} \text{ m de desgaste por km recorrido}}$$

COMPROBACIÓN Si se multiplica $1{,}7 \times 10^{-5}$ cm/km por 60 000 km se obtiene, aproximadamente, 1 cm, que es el espesor de la banda de un neumático nuevo.

OBSERVACIÓN El diámetro de los átomos es de unos 2×10^{-10} m. Así, el grosor desgastado por cada kilómetro de recorrido es equivalente a 1000 diámetros atómicos.

Ejemplo 1.7 ¿Cuántos granos de arena hay en una playa? *Póngalo en su contexto*

Para evitar caer en la somnolencia durante una clase después de un día cargado de actividades, no hay nada mejor que este reto que propone un profesor de física a sus alumnos consistente en estimar cuántos granos de arena hay en una playa.

PLANTEAMIENTO Primero tenemos que plantearnos qué características asumimos que tiene la playa y su arena. Suponemos que la playa ocupa una zona de forma rectangular de 500 m de largo, 100 de ancho y que la arena tiene unos 3 m de profundidad. Una búsqueda intensa mediante Internet nos lleva a estimar que los granos de arena tienen diámetros que oscilan entre 0,04 mm y 2 mm, pero en nuestro problema consideramos que los granos de arena son esferas con un diámetro medio de 1 mm. Por otra parte, suponemos que los granos están tan juntos entre ellos, que el volumen del espacio entre ellos es despreciable comparado con el volumen de la arena.

(Corbis.)

SOLUCIÓN

1. El volumen V_B de la playa es igual al número N de granos por el volumen de un grano V_G:
2. Usando la fórmula del volumen de una esfera, se calcula el volumen de un grano de arena:
3. Se despeja el número de granos. En nuestro cálculo los números tienen una cifra significativa únicamente, por lo que la respuesta también viene expresada con esta precisión:

$$V_B = NV_G$$

$$V_G = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$V_B = NV_G = N\frac{4}{3}\pi R^3$$

por lo tanto

$$N = \frac{3V_B}{4\pi R^3} = \frac{3(500 \text{ m})(100 \text{ m})(3 \text{ m})}{4\pi(0{,}5 \times 10^{-3} \text{ m})^3} = 2{,}9 \times 10^{14} \approx \boxed{3 \times 10^{14}}$$

COMPROBACIÓN Para comprobar la respuesta, divídase el volumen de la playa por el número de granos que se ha calculado. El resultado es $1{,}5 \times 10^5 \text{ m}^3 / 3 \times 10^{14}$ granos $= 5 \times 10^{-10} \text{ m}^3$/grano. Este resultado coincide con el volumen estimado de un grano de arena o $4/[3\pi(5 \times 10^{-4})^3]$.

OBSERVACIÓN Una forma de determinar el volumen del espacio entre los granos consiste en llenar un recipiente de un litro con arena seca. Una vez lleno echar agua en el recipiente hasta que la arena esté saturada de agua. Si suponemos que con 100 cm^3 de agua la arena del recipiente se satura, el volumen real de la arena es de 900 cm^3. Por lo tanto, hemos sobreestimado el número de granos de la playa. Teniendo en cuenta que la arena ocupa el 90% del volumen de su contenedor, en la playa hay un 90% de los granos calculados en el paso 3 de la solución del problema.

EJERCICIO PRÁCTICO 1.5 ¿Cuántos granos de arena hay en una playa que ocupa una zona de 2 km de longitud y de 500 m de anchura? *Suponer que la arena ocupa un espesor de 3,00 m y que el diámetro medio de los granos de sal es de 1,0 mm.*

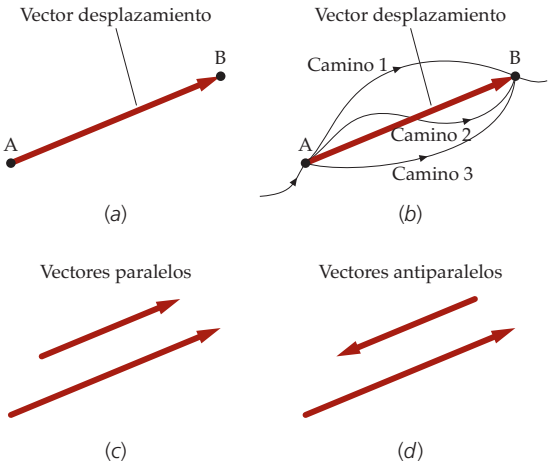


FIGURA 1.3 (*a*) Vector desplazamiento desde el punto A al punto B; (*b*) el mismo vector desplazamiento con tres caminos diferentes; (*c*) el mismo vector desplazamiento junto a un segundo vector desplazamiento paralelo pero de distinta longitud; (*d*) el mismo vector desplazamiento junto a un vector que es antiparalelo y que tiene distinta longitud.

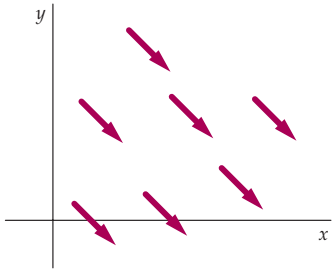


FIGURA 1.4 Los vectores son iguales si sus módulos y direcciones son los mismos. Todos los vectores de esta figura son iguales.

la posición de un objeto, aunque no representa el camino real que el objeto sigue. Por ejemplo, en la figura 1.3*b*, el mismo vector desplazamiento corresponde a los tres caminos distintos 1, 2 y 3 que unen el punto A con el B.

Si, tal como se muestra en la figura 1.3c, dos vectores desplazamiento tienen la misma dirección, son **paralelos**. Por el contrario, si tienen direcciones opuestas (figura 1.3*d*) son **antiparalelos**. Si dos vectores tienen el mismo módulo y la misma dirección se dice que son iguales. Gráficamente, esto significa que tienen la misma longitud y que son paralelos entre sí. Un vector puede dibujarse en distintos puntos siempre y cuando se dibuje con el módulo (la longitud) correcto y la dirección adecuada. Así, todos los vectores de la figura 1.4 son iguales. Si trasladamos o giramos el sistema de coordenadas, todos los vectores de la figura 1.4 permanecen iguales. Un *sistema de coordenadas* está formado por dos o tres ejes coordenados perpendiculares entre sí. Por tanto, un vector no depende del sistema de coordenadas utilizado para su representación (excepto los vectores de posición, que introduciremos en el capítulo 3).

SUMA Y SUSTRACCIÓN DE VECTORES

Supongamos que vamos de excursión a un bosque y que la figura 1.5 muestra nuestra trayectoria cuando nos movemos desde el punto P_1 hasta un segundo punto P_2 y luego a un tercer punto P_3. El desplazamiento de P_1 a P_2 viene representado por el vector $\vec{A}$ y el desplazamiento de P_2 a P_3 por $\vec{B}$. Obsérvese que el vector desplazamiento depende sólo de los puntos extremos y no de la trayectoria real que seguimos. El desplazamiento resultante de P_1 a P_3, llamado $\vec{C}$ es la suma de los dos desplazamientos sucesivos $\vec{A}$ y $\vec{B}$:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \qquad 1.1$$

La suma de los dos vectores se denomina suma, el **vector suma**, o la **resultante**.

El signo más en la ecuación 1.1 se refiere al proceso denominado adición de vectores. Determinamos la suma geométricamente, ya que se tienen en cuenta tanto el módulo como la dirección de los vectores. Dos vectores desplazamiento se suman gráficamente situando el origen de uno en el extremo del otro (figura 1.6). El vector resultante se extiende desde el origen del primer vector al extremo final del segundo. Este método para la suma de vectores se denomina "**uno a continuación del otro**".

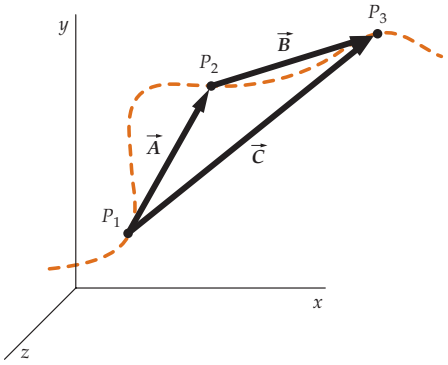


FIGURA 1.5

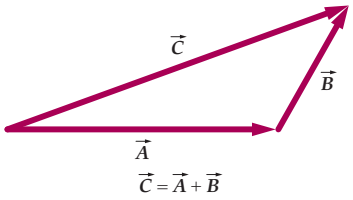


FIGURA 1.6 Método para la suma de vectores que consiste en situar los dos vectores uno a continuación del otro.

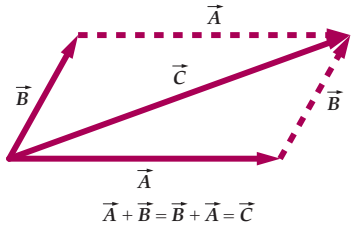


FIGURA 1.7 Método del paralelogramo para la suma de vectores.

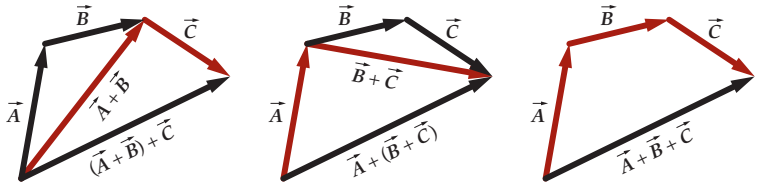


FIGURA 1.8 La suma de vectores es asociativa $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$.

Una forma equivalente de sumar vectores es el llamado **método del paralelogramo**, que consiste en desplazar $\vec{B}$ hasta que coincida su origen con el de $\vec{A}$ (figura 1.7). La diagonal del paralelogramo formado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es igual a $\vec{C}$. Como puede verse en la figura 1.7, no existe diferencia en el orden en que sumemos los vectores; es decir, $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$. Por lo tanto, la suma de vectores obedece la propiedad conmutativa.

La suma de más de dos vectores, por ejemplo $\vec{A}$, $\vec{B}$, y $\vec{C}$, se lleva a cabo sumando primero dos de ellos (figura 1.8) y sumando el resultado al tercero. El orden en que se agrupan los vectores para sumarlos no importa, ya que la suma de vectores es asociativa, es decir, $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$.

Si los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen el mismo módulo pero tienen la dirección opuesta, el vector $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ es un vector de módulo cero. Esto se puede demostrar utilizando el método geométrico para construir gráficamente el vector suma $\vec{A} + \vec{B}$. Cualquier vector de módulo cero se denomina vector $\vec{0}$. No tiene sentido hablar de la dirección de un vector de módulo cero, por lo que a lo largo de este libro no hablaremos ni usaremos notación vectorial para el vector cero. Por lo tanto, si $\vec{A} + \vec{B} = 0$, $\vec{B} = -\vec{A}$, y viceversa, donde el negativo de $\vec{A}$ se escribe como $-\vec{A}$. Por tanto, ambos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son uno el negativo del otro sólo si tienen el mismo módulo y direcciones opuestas.

La sustracción del vector $\vec{B}$ del $\vec{A}$, consiste en sumar a $\vec{A}$ el negativo de $\vec{B}$. El resultado es $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$ (figura 1.10a). Un método alternativo de sustraer $\vec{B}$ de $\vec{A}$ consiste en sumar $\vec{B}$ a los dos lados de la ecuación $\vec{C} = \vec{A} + (-\vec{B})$ con lo que se obtiene $\vec{B} + \vec{C} = \vec{A}$, y gráficamente sumar $\vec{B}$ con $\vec{C}$. Para ello, se dibuja $\vec{A}$ y $\vec{B}$ de modo que coincida su origen y luego se dibuja $\vec{C}$ del extremo de $\vec{B}$ al de $\vec{A}$.

> **!** Obsérvese que C no es igual a $A + B$ a menos que $\vec{A}$ y $\vec{B}$ estén en la misma dirección. Es decir, $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ no implica que $C = A + B$.

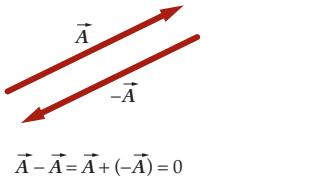


FIGURA 1.9

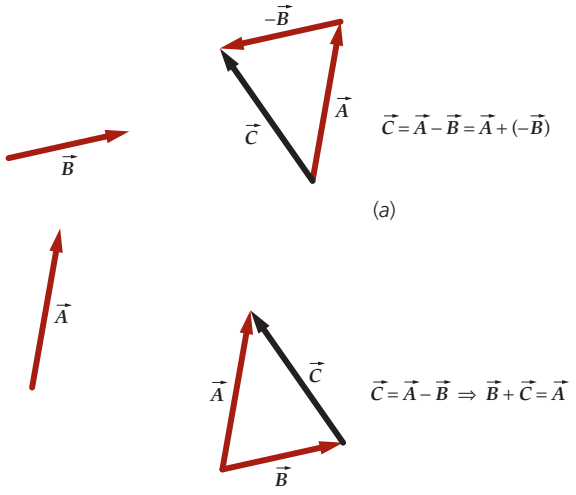


FIGURA 1.10 Formas alternativas de restar vectores. Sea $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$. (*a*) Para obtener $\vec{C}$, sumamos $-\vec{B}$ a $\vec{A}$. (*b*) Primero dibujamos $\vec{A}$ y $\vec{B}$ con sus extremos unidos. $\vec{C}$ es el vector que sumamos a $\vec{B}$ para obtener $\vec{A}$.

Ejemplo 1.8 Desplazamiento *Conceptual*

Una persona se mueve 3 km hacia el este y luego 4 km hacia el norte. ¿Cuál es el desplazamiento resultante?

PLANTEAMIENTO El desplazamiento de la persona es el vector que va desde la posición inicial a la posición final. Para encontrar el desplazamiento resultante, se suman gráficamente los dos vectores desplazamiento. Para dibujar la resultante con exactitud, usamos una escala tal que 1 cm corresponda a un desplazamiento de 1 km.

SOLUCIÓN

1. Sean $\vec{A}$ y $\vec{B}$ los desplazamientos de 3,00 km hacia el este y de 4 km hacia el norte, respectivamente, y sea $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$. Dibuje $\vec{A}$ y $\vec{B}$ con el origen de $\vec{B}$ en el extremo de $\vec{A}$, como se muestra en la figura 1.11. Usar la escala 1 cm = 1 km e incluir los ejes que señalan al norte y al este.
2. Determinar el módulo y la dirección de $\vec{C}$ usando el dibujo, teniendo en cuenta la escala 1 cm = 1 km, y un transportador.

La flecha que representa a $\vec{C}$ mide 5,00 cm, por lo que el módulo de $\vec{C}$ es de 5,00 km. La dirección de $\vec{C}$ es, aproximadamente, de 53° al noroeste.

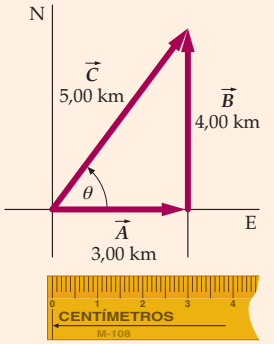


FIGURA 1.11

COMPROBACIÓN La distancia recorrida es 3,00 km + 4,00 km = 7,00 km y el módulo del desplazamiento neto es de 5 km. Este resultado es consistente con la frase "la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta". Igualmente, si nos movemos 3 km hacia el este y después 4 km hacia el norte es de esperar que estemos más de 45° al norte de nuestro punto de partida.

OBSERVACIÓN Un vector viene descrito por su módulo y dirección. En este ejemplo el desplazamiento resultante es un vector de longitud 5 km en una dirección 53,1° al norte del este.

PRODUCTO DE UN VECTOR POR UN ESCALAR

La expresión $3\vec{A}$, donde $\vec{A}$ es un vector arbitrario, corresponde a la suma $\vec{A} + \vec{A} + \vec{A}$, es decir, $\vec{A} + \vec{A} + \vec{A} = 3\vec{A}$. Un vector $\vec{A}$ multiplicado por un escalar s es el vector $\vec{B} = s\vec{A}$, que tiene de módulo $|s|A$ y es paralelo a $\vec{A}$ si s es positivo, y antiparalelo a $\vec{A}$ si s es negativo. Las dimensiones de sA son las de s multiplicadas por las de $\vec{A}$. (Además, dividir $\vec{A}$ por un escalar s equivale a multiplicar $\vec{A}$ por $1/s$.)

COMPONENTES DE UN VECTOR

La suma y la resta algebraica de vectores se lleva a cabo expresando los vectores en función de sus componentes. La **componente** de un vector a lo largo de una línea en el espacio es la longitud de la proyección del vector sobre dicha línea. Se obtiene trazando una línea perpendicular a la línea desde el extremo o flecha de un vector, como indica la figura 1.12. Cuando se determinan las componentes x, y y z de un

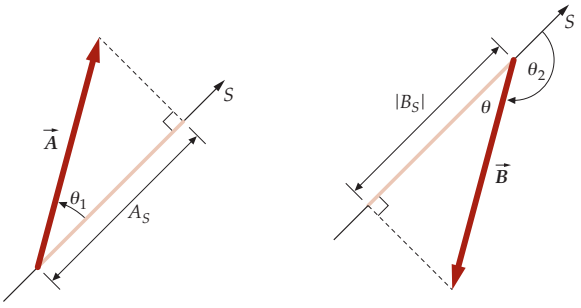


FIGURA 1.12 La componente de un vector en una dirección especificada es igual al módulo del vector multiplicado por el coseno del ángulo entre la dirección del vector y la dirección especificada. La componente del vector $\vec{A}$ en la dirección positiva de S es A_s siendo A_s positiva. La componente del vector $\vec{B}$ en la dirección positiva de S es B_s siendo B_s negativa.

Ejemplo 1.9 El mapa del tesoro — *Póngalo en su contexto*

Suponga que usted trabaja en un centro turístico en una isla tropical y está encargado de diseñar una actividad para los turistas de búsqueda de un tesoro. Dispone de un mapa que le indica las direcciones a seguir para enterrar un "tesoro" en un lugar determinado. Usted no desea malgastar el tiempo dando vueltas por la isla, porque quiere acabar pronto para ir a la playa y hacer surfing. Las instrucciones son ir 3,00 km en dirección hacia el nordeste 60° y después moverse 4,00 km en dirección noroeste con un ángulo de 40° respecto del oeste. ¿En qué dirección debe moverse y cuánto tendrá que caminar para cumplir su objetivo con la máxima rapidez? Determine la respuesta (*a*) gráficamente y (*b*) usando componentes vectoriales.

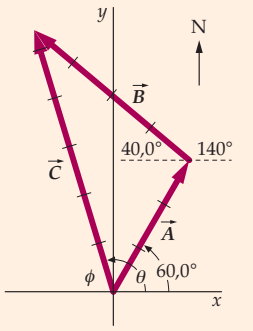


FIGURA 1.16

PLANTEAMIENTO En ambos casos hay que determinar la resultante del desplazamiento. En el apartado (*a*) use el método gráfico dibujando a escala cada uno de los desplazamientos y midiendo el desplazamiento resultante. Para el apartado (*b*) hay que descomponer cada vector en sus componentes individuales y utilizarlas para calcular el desplazamiento resultante.

SOLUCIÓN

(a) 1. Dibujamos el diagrama de suma de vectores a escala (figura 1.16). Primero trazamos los ejes coordenados correspondientes de modo que el eje x señale hacia el este y la dirección del eje y hacia el norte. A continuación, trazamos el primer vector desplazamiento $\vec{A}$ de 3,00 cm de largo formando un ángulo de 60° con el eje x, es decir, apuntando hacia el nordeste. Luego, a partir del extremo de $\vec{A}$ dibujamos el segundo vector $\vec{B}$ de 4,00 cm de largo, con un ángulo de 40° con la dirección oeste. (Necesitará un transportador para medir los ángulos). Finalmente, dibuje el vector resultante $\vec{C}$ uniendo el origen de $\vec{A}$ con el extremo de $\vec{B}$:

2. Determine la longitud de $\vec{C}$. Usando un transportador, mida el ángulo entre la dirección de $\vec{C}$ y la dirección -x:

$\vec{C}$ mide 5,40 cm de longitud. Por lo tanto, el módulo del desplazamiento resultante es de **5,40 km.** El ángulo entre el vector $\vec{C}$ y el eje $-x$ es, aproximadamente, de 73,2°. Por consiguiente, hay que caminar 5,40 km hacia el noroeste con un ángulo de **73,2° respecto a la dirección noroeste.**

(b) 1. Para resolver el problema utilizando las componentes vectoriales, sea $\vec{A}$ el primer desplazamiento y elegimos el eje x positivo en la dirección este y el eje y positivo en la dirección norte. Calculamos A_x y A_y de las ecuaciones 1.2 y 1.3:

$$A_x = (3{,}00\text{ km})\cos 60° = 1{,}50\text{ km}$$
$$A_y = (3{,}00\text{ km})\,\text{sen}\,60° = 2{,}60\text{ km}$$

2. De igual modo calculamos las componentes del segundo desplazamiento $\vec{B}$. El ángulo entre la dirección de $\vec{B}$ y la dirección $+x$ es 180,0° − 40,0° = 140°

$$B_x = (4{,}00\text{ km})\cos 140° = -3{,}06\text{ km}$$
$$B_y = (4{,}00\text{ km})\,\text{sen}\,140° = +2{,}57\text{ km}$$

3. Las componentes del desplazamiento resultante $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ se obtienen por suma:

$$C_x = A_x + B_x = 1{,}50\text{ km} - 3{,}06\text{ km} = -1{,}56\text{ km}$$
$$C_y = A_y + B_y = 2{,}60\text{ km} + 2{,}57\text{ km} = 5{,}17\text{ km}$$

4. El teorema de Pitágoras nos permite obtener la magnitud de $\vec{C}$:

$$C^2 = C_x^2 + C_y^2 = (-1{,}56\text{ km})^2 + (5{,}17\text{ km})^2 = 29{,}2\text{ km}^2$$
$$C = \sqrt{29{,}2\text{ km}^2} = \boxed{5{,}40\text{ km}}$$

5. El cociente entre C_y y C_x es igual a la tangente del ángulo θ entre $\vec{C}$ y la dirección positiva de x. Al hacer los cálculos vaya con cuidado, ya que al valor de arctg que le devuelve la calculadora podría tener que sumarle 180°:

$$\text{tg}\,\theta = \frac{C_y}{C_x} \quad \text{por lo tanto,}$$
$$\theta = \text{arctg}\,\frac{5{,}17\text{ km}}{-1{,}56\text{ km}} = \text{arctg}(-3{,}31)$$
$$= \text{o bien } -73{,}2° \quad \text{o} \quad (-73{,}2° + 180°)$$
$$= \text{o bien } -73{,}2° \quad \text{o} \quad +107°$$

6. C_y es positiva y C_x es negativa; por lo tanto, el ángulo θ nos lleva al segundo cuadrante:

$\theta =$ **107° en la dirección contraria a las agujas de un reloj**

$\phi =$ **73,2° hacia el noroeste**

COMPROBACIÓN El paso 4 del apartado (*b*) da de módulo 5,40 km y el apartado 6 concluye que la dirección es de 73,2° hacia el noroeste. Estos resultados están de acuerdo con los resultados del apartado (*a*) dentro de la exactitud de nuestras medidas.

OBSERVACIÓN Para especificar un vector se necesita saber el módulo y la dirección o todas sus componentes. En este ejemplo precisamente se ha practicado como calcularlas.

VECTORES UNITARIOS

Un vector unitario es un vector sin dimensiones de módulo unidad. El vector $\hat{\boldsymbol{A}} = \vec{\boldsymbol{A}}/A$ es un ejemplo de vector unitario que apunta en la dirección de $\vec{\boldsymbol{A}}$. Los vectores unitarios se escriben en negritas con un pequeño ángulo o acento circunflejo en su parte superior. Los vectores unitarios que apuntan en la direcciones x, y y z son adecuados para expresar los vectores en función de sus componentes rectangulares. Normalmente, se escriben $\hat{\boldsymbol{i}}$, $\hat{\boldsymbol{j}}$, y $\hat{\boldsymbol{k}}$, respectivamente. Así, el vector $A_x\hat{\boldsymbol{i}}$ tiene módulo $|A_x|$ y apunta en la dirección x positiva si A_x es positiva (o la dirección x negativa si A_x es negativo). Un vector A, en general, puede escribirse como suma de tres vectores, cada uno de ellos paralelo a un eje coordenado (figura 1.17):

$$\vec{\boldsymbol{A}} = A_x\hat{\boldsymbol{i}} + A_y\hat{\boldsymbol{j}} + A_z\hat{\boldsymbol{k}} \qquad 1.7$$

La suma de dos vectores $\vec{\boldsymbol{A}}$ y $\vec{\boldsymbol{B}}$ puede escribirse en función de vectores unitarios en la forma

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{A}} + \vec{\boldsymbol{B}} &= (A_x\hat{\boldsymbol{i}} + A_y\hat{\boldsymbol{j}} + A_z\hat{\boldsymbol{k}}) + (B_x\hat{\boldsymbol{i}} + B_y\hat{\boldsymbol{j}} + B_z\hat{\boldsymbol{k}}) \\ &= (A_x + B_x)\hat{\boldsymbol{i}} + (A_y + B_y)\hat{\boldsymbol{j}} + (A_z + B_z)\hat{\boldsymbol{k}} \qquad 1.8\end{aligned}$$

Las propiedades generales de los vectores se resumen en la tabla 1.4.

PROBLEMA PRÁCTICO 1.7
Dados dos vectores $\vec{\boldsymbol{A}} = (4{,}00\text{ m})\hat{\boldsymbol{i}} + (3{,}00\text{ m})\hat{\boldsymbol{j}}$ y $\vec{\boldsymbol{B}} = (2{,}00\text{ m})\hat{\boldsymbol{i}} - (3{,}00\text{ m})\hat{\boldsymbol{j}}$, determinar (*a*) A, (*b*) B, (*c*) $\vec{\boldsymbol{A}} + \vec{\boldsymbol{B}}$, y (*d*) $\vec{\boldsymbol{A}} - \vec{\boldsymbol{B}}$.

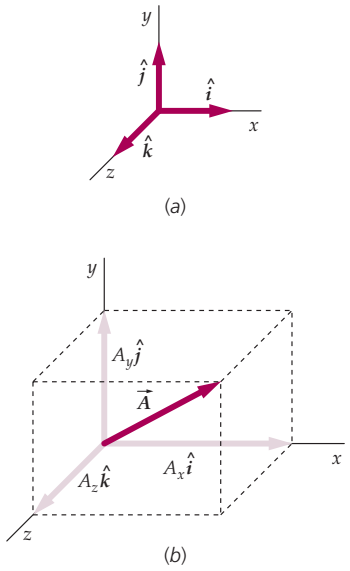
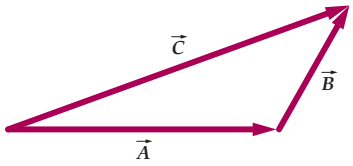
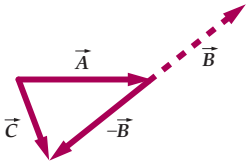


FIGURA 1.17 (*a*) Los vectores unitarios $\hat{\boldsymbol{i}}$, $\hat{\boldsymbol{j}}$, y $\hat{\boldsymbol{k}}$ en un sistema de coordenadas cartesiano (rectangular). (*b*) El vector $\vec{\boldsymbol{A}}$ en función de los vectores unitarios: $\vec{\boldsymbol{A}} = A_x\hat{\boldsymbol{i}} + A_y\hat{\boldsymbol{j}} + A_z\hat{\boldsymbol{k}}$.

Tabla 1.4 Propiedades de los vectores

Propiedad	Explicación	Figura	Representación de las componentes
Igualdad	$\vec{\boldsymbol{A}} = \vec{\boldsymbol{B}}$ si $\lvert\vec{\boldsymbol{A}}\rvert = \lvert\vec{\boldsymbol{B}}\rvert$ y sus direcciones y sentidos son iguales		$A_x = B_x$ $A_y = B_y$ $A_z = B_z$
Adición	$\vec{\boldsymbol{C}} = \vec{\boldsymbol{A}} + \vec{\boldsymbol{B}}$		$C_x = A_x + B_x$ $C_y = A_y + B_y$ $C_z = A_z + B_z$
Negativo de un vector	$\vec{\boldsymbol{A}} = -\vec{\boldsymbol{B}}$ si $\lvert\vec{\boldsymbol{B}}\rvert = \lvert\vec{\boldsymbol{A}}\rvert$ y su sentido es opuesto		$A_x = -B_x$ $A_y = -B_y$ $A_z = -B_z$
Sustracción	$\vec{\boldsymbol{C}} = \vec{\boldsymbol{A}} - \vec{\boldsymbol{B}}$		$C_x = A_x - B_x$ $C_y = A_y - B_y$ $C_z = A_z - B_z$
Multiplicación por un escalar	$\vec{\boldsymbol{B}} = s\vec{\boldsymbol{A}}$ tiene el módulo $\lvert\vec{\boldsymbol{B}}\rvert = \lvert s\rvert\lvert\vec{\boldsymbol{A}}\rvert$ y la misma dirección que $\vec{\boldsymbol{A}}$ si s es positivo o $-\vec{\boldsymbol{A}}$ si s es negativo		$B_x = sA_x$ $B_y = sA_y$ $B_z = sA_z$

El año 2005: bisiesto por un segundo

El calendario del año 2005 fue un segundo más largo de lo habitual. Ese año fue entonces bisiesto por un segundo. Este ajuste fue necesario para sincronizar dos sistemas de medir el tiempo, uno basado en la rotación de la Tierra y el otro basado en un grupo seleccionado de relojes atómicos.

A lo largo de la historia, la medida del tiempo se ha relacionado con la posición del Sol en el cielo, determinada por la rotación de la Tierra alrededor de su eje y por su movimiento de traslación alrededor del Sol. Este tiempo astronómico, denominado actualmente el Tiempo Universal (UT1), asumía que el movimiento de rotación de la Tierra es uniforme. Sin embargo, a medida que se ha dispuesto de métodos de medida más precisos se ha hecho patente que la velocidad de rotación de la Tierra presenta ligeras irregularidades, lo cual implica también que se da una cierta variabilidad en la unidad estándar de medida científica del tiempo, el segundo, definido como (1/60)(1/60)(1/24) de un día solar medio.

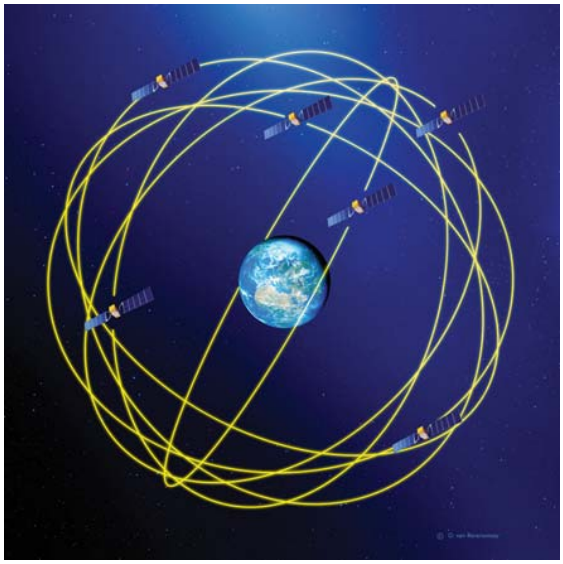
En 1955, el National Physical Laboratory en Gran Bretaña desarrolló el primer reloj atómico de cesio, un dispositivo que tenía una exactitud mucho mayor que cualquier otro reloj que hubiera existido antes. La medida del tiempo se convirtió en un proceso independiente de las observaciones astronómicas y, en consecuencia, se consiguió una definición de segundo mucho más precisa basada en la frecuencia de la radiación emitida durante la transición entre dos niveles de energía del átomo cesio-133. Sin embargo, el sistema más familiar UT1 sigue siendo importante para sistemas de navegación y astronómicos. Por ello, es importante que ambos sistemas de medir el tiempo se sincronicen.

Según el National Physical Laboratory, "…la solución adoptada para la sincronización ha sido construir una escala de tiempo atómica que sea la base para medir el tiempo denominada Tiempo Universal Coordinado (UTC). Esta escala combina la regularidad del tiempo atómico con la comodidad del UT1, y muchos países la han adoptado como la base legal para las medidas del tiempo."[1] La Oficina Internacional de Pesas y Medidas de Sèvres, Francia, recoge datos de un selección de laboratorios que miden el tiempo repartidos por todo el mundo para proporcionar el tiempo internacional estándar, UTC.

Cuando se dan pequeñas diferencias entre el UTC y el UT1 a causa de las fluctuaciones en la rotación de la Tierra (normalmente son retrasos), se añade un segundo para corregir el desajuste. Es un concepto similar a los años bisiestos que se usan para corregir el calendario. Efectivamente, un año no son exactamente 365 días sino 365,242 días. Para tener en cuenta el desfase producido al considerar el año de 365 días, cada cuatro años el calendario incluye un 29 de febrero.

Desde 1972, la medida del tiempo se realiza por medio de relojes atómicos, y desde entonces, en 23 ocasiones se ha añadido un segundo al tiempo UTC. Por un acuerdo internacional, se añade un segundo cuando la diferencia entre el UT1 y el UTC alcanza los 0,9 segundos. Previamente, la International Earth Rotation and Reference System (IERS) anuncia la necesidad de este cambio con unos meses de antelación.

En un año normal, el último segundo del año es el 23:59:59 UTC del 31 de diciembre, en tanto que el primer segundo del nuevo año es el 00:00:00 UTC del 1 de enero. Sin embargo, el año 2005 se añadió un segundo a la hora 23:59:59 UTC del 31 de diciembre, por lo que los relojes antes de cambiar a 00:00:00 UTC señalaron la hora 23:59:60 UTC.



El sistema de posicionamiento global, GPS, requiere que haya 24 satélites básicos en servicio al menos el 70% del tiempo. Cada satélite básico tiene una órbita con un periodo de 1/2 de un día sideral (1 día sideral = ~ 23 h 56 min) y con un radio aproximadamente igual a cuatro veces el radio terrestre. Hay 6 planos orbitales, inclinados 55° con respecto al plano ecuatorial de la Tierra, cada uno de los cuales tiene cuatro satélites básicos. Además, hay otros satélites GPS que se utilizan en órbitas de reserva cuando alguno de los satélites básicos falla. Cuando este apartado se escribió (mayo del 2006) había 29 satélites operacionales en órbita. *(Detlev Van Ravenswaay/Photo Researchers.)*

[1] http://www.npl.co.uk/time/leap_second.html

Resumen

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES
1. Unidades	Las **cantidades físicas** son números que se obtienen a partir de medidas de los objetos físicos. También se pueden definir de forma práctica a partir de operaciones y procedimientos que, si se siguen, las determinan sin ambigüedad.
2. Unidades fundamentales	Las unidades fundamentales del Sistema Internacional (SI) son el metro (m), el segundo (s), el kilogramo (kg), el kelvin (K), el ampere (A), el mol (mol) y la candela (cd). Las unidades de cualquier magnitud física se pueden expresar en función de estas unidades fundamentales.
3. Las unidades en las ecuaciones	Las unidades en las ecuaciones se tratan de igual modo que cualquier otra magnitud algebraica.
4. Conversión	Los **factores de conversión**, que son siempre igual a 1, proporcionan un método adecuado para convertir un tipo de unidad en otra.
5. Dimensiones	Los dos miembros de una ecuación deben tener las mismas dimensiones.
6. Notación científica	Por conveniencia, los números muy grandes y muy pequeños se escriben por medio de un factor que multiplica a una potencia de 10.
7. Exponentes	
Multiplicación	Al multiplicar dos números, los exponentes se suman.
División	Al dividir dos números, los exponentes se restan.
Potencia	Cuando un número que contiene un exponente se eleva a otro exponente, los exponentes se multiplican.
8. Cifras significativas	
Multiplicación y división	El número de cifras significativas en el resultado de una multiplicación o división nunca será mayor que el menor número de cifras significativas de cualquiera de los factores.
Adición y sustracción	El resultado de la suma o resta de dos números no tiene cifras significativas más allá de la última cifra decimal en que ambos números originales tienen cifras significativas.
9. Orden de magnitud	Un número redondeado a la potencia más próxima de 10 se denomina orden de magnitud. El orden de magnitud puede estimarse mediante hipótesis razonables y cálculos simples.
10. Vectores	
Definición	Los vectores son magnitudes que tienen módulo y dirección. Se suman como los desplazamientos.
Componentes	La componente de un vector a lo largo de una línea en el espacio es su proyección sobre dicha línea. Si $\vec{A}$ forma un ángulo θ con el eje x, sus componentes x e y son $A_x = A\cos\theta$ (1.2) $A_y = A\,\text{sen}\,\theta$ (1.3)
Módulo	$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ (1.5*a*)
Suma gráfica de vectores	Dos vectores cualesquiera cuyos módulos poseen las mismas unidades pueden sumarse gráficamente situando la cola de la flecha que representa a uno de ellos en el extremo o cabeza del otro.
Suma de vectores mediante componentes	Si $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$, entonces $C_x = A_x + B_x$ (1.6*a*) y $C_y = A_y + B_y$ (1.6*b*)
Vectores unitarios	Un vector $\vec{A}$ puede escribirse en función de los vectores unitarios $\hat{i}$, $\hat{j}$, y $\hat{k}$, de módulo unidad, dirigidos a lo largo de los ejes x, y y z, respectivamente $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ (1.7)

Respuestas a las comprobaciones conceptuales

1.1 5

Respuestas a los problemas prácticos

1.1 (*a*) 300 ns, (*b*) 40 Mm

1.2 (*a*) 0,05, (*b*) 3,9, (*c*) 0,003

1.3 $2{,}39 \times 10^2$

1.4 $3{,}2 \times 10^5$ años

1.5 $\approx 6 \times 10^{15}$

1.6 $A_x = -17{,}3$ km, $A_y = 10{,}0$ km

1.7 (*a*) $A = 5{,}00$ m, (*b*) $B = 3{,}61$ m, (*c*) $\vec{A} + \vec{B} = (6{,}00\text{ m})\hat{i}$, (*d*) $\vec{A} - \vec{B} = (2{,}00\text{ m})\hat{i} + (6{,}00\text{ m})\hat{j}$

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben aportarse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

En los datos numéricos sin coma decimal se deben considerar significativos todos los dígitos, incluidos los ceros a la derecha del último diferente de cero.

- • Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil
- •• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
- ••• Desafiante, para alumnos avanzados
- SSM La solución se encuentra en el *Manual de soluciones*

Los problemas consecutivos que están sombreados son problemas relacionados.

PROBLEMAS CONCEPTUALES

1 • ¿Cuál de las siguientes magnitudes físicas no es una de las fundamentales del Sistema Internacional (SI)? (*a*) Masa. (*b*) Longitud. (*c*) Energía. (*d*) Tiempo. (*e*) Todas ellas son magnitudes físicas fundamentales. SSM

2 • Al hacer un cálculo, el resultado final tiene las dimensiones m/s en el numerador y m/s^2 en el denominador. ¿Cuáles son las unidades finales? (*a*) m^2/s^3, (*b*) 1/s, (*c*) s^3/m^2, (*d*) s, (*e*) m/s.

3 • El prefijo giga significa: (*a*) 10^3, (*b*) 10^6, (*c*) 10^9, (*d*) 10^{12}, (*e*) 10^{15}.

4 • El prefijo mega significa: (*a*) 10^{-9}, (*b*) 10^{-6}, (*c*) 10^{-3}, (*d*) 10^6, (*e*) 10^9.

5 • Demostrar que un pie equivale a 30,48 cm. ¿Cuántos centímetros hay en una milla? SSM

6 • El número 0,000 513 0 tiene _____ cifras significativas. (*a*) una, (*b*) tres, (*c*) cuatro, (*d*) siete, (*e*) ocho.

7 • El número 23,0040 tiene _____ cifras significativas. (*a*) dos, (*b*) tres, (*c*) cuatro, (*d*) cinco, (*e*) seis.

8 • Una fuerza tiene dimensiones de masa por aceleración. La aceleración tiene dimensiones de velocidad dividida por tiempo. La presión es una fuerza dividida por un área. ¿Cuáles son las dimensiones de la presión?

9 • Verdadero o falso: para multiplicar dos magnitudes es condición necesaria que tengan las mismas dimensiones.

10 • Un vector tiene la componente *x* negativa y la componente *y* positiva. Su ángulo medido en la dirección contraria a las agujas del reloj desde el eje *x* está (*a*) entre cero y 90 grados, (*b*) entre 90 y 180 grados, (*c*) más allá de los 180 grados.

11 • Un vector $\vec{A}$ señala en la dirección positiva del eje *x*. Mostrar gráficamente tres posibles elecciones para un vector $\vec{B}$ de forma que $\vec{B} + \vec{A}$ señale en la dirección positiva del eje *y*. SSM

12 • Un vector $\vec{A}$ señala en la dirección positiva del eje *y*. Mostrar gráficamente tres elecciones para un vector $\vec{B}$ de forma que $\vec{B} - \vec{A}$ señale en la dirección positiva del eje *x*.

13 • ¿Es posible que tres vectores del mismo módulo sumen cero? Si lo es, muestre la respuesta gráficamente. En caso contrario, explique por qué no es posible. SSM

CÁLCULO Y APROXIMACIONES

14 • El ángulo subtendido por el diámetro de la Luna en un punto de la Tierra es aproximadamente 0,524° (figura 1.18). Con este dato y sabiendo que la Luna dista 384 Mm de la Tierra, hallar su diámetro. (El ángulo θ subtendido por la Luna es, aproximadamente, igual a D/r_l, donde *D* es el diámetro de la Luna y r_l es la distancia a la misma.)

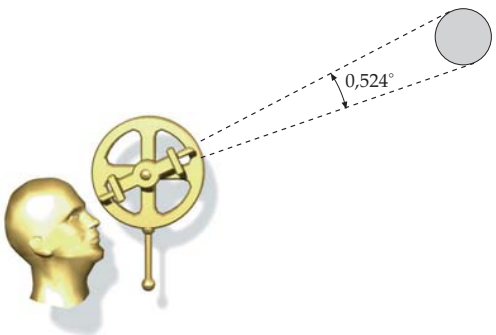
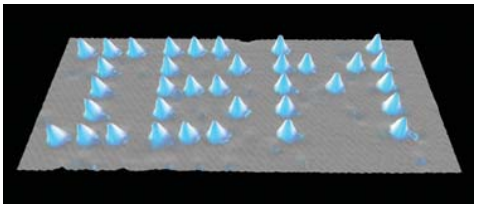


FIGURA 1.18 Problema 14

15 • **APLICACIÓN BIOLÓGICA** Si se supone que el cuerpo humano está formado esencialmente de agua se puede hacer una sencilla estimación. La masa de una molécula de agua es $29{,}9 \times 10^{-27}$ kg. Estimar las moléculas de agua que forman una persona de 60 kg de masa. SSM

16 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** En 1989, científicos de la compañía IBM consiguieron mover átomos con un microscopio de barrido de efecto tunel (STM). El público pudo apreciar esta tecnología cuando vio las letras IBM formadas a partir de átomos de xenon sobre una superficie de niquel. Las letras IBM se extendían una distancia que equivalía a unos 15 átomos de xenon. Si el espacio entre los centros de átomos de xenon adyacentes es de 5 nm (5×10^{-9} m), estimar cuántas veces puede escribirse la palabra "IBM" en una página de 21,6 cm de ancho.



(Gentileza de IBM Reasearch, Almaden Research Center.)

17 •• Se ha debatido públicamente con frecuencia cuáles son las consecuencias ambientales de usar pañales desechables o pañales reutilizables de tela. (*a*) Supóngase que un bebé, desde que nace y hasta los 2,5 años, usa tres pañales al día. Estimar cuántos pañales desechables se usan cada año en los Estados Unidos. (*b*) Calcular el volumen de vertedero ocupado por los pañales, suponiendo que 1000 kg de estos residuos ocupan 1 m^3. (*c*) Calcular la superficie que ocuparían anualmente estos residuos si se supone que necesitan una profundidad media en el vertedero de 10 m.

18 •• (*a*) Estimar cuántos litros de gasolina usan los automóviles cada día en los Estados Unidos y el coste asociado. (*b*) Si de un barril de crudo se obtienen 73,45 L de gasolina, calcular cuántos barriles de petróleo deben importarse en un año en los Estados Unidos para fabricar la gasolina necesaria para la automoción. ¿Cuántos barriles por día supone esta cifra?

19 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un megabyte (MB) es una unidad de almacenamiento en la memoria de los ordenadores. Un CD tiene una capacidad de almacenamiento de 700 MB y puede almacenar 70 minutos de música de alta calidad. (*a*) Si una canción típica dura 5 minutos, ¿cuántos megabytes ocupa una canción? (*b*) Si una página de texto impreso ocupa aproximadamente 5 kilobytes, estimar cuántas novelas se pueden guardar en un CD. SSM

UNIDADES

20 • Expresar las siguientes magnitudes usando los prefijos que se recogen en la tabla 1.1 y las abreviaturas de la página 5 (tabla 1.1); por ejemplo, 10 000 metros = 10 km. (*a*) 1 000 000 watts, (*b*) 0,002 gramos, (*c*) 3×10^{-6} metros, (*d*) 30 000 segundos.

21 • Escribir cada una de las siguientes magnitudes sin usar prefijos: (*a*) 40 μW, (*b*) 4 ns, (*c*) 3 MW, (*d*) 25 km.

22 • Escribir las siguientes magnitudes (que no se expresan en unidades del SI) usando prefijos (pero no sus abreviaturas). Por ejemplo, 10^3 metros = 1 kilómetro: (*a*) 10^{-12} abucheos, (*b*) 10^9 mugidos, (*c*) 10^{-6} teléfonos, (*d*) 10^{-18} chicos, (*e*) 10^6 teléfonos, (*f*) 10^{-9} cabras, (*g*) 10^{12} toros.

23 •• En las ecuaciones siguientes, la distancia x está en metros, el tiempo t en segundos y la velocidad v en metros por segundo. ¿Cuáles son las unidades del SI de las constantes C_1 y C_2? (*a*) $x = C_1 + C_2 t$, (*b*) $x = \frac{1}{2} C_1 t^2$, (*c*) $v^2 = 2C_1 x$, (*d*) $x = C_1 \cos C_2 t$, (*e*) $v^2 = 2C_1 v - (C_2 x)^2$. SSM

24 •• Si en el problema 23 se expresa x en pies, t en segundos y v en pies por segundo, ¿cuáles son las dimensiones de las constantes C_1 y C_2?

CONVERSIÓN DE UNIDADES

25 • **MÚLTIPLES PASOS** A partir de la definición original de metro en función de la distancia del Ecuador al polo Norte hallar en metros (*a*) la circunferencia de la Tierra y (*b*) el radio de la Tierra. (*c*) Convertir las respuestas dadas en (*a*) y (*b*) de metros a millas.

26 • La velocidad del sonido en el aire es 343 m/s. ¿Cuál es la velocidad de un avión supersónico que se mueve con una velocidad doble a la del sonido? Dar la respuesta en kilómetros por hora y millas por hora.

27 • Un jugador de baloncesto tiene una altura de 6 ft y 10,5 in. ¿Cuál es su altura en centímetros?

28 • Completar las siguientes igualdades: (*a*) 100 km/h = _____ mi/h, (*b*) 60 cm = _____ in, (*c*) 100 yd = _____ m.

29 • La mayor separación entre dos soportes del puente Golden Gate es de 4200 pies. Expresar esta distancia en kilómetros.

30 • Hallar el factor de conversión para convertir millas por hora en kilómetros por hora.

31 • Completar las siguientes expresiones: (*a*) $1{,}296 \times 10^5$ km/h² = _____ km/(h · s), (*b*) $1{,}296 \times 10^5$ km/h² = _____ m/s², (*c*) 60 mi/h = _____ ft/s, (*d*) 60 mi/h = _____ m/s.

32 • Una milla cuadrada tiene 640 acres. ¿Cuántos metros cuadrados tiene un acre?

33 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Supongamos que usted es un repartidor de una compañía que comercializa agua mineral. Su camión transporta 4 palés cada uno de los cuales contiene 60 cajas de agua. Cada caja contiene 24 botellas de agua de un litro y la carretilla que usa para transportar el agua a los comercios tiene un límite de peso de 250 lb (114 kg.) (*a*) Si un mililitro de agua tiene una masa de 1 g, y un kilogramo pesa 2,2 libras, ¿cuál es el peso en libras de toda el agua del camión? (*b*) ¿Cuántas cajas llenas de agua puede transportar en la carretilla? SSM

34 •• Un cilindro circular recto tiene un diámetro de 6,8 in y una altura de 2 ft. ¿Cuál es el volumen del cilindro en (*a*) pies cúbicos, (*b*) metros cúbicos, (*c*) litros?

35 •• En las siguientes expresiones, x está en metros, t en segundos, v en metros por segundo y la aceleración a en metros por segundo cuadrado. Determinar las unidades del SI de cada combinación: (*a*) v^2/x, (*b*) $\sqrt{x/a}$, (*c*) $\frac{1}{2} a t^2$. SSM

DIMENSIONES DE LAS MAGNITUDES FÍSICAS

36 • ¿Cuáles son las dimensiones de las constantes que aparecen en cada uno de los apartados del problema 23?

37 • La ley de desintegración radiactiva es $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, donde N_0 es el número de núcleos radiactivos en el instante $t = 0$, $N(t)$ es el número que permanece sin desintegrar en el tiempo t, y λ es la llamada constante de desintegración. ¿Qué dimensiones tiene λ?

38 •• La unidad del SI de fuerza, el kilogramo-metro por segundo cuadrado $(\text{kg} \cdot \text{m/s}^2)$, se denomina newton (N). Hallar las dimensiones y las unidades del SI de la constante G en la ley de Newton de la gravitación $F = Gm_1 m_2 / r^2$.

39 •• Cuando un muelle se estira una distancia x a partir de su posición de equilibrio, el módulo de la fuerza (F) viene dado por $F = kx$ (ley de Hooke). (*a*) ¿Cuáles son las dimensiones de la constante k? (*b*) ¿Cuáles son las dimensiones y las unidades SI de kx^2?

40 •• Demostrar que el producto de la masa por la aceleración y la velocidad tiene las dimensiones de una potencia.

41 •• El momento lineal o ímpetu de un objeto es el producto de su masa por su velocidad. Demostrar que esta magnitud tiene las dimensiones de una fuerza multiplicada por el tiempo. SSM

42 •• ¿Qué combinación de la fuerza y otra magnitud física tiene las dimensiones de la potencia?

43 •• Cuando un objeto cae a través del aire, se produce una fuerza de arrastre que depende del producto del área superficial del objeto y del cuadrado de su velocidad, es decir, $F_{\text{aire}} = CAv^2$, donde C es una constante. Determinar las dimensiones de C. SSM

44 •• La tercera ley de Kepler relaciona el periodo de un planeta con su radio r, la constante G de la ley de gravitación de Newton ($F = Gm_1m_2/r^2$), y la masa del Sol, M_S. ¿Qué combinación de estos factores ofrece las dimensiones correctas para el periodo de un planeta?

NOTACIÓN CIENTÍFICA Y CIFRAS SIGNIFICATIVAS

45 • Expresar los siguientes números como números decimales sin utilizar la notación de potencias de diez: (*a*) 3×10^4, (*b*) $6{,}2 \times 10^{-3}$, (*c*) 4×10^{-6}, (*d*) $2{,}17 \times 10^5$. SSM

46 • Escribir en notación científica los siguientes valores: (*a*) 1 345 100 m = _____ km, (*b*) 12 340 kW = _____ MW, (*c*) 54,32 ps = _____ s, (*d*) 3,0 m = _____ mm.

47 • Realizar las siguientes operaciones, redondeando hasta el número correcto de cifras significativas, y expresar el resultado en notación científica: (*a*) $(1{,}14)(9{,}99 \times 10^4)$, (*b*) $(2{,}78 \times 10^{-8}) - (5{,}31 \times 10^{-9})$, (*c*) $12\pi/(4{,}56 \times 10^{-3})$, (*d*) $27{,}6 + (5{,}99 \times 10^2)$. SSM

48 • Efectuar las siguientes operaciones redondeando al número correcto de cifras significativas y expresando el resultado en notación científica: (*a*) (200,9)(569,3), (*b*) (0,000 000 513) $(62{,}3 \times 10^7)$, (*c*) $28{,}401 + (5{,}78 \times 10^4)$, (*d*) $63{,}25/(4{,}17 \times 10^{-3})$.

49 • **APLICACIÓN BIOLÓGICA** Una membrana celular posee un espesor de 7 nm. ¿Cuántas membranas de este espesor deberían apilarse para conseguir una altura de 1 pulgada? SSM

50 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Hay que perforar un agujero circular de $8{,}470 \times 10^{-1}$ cm de radio en el panel frontal de un monitor. La *tolerancia* es de $1{,}0 \times 10^{-3}$ cm, lo cual significa que el radio del agujero real no puede diferir en una magnitud superior a esta cantidad. Si el agujero real excede al radio deseado precisamente en el margen de tolerancia, ¿cuál es la diferencia entre el área real del agujero y el área requerida para el mismo?

51 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un taco cuadrado debe ajustarse a un orificio de forma cuadrada. El lado del taco mide 42,9 mm y el del orificio 43,2 mm. (*a*) ¿Cuál es el área del espacio entre el taco y el orificio? (*b*) Si se hace el taco de forma rectangular limando 0,10 mm de material de un lado, ¿cuál es ahora el área vacia entre el taco y el orificio? SSM

VECTORES Y SUS PROPIEDADES

52 • **MÚLTIPLES PASOS** Se suman dos vectores de 7,0 y 5,5 unidades de longitud. El resultado es un vector de 10,0 unidades. (*a*) Mostrar gráficamente al menos una forma mediante la cual puede llevarse a cabo la suma. (*b*) Use el diagrama del apartado anterior para determinar el ángulo entre los dos vectores originales.

53 • Determinar las componentes x e y de los tres vectores siguientes del plano xy. (*a*) Un vector desplazamiento de 10 m que forma un ángulo de 30° en la dirección de las agujas de un reloj con la dirección positiva del eje y. (*b*) Un vector velocidad de 25 m/s que forma un ángulo de 40° contrario a las agujas del reloj con la dirección $-x$. (*c*) Un vector fuerza de 40 lb que forma un ángulo de 120° en la dirección contraria a las agujas de un reloj con la dirección $-y$. SSM

54 • Reescriba los vectores siguientes en función de su magnitud y su ángulo (en el sentido contrario a las agujas del reloj con respecto a la dirección $+x$). (*a*) Un vector desplazamiento con 8,5 m de componente x, y $-5{,}5$ m de componente y. (*b*) Un vector velocidad con -75 m/s de componente x y 35 m/s de componente y. (*c*) Un vector fuerza de 50 lb de módulo situado en el tercer cuadrante con una componente x cuyo módulo es de 40 lb.

55 • **CONCEPTUAL** Una persona camina 100 m siguiendo una línea recta sobre el plano horizontal. Si la persona se mueve 50 m hacia el este, ¿cuáles son los movimientos posibles de la persona hacia el norte o hacia el sur? ¿Cuáles son los ángulos posibles con respecto de la dirección este que el camino recorrido por la persona puede haber alcanzado?

56 • **APROXIMACIÓN** El destino final de un paseo está a 300 m en la dirección este considerada a partir del punto de partida. La primera etapa coincide con el paseo descrito en el problema anterior. La segunda etapa se desarrolla a lo largo de una línea recta. Estimar gráficamente la longitud y dirección de esta segunda etapa.

57 •• Dados los vectores siguientes: $\vec{A} = 3{,}4\hat{i} + 4{,}7\hat{j}$, $\vec{B} = (-7{,}7)\hat{i} + 3{,}2\hat{j}$, y $\vec{C} = 5{,}4\hat{i} + (-9{,}1)\hat{j}$. (*a*) Determinar el vector $\vec{D}$ en función de los vectores unitarios, de modo que $\vec{D} + 2\vec{A} - 3\vec{C} + 4\vec{B} = 0$. (*b*) Expresar la respuesta del apartado anterior en función del módulo y del ángulo con respecto a la dirección positiva del eje x.

58 •• Dados los vectores siguientes: $\vec{A}$ de 25 lb de módulo y que forma un ángulo de 30° en el sentido de las agujas del reloj con la dirección positiva del eje x, y $\vec{B}$ de 42 lb de módulo y que forma un ángulo de 50° en el sentido de las agujas del reloj con la dirección positiva del eje y, (*a*) construir un esquema y estimar visualmente el módulo y el ángulo del vector $\vec{C}$ de forma que $2\vec{A} + \vec{C} - \vec{B}$ sea un vector de 35 lb de módulo orientado según la dirección positiva del eje x. (*b*) Repetir el cálculo del apartado (*a*) usando el método de las componentes y comparar el resultado con el estimado a partir del apartado (*a*).

59 •• Expresar en función de $\hat{i}$ y $\hat{j}$ el vector de módulo unidad opuesto a la dirección de cada uno de los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ del problema 57. SSM

60 •• Los vectores unitarios $\hat{i}$ y $\hat{j}$ señalan al este y al norte, respectivamente. Calcular expresándolo en función de ellos, el vector unitario en las direcciones siguientes: (*a*) nordeste (*b*) 70° en la dirección de las agujas del reloj contados a partir de la dirección del eje $-y$; (*c*) sudoeste.

PROBLEMAS GENERALES

61 • En las misiones *Apolo* a la Luna durante los años 60 y 70, el viaje de la Tierra a la Luna duraba unos tres días desde el momento en que la cápsula abandonaba la órbita terrestre. Estimar la velocidad media del vehículo espacial en kilómetros por hora, millas por hora y metros por segundo. SSM

62 • Muchas de las carreteras de Canadá limitan la velocidad de los vehículos a 100 km/h. ¿Cuál es la velocidad límite en mi/h?

63 • Contando dólares a razón de 1 $ por segundo, ¿cuántos años necesitaríamos para contar 1000 millones de dólares?

64 • (*a*) La velocidad de la luz en el vacío es 186 000 mi/s = 3×10^8 m/s. Utilizar este dato para hallar el número de kilómetros que tiene una milla. (*b*) El peso de un pie cúbico de agua es 62,4 libras y 1,00 pie = 30,5 cm. Utilizar este dato y el hecho de que 1 cm^3 de agua tiene una masa de 1 g para hallar el peso en libras de 1 kg de masa.

65 • La masa de un átomo de uranio es $4{,}0 \times 10^{-26}$ kg. ¿Cuántos átomos de uranio hay en 8 g de uranio puro?

66 •• Durante una tormenta cae un total de 1,4 pulgadas de lluvia. ¿Cuánta agua ha caído sobre un acre de tierra? (1 mi^2 = 640 acres.) Expresar la respuesta en: (*a*) pugadas cúbicas, (*b*) pies cúbicos, (*c*) metros cúbicos, y (*d*) kilogramos. Obsérvese que la densidad del agua es 1000 kg/m^3.

67 •• Un núcleo de hierro tiene un radio de $5{,}4 \times 10^{-15}$ m y una masa de $9{,}3 \times 10^{-26}$ kg. (*a*) ¿Cuál es su masa por unidad de volumen en kilogramos por metro cúbico? (*b*) Si la Tierra tuviera la misma masa por unidad de volumen, ¿cuál sería su radio? (La masa de la Tierra es $5{,}98 \times 10^{24}$ kg.)

68 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** La compañía canadiense Canadian Norman Wells Oil Pipeline opera desde Norman Wells, en los Territorios del Noroeste, hasta Zama, en Alberta. El oleoducto de $8{,}68 \times 10^5$ m de longitud tiene un diámetro interno de 12 pulgadas y puede transportar petróleo a 35 L/s. (*a*) Si en un determinado momento el oleoducto está lleno, ¿cuál es el volumen total de petróleo en la instalación? (*b*) Si inicialmente el oleoducto estaba vacío, ¿cuánto tiempo cuesta llenarlo?

69 •• La unidad astronómica (UA) se define como la distancia media de la Tierra al Sol, a saber, $1{,}496 \times 10^{11}$ m. El parsec es la longitud radial desde la cual una UA de longitud de arco subtiende un ángulo de 1 segundo. El año luz es la distancia que la luz recorre en un año. (*a*) ¿Cuántos parsecs están contenidos en una unidad astronómica? (*b*) ¿Cuántos metros tiene un parsec? (*c*) ¿Cuántos metros existen en un año luz? (*d*) ¿Cuántas unidades astronómicas existen en un año luz? (*e*) ¿Cuántos años luz contiene un parsec?

70 •• Para que el universo deje algún día de expansionarse y comience a contraerse, su densidad media debe ser al menos de 6×10^{-27} kg/m^3. (*a*) ¿Cuántos electrones por metro cúbico deberían existir en el universo para alcanzar esta densidad crítica? (*b*) ¿Cuántos protones por metro cúbico producirían la densidad crítica? ($m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg; $m_p = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg.)

71 ••• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO, APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, HOJA DE CÁLCULO** Imagínese que usted es un astronauta que realiza experimentos de física en la Luna. En uno de estos experimentos analiza la caída de varios objetos, desde el reposo, y relaciona la distancia caída y con el tiempo t. Para una moneda ha obtenido los siguientes resultados

(*a*) y (m)	10	20	30	40	50
(*b*) t (s)	3,5	5,2	6,0	7,3	7,9

Usted espera obtener una relación general entre la distancia y y el tiempo t de la forma $y = Bt^C$, donde B y C son constantes que hay que determinar experimentalmente. Para ello, (*a*) represente los datos en un gráfico logarítmico (log-log), representando log(y)(ordenadas) respecto log(t)(abscisas). (*b*) Demuestre que si se toman logaritmos en la expresión $y = Bt^C$, se obtiene log(y) = log (B) + C log(t). (*c*) Compare esta relación lineal con el gráfico de los datos y estime los valores de B y C. (*d*) Si se deja caer una moneda desde 1,0 m de altura, ¿cuánto tiempo tardará en llegar al suelo? (*e*) En el capítulo siguiente se verá como la relación entre y y t es $y = 1/2at^2$, donde a es la aceleración del objeto. ¿Cuál es la aceleración de los objetos que caen en la Luna? SSM

72 ••• **HOJA DE CÁLCULO** El valor de las acciones de una compañía que cotiza en el mercado de valores varía dependiendo del mercado y del tipo de actividad de la empresa y, aparentemente, puede ser muy impredecible, pero la gente a menudo intenta encontrar patrones del comportamiento en bolsa de los valores a partir de fórmulas matemáticas. El valor de las acciones de una compañía de ingeniería de materiales denominada Corning, situada en el estado de Nueva York, cada día 3 de agosto, cada cinco años en el periodo 1981 – 2001 evoluciona según la tabla. Supongamos que el precio P de las acciones (en dólares) sigue una ley de potencias $P = Bt^C$, donde t se expresa en años. (*a*) Evalúe las constantes B y C (véase el método sugerido en el problema anterior). (*b*) De acuerdo con esta ley de potencias, ¿cuál fue el precio de las acciones de la compañía el 3 de agosto del año 2000? (El precio alcanzado en realidad fue 82,83 $.)

(*a*) Precio (en dólares)	2,10	4,19	9,14	10,82	16,85
(*b*) Años desde 1980	1	6	11	16	21

73 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** El detector japonés de neutrinos Super-Kamiokande está formado por un largo cilindro transparente de 39,3 m de diámetro y 41,4 m de alto, relleno de agua extremadamente pura. Calcular la masa de agua que hay en el interior del cilindro. ¿Se corresponde la cifra obtenida con el dato que consta en el sitio web oficial del Super-K, según el cual el detector contiene 50 000 toneladas de agua? Densidad del agua: 1000 kg/m^3. SSM

74 ••• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Imagínese que va de excursión con un amigo a una zona llana y que deciden estimar la altura del pico de una montaña distante (figura 1.19) y la distancia horizontal que hay que caminar hasta el pico. Para ello, desde el punto en que están, miden que el ángulo que forma con la horizontal la línea imaginaria que apunta hacia el pico es de 7,5° y que la misma línea está orientada 13° hacia el este. Mientras que usted se queda en el punto de observación, su amigo camina en dirección oeste 1,5 km. Desde la nueva posición su amigo sitúa el pico y observa que la línea imaginaria que apunta hacia el pico forma un ángulo de 15° con el norte. ¿Calcule a qué distancia está la montaña de su posición y qué altura tiene el pico?

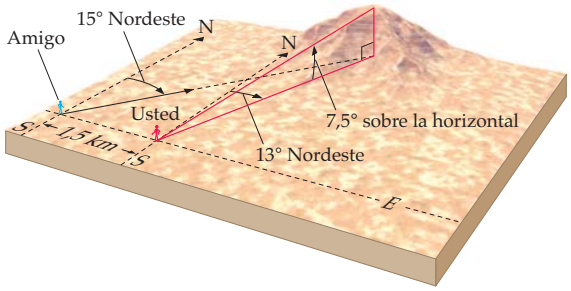


FIGURA 1.19 Problema 74

75 ••• **HOJA DE CÁLCULO** La tabla adjunta da el periodo T y el radio r de las órbitas correspondientes a los movimientos de cuatro satélites que giran alrededor de un asteroide pesado y denso. (*a*) Estos datos se relacionan mediante la fórmula $T = Cr^n$. Hallar C y n. (*b*) Se descubre un quinto satélite que tiene un periodo de 6,20 años. Determinar la órbita de este satélite que se ajuste a la misma fórmula.

(*a*) Periodo T, años	0,44	1,61	3,88	7,89
(*b*) Radio r, Gm	0,088	0,208	0,374	0,600

76 ••• **MÚLTIPLES PASOS** El periodo T de un péndulo simple depende de la longitud L del péndulo y de la aceleración g de la gravedad (dimensiones L/T^2). (*a*) Hallar una combinación sencilla de L y g que tenga las dimensiones de tiempo. (*b*) Comprobar la dependencia existente entre el periodo T y la longitud L midiendo el periodo (tiempo para una ida y vuelta completa) de un péndulo para dos valores diferentes de L. (*c*) En la fórmula correcta que relaciona T con L y g interviene una constante que es un múltiplo de π y que no puede obtenerse mediante el análisis dimensional de la parte (*a*). Puede hallarse experimentalmente como en la parte (*b*) si se conoce g. Utilizando el valor $g = 9{,}81$ m/s^2 y los resultados experimentales de la parte (*b*), hallar la fórmula que relaciona T con L y g.

77 ••• Un trineo está en reposo y tres amigos tiran de él sin conseguir moverlo. Paul tira en dirección nordeste con una fuerza de 50 lb. Johnny estira con una fuerza de 65 lb con un ángulo de 35° en dirección sudoeste y Connie tira del trineo con una fuerza que queremos determinar. (*a*) Expresar la fuerza ejercida tanto por Paul como por Johnny en función de los vectores unitarios. (*b*) Determinar la fuerza que realiza Connie primero expresándola en función de los vectores unitarios y después en forma de módulo y dirección (ángulo).

78 ••• La posición de un avión que vuela a 5,0 km de altura, la situamos a 1,5º km norte y 2,5 km este. (*a*) ¿Qué distancia hay desde el punto de observación hasta el avión? (*b*) ¿Con qué ángulo (respecto del norte en el plano horizontal) lo vemos? (*c*) Expresar el vector posición del avión desde nuestra situación en función de los vectores unitarios, si $\hat{i}$ se orienta hacia el este, $\hat{j}$ hacia el norte y $\hat{k}$ verticalmente hacia el cenit. (*d*) ¿Con qué ángulo de elevación (por encima del plano horizontal de nuestra posición) vemos el avión?

CAPÍTULO 2

EL MOVIMIENTO EN UNA DIRECCIÓN SE ASEMEJA AL MOVIMIENTO A LO LARGO DE UNA LÍNEA RECTA, COMO EL DE UN COCHE EN UNA CARRETERA RECTA. EL CONDUCTOR SE ENCUENTRA CON SEMÁFOROS Y DISTINTOS LÍMITES DE VELOCIDAD EN SU CAMINO POR LA CARRETERA HACIA LA ESCUELA. *(Medio Images/Getty Images.)*

El movimiento en una dimensión

2.1 Desplazamiento, velocidad y módulo de la velocidad
2.2 Aceleración
2.3 Movimiento con aceleración constante
2.4 Integración

? ¿Cómo puede estimar el tiempo que tardará en llegar? (Véase el ejemplo 2.3.)

Imaginemos un coche que acelera en una autopista. Hay muchas formas de describir el movimiento del vehículo. Por ejemplo, se puede dar la posición del coche, cómo se mueve de un punto a otro y si acelera o frena en su movimiento. Estos descriptores básicos del movimiento, el desplazamiento, la velocidad y la aceleración, son una parte esencial de la física. De hecho, la descripción del movimiento de los objetos supuso el inicio de la física hace más de 400 años.

El estudio del movimiento y de los conceptos relacionados fuerza y masa, es lo que se denomina **mecánica**. Comenzamos nuestro estudio del movimiento con la **cinemática**, la rama de la mecánica que trata de las características del movimiento. Es necesario entender la cinemática para poder comprender el resto de temas de este libro. El movimiento está presente en todas las disciplinas de la física y hay que saber cinemática para entender cómo la fuerza y la masa afectan al movimiento. En el capítulo 4 estudiamos la **dinámica**, ciencia que relaciona el movimiento con la fuerza y la masa.

Estudiamos ahora el caso más simple de la cinemática: el movimiento a lo largo de una línea recta. Desarrollaremos los modelos y las herramientas que se necesitan para describir el movimiento en una dimensión e introduciremos las definiciones de términos como desplazamiento, velocidad y aceleración necesarios habitualmente para describir el movimiento. Analizaremos con detalle el caso especial de movimiento rectilíneo con aceleración constante. Finalmente, veremos las formas de integración que se usan para describir el movimiento. En este capítulo, nos limitaremos al movimiento en una dimensión, con lo que no hace falta usar de forma completa la notación vectorial descrita en el capítulo 1. En una línea recta basta con un signo + o − para especificar la dirección del movimiento.

2.1 DESPLAZAMIENTO, VELOCIDAD Y MÓDULO DE LA VELOCIDAD

El ganador de una carrera de caballos es aquel caballo cuyo hocico cruza la línea de llegada en primer lugar. Se puede argumentar que lo que realmente es relevante durante la carrera es el movimiento del hocico del caballo y, por lo tanto, que el tamaño, la forma y el movimiento del resto del caballo no tienen importancia. En física, para analizar el movimiento de los objetos muchas veces esta simplificación es útil. Así, podemos describir el movimiento de un objeto siguiendo el movimiento de un punto del mismo. Por ejemplo, cuando un coche se mueve por una línea recta en una carretera, el movimiento del coche puede describirse examinando el movimiento de un punto del lateral del mismo. Un objeto que puede idealizarse de esta manera se denomina **partícula**. En cinemática, dado que no estamos interesados en el tamaño, la forma o el movimiento interno de un objeto, podemos considerar que este objeto es una partícula y, por este motivo, consideramos que coches, trenes y proyectiles son partículas. Incluso las personas y las galaxias pueden considerarse partículas.

(*Bettmann/Corbis.*)

POSICIÓN Y DESPLAZAMIENTO

La descripción del movimiento consiste en saber la **posición** de una partícula y cómo la posición cambia con el movimiento de la partícula. En un movimiento en una dimensión, se suele elegir el eje x a lo largo de la línea por donde discurre el movimiento. Por ejemplo, la figura 2.1 muestra un estudiante que va en bicicleta que está en la posición x_i en el instante t_i y en la posición x_f en un instante posterior t_f. La variación de la posición del estudiante $x_f - x_i$, se denomina **desplazamiento**. Es costumbre utilizar la letra griega Δ para indicar la variación o incremento de una magnitud. Así pues, la variación de x se escribe

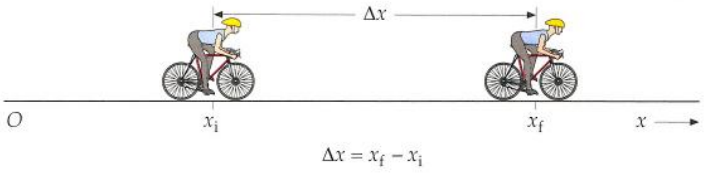


FIGURA 2.1 Un estudiante que va en bicicleta se mueve en línea recta en un sistema de coordenadas formado por una línea en la que se escoge un punto O como origen. A cada punto de la línea se asigna un número x, cuyo valor es proporcional a la distancia a O. Los puntos a la derecha de O son positivos y a la izquierda, negativos. Cuando la bicicleta se desplaza desde el punto x_i al punto x_f, su desplazamiento es $\Delta x = x_f - x_i$.

$$\Delta x = x_f - x_i \qquad 2.1$$

DEFINICIÓN: DESPLAZAMIENTO

Es importante darse cuenta de la diferencia entre desplazamiento y distancia recorrida. La distancia recorrida por una partícula es la longitud del camino que una partícula sigue desde su posición inicial hasta su posición final. Es, por lo tanto, una magnitud escalar que siempre es positiva. El desplazamiento es el cambio en la posición de la partícula. Es positivo si la partícula va en la dirección de x crecientes (la dirección $+x$), y negativa si va en la dirección de $-x$. El desplazamiento puede representarse mediante vectores, como vimos en el capítulo 1, pero usaremos la notación vectorial completa sólo cuando estudiemos el movimiento en dos o tres dimensiones en el capítulo 3.

! La notación Δx (léase "delta de x") corresponde a una sola magnitud, el cambio de x (no al producto de Δ y x, como tampoco cos θ es el producto de cos y θ). Por convenio, la variación experimentada por una magnitud es siempre su valor final menos su valor inicial.

Ejemplo 2.1 Distancia recorrida y desplazamiento de un perro

Cuando sacamos a pasear a nuestro perro, le lanzamos jugando un palo en línea recta hasta 20 ft de distancia para que lo recoja y nos lo devuelva. El can corre, alcanza el palo y regresa con él en la boca recorriendo 15 ft. Entonces se para, se echa al suelo y se pone a morder el objeto. (*a*) ¿Cuál es la distancia total que recorre el perro? (*b*) ¿Cuál es su desplazamiento neto? (*c*) Demostrar que el desplazamiento neto es la suma de los dos desplazamientos secuenciales realizados por el perro.

PLANTEAMIENTO La distancia total, s, se determina sumando las distancias individuales que recorre el perro. El desplazamiento es la posición final del perro menos la posición inicial. El perro arranca a correr en el instante 0, en el tiempo 1 alcanza el palo y en el tiempo 2 se echa al suelo para morderlo.

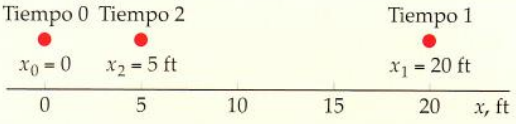


FIGURA 2.2 Los puntos rojos representan la posición del perro en instantes de tiempo diferentes.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Haga un diagrama del movimiento con un eje coordenado (figura 2.2).

2. Calcule la distancia total recorrida:

$$s_{02} = s_{01} + s_{12} = (20\text{ ft}) + (15\text{ ft}) = \boxed{35}\text{ ft}$$

(Los subíndices indican los intervalos de tiempo, donde s_{01} es la distancia recorrida durante el intervalo de tiempo de 0 a 1, y así sucesivamente.)

(*b*) El desplazamiento neto se determina a partir de su definición $\Delta x = x_f - x_i$, donde $x_i = x_0 = 0$ es la posición inicial del perro. La posición final está situada a 5 ft de la posición inicial $x_f = x_2 = 5$ ft:

$$\Delta x_{02} = x_2 - x_0 = 5\text{ ft} - 0\text{ ft} = \boxed{5\text{ ft}}$$

donde Δx_{02} es el desplazamiento durante el intervalo desde el tiempo 0 al tiempo 2.

(*c*) El desplazamiento neto se determina sumando el desplazamiento del primer tramo con el del segundo.

$$\Delta x_{01} = x_1 - x_0 = 20\text{ ft} - 0\text{ ft} = 20\text{ ft}$$
$$\Delta x_{12} = x_2 - x_1 = 5\text{ ft} - 20\text{ ft} = -15\text{ ft}$$

sumando se obtiene

$$\Delta x_{01} + \Delta x_{12} = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) = x_2 - x_0 = \Delta x_{02}$$

luego

$$\Delta x_{02} = \Delta x_{01} + \Delta x_{12} = 20\text{ ft} - 15\text{ ft} = \boxed{5\text{ ft}}$$

COMPROBACIÓN El desplazamiento en cualquier tramo del recorrido nunca es mayor que la distancia recorrida en el mismo tramo. El resultado del apartado (*b*), 5 ft, es menor que el del apartado (*a*), 35 ft, por lo que el resultado del apartado (*b*) es plausible.

OBSERVACIÓN La distancia total recorrida es igual a la suma de las distancias recorridas en cada tramo. El desplazamiento total neto siempre coincide con la suma de los desplazamientos de cada tramo del recorrido.

MÓDULO DE LA VELOCIDAD MEDIA

Frecuentemente estamos interesados en el módulo de la velocidad o celeridad. El **módulo de la velocidad media** de una partícula es el cociente entre la distancia total recorrida y el tiempo total desde el principio al final:

$$\text{Módulo de la velocida media} = \frac{\text{distancia total}}{\text{tiempo total}} = \frac{s}{\Delta t} \qquad 2.2$$

DEFINICIÓN DEL MÓDULO DE LA VELOCIDAD MEDIA

La distancia total y el tiempo total son siempre positivos; por lo tanto, el módulo de la velocidad media también es positivo siempre.

Aunque el módulo de la velocidad es una magnitud útil, no incorpora información sobre la dirección del movimiento, ya que ni la distancia ni el tiempo total lle-

van asociada una dirección. Una magnitud más útil es la *velocidad* (como magnitud vectorial) que incorpora también información sobre la dirección en que se mueve un objeto. La **velocidad media** en la dirección del eje x, $v_{m\,x}$, se define como la razón entre el desplazamiento sobre el eje x y el intervalo de tiempo Δt:

$$v_{m\,x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} \qquad \text{(por tanto, } \Delta x = v_{m\,x}\,\Delta t\text{)} \qquad 2.3$$

DEFINICIÓN DE LA VELOCIDAD MEDIA

Al igual que el desplazamiento, la velocidad media es una magnitud que puede ser positiva o negativa. Un valor positivo indica que el desplazamiento va en la dirección $+x$. Un valor negativo indica que el desplazamiento va en la dirección $-x$. Las dimensiones de la velocidad son L/T y la unidad de velocidad en el SI es el metro por segundo (m/s). Otras unidades habituales son el kilómetro por hora (km/h), el pie por segundo (ft/s) y la milla por hora (mi/h).

La figura 2.3 representa gráficamente la posición de una partícula en función del tiempo. Cada punto representa la posición x de una partícula en un tiempo t. Una línea recta une los puntos P_1 y P_2, y forma la hipotenusa del triángulo de catetos $\Delta x = x_2 - x_1$ y $\Delta t = t_2 - t_1$. El cociente $\Delta x/\Delta t$ es la pendiente de la línea y nos ofrece una interpretación geométrica de la velocidad media:

La velocidad media en el intervalo entre $t = t_1$ y $t = t_2$ en un gráfico x-t es la pendiente de la línea recta que conecta los puntos (t_1, x_1) y (t_2, x_2).

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA VELOCIDAD MEDIA

En general, la velocidad media depende del intervalo de tiempo escogido. Por ejemplo, si en la figura 2.3 tomamos un intervalo menor de tiempo, escogiendo un instante t_2' más próximo a t_1, la velocidad media será mayor, según indica la mayor inclinación de la línea que une los puntos P_1 y P_2'.

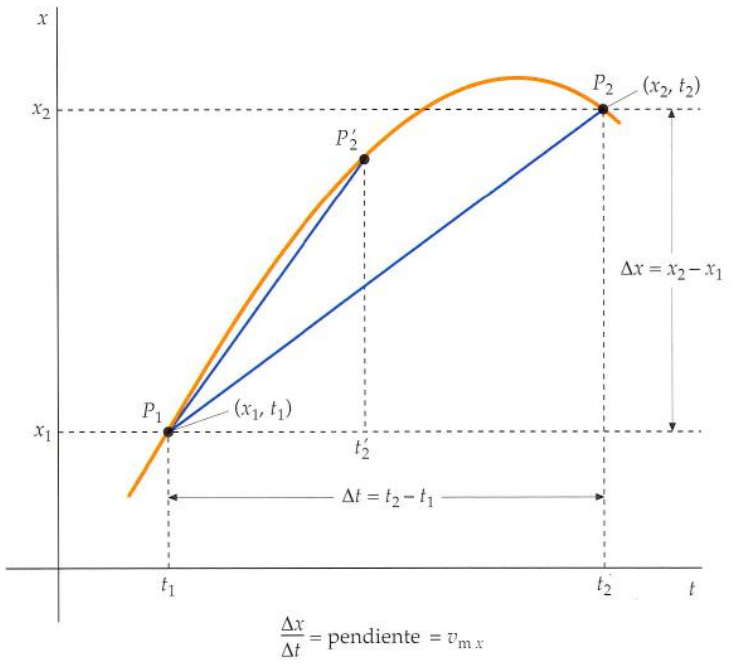


FIGURA 2.3 Gráfico de x en función de t para una partícula que se mueve en una dimensión. Cada punto de la curva representa la posición x en un tiempo determinado t. Se ha dibujado una línea recta entre las posiciones P_1 y P_2. El desplazamiento $\Delta x = x_2 - x_1$ y el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ se indican en la figura. La línea recta entre P_1 y P_2 es la hipotenusa del triángulo de lados Δx y Δt y la relación $\Delta x/\Delta t$ es su pendiente. En términos geométricos, la pendiente es una medida de la inclinación de la recta.

Véase el
Apéndice de matemáticas
para más información sobre
Ecuaciones lineales

El módulo de la velocidad media y la velocidad media son los parámetros cinemáticos más básicos. Junto con otros parámetros que se introducen en este capítulo son necesarios para resolver los problemas de cinemática.

Ejemplo 2.2 Velocidad y velocidad media del perro

El perro del ejemplo 2.1 recorre 20 ft en 1 s para coger el palo y corre de vuelta 15 ft en 1,5 s (figura 2.4). Calcular (*a*) el módulo de la velocidad media del perro y (*b*) la velocidad media de todo el recorrido del juego.

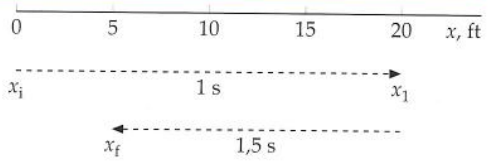


FIGURA 2.4

PLANTEAMIENTO Resolveremos el problema usando las definiciones del módulo de la velocidad media y de velocidad media, teniendo en cuenta que el módulo de la velocidad media es la distancia total dividida por el tiempo total, mientras que la velocidad media es el desplazamiento neto dividido por Δt.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. El módulo de la velocidad media es la distancia total dividida por el tiempo total:

$$\text{Módulo de la velocidad media} = \frac{s}{\Delta t}$$

2. Calcular la distancia total recorrida y el tiempo total:

$$s = s_1 + s_2 = 20{,}0\text{ ft} + 15{,}0\text{ ft} = 35{,}0\text{ ft}$$
$$\Delta t = (t_1 - t_i) + (t_f - t_2) = 1{,}0\text{ s} + 1{,}5\text{ s} = 2{,}5\text{ s}$$

3. Usar s y Δt para determinar el módulo de la velocidad media del perro:

$$\text{Módulo de la velocidad media} = \frac{35{,}0\text{ ft}}{2{,}5\text{ s}} = \boxed{14\text{ ft/s}}$$

(*b*) 1. La velocidad media del perro es el cociente del desplazamiento neto Δx entre el intervalo de tiempo Δt:

$$v_{m\,x} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

2. El desplazamiento neto del perro viene dado por $x_f - x_i$, donde $x_i = 0$ es la posición inicial del perro y $x_f = 5$ ft es su posición final:

$$\Delta x = x_f - x_i = 5{,}0\text{ ft} - 0{,}0\text{ ft} = 5{,}0\text{ ft}$$

3. Usar Δx y Δt para determinar la velocidad media del perro:

$$v_{m\,x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{5{,}0\text{ ft}}{2{,}5\text{ s}} = \boxed{2{,}0\text{ ft/s}}$$

COMPROBACIÓN Una búsqueda por Internet nos indica que un galgo puede mantener una velocidad media de unos 66 ft/s (casi 45 mi/h). En estas condiciones no es extraño que nuestro perro corra a una velocidad media de 14 ft/s (9,5 mi/h aproximadamente). Un resultado del apartado (*a*) superior a 66 mi/s no sería plausible.

OBSERVACIÓN Obsérvese que el módulo de la velocidad del perro es mayor que la velocidad media porque la distancia total recorrida es mayor que el desplazamiento total. Asimismo, obsérvese que el desplazamiento es la suma de los desplazamientos individuales, es decir, $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = (20{,}0\text{ ft}) + (-15{,}0\text{ ft}) = 5{,}0\text{ ft}$, que es el resultado del punto 2 del apartado (*b*).

Ejemplo 2.3 Camino de la escuela

Habitualmente tardamos 10 minutos en ir de casa a la escuela situada a 5 km de distancia, yendo por una calle recta. Si un día salimos de casa 15 min antes del comienzo de la clase, pero nos encontramos con un semáforo estropeado que hace que la velocidad durante los 2 primeros kilómetros sea de 20 km/h, ¿llegaremos a tiempo?

PLANTEAMIENTO A fin de resolver el problema hay que encontrar el tiempo total que necesitamos para llegar a la escuela. Para ello, hay que calcular el tiempo $\Delta t_{2\,\text{km}}$ durante el cual vamos a 20 km/h y el tiempo $\Delta t_{3\,\text{km}}$ del resto del trayecto, durante el cual la velocidad es la habitual.

SOLUCIÓN

1. El tiempo total coincide con el tiempo invertido en los dos primeros kilómetros más el tiempo utilizado para recorrer los tres restantes:

$$\Delta t_{\text{tot}} = \Delta t_{2\,\text{km}} + \Delta t_{3\,\text{km}}$$

2. Usando $\Delta x = v_{m\,x}\,\Delta t$, determinar el tiempo que nos cuesta recorrer los dos primeros kilómetros a 20 km/h:

$$\Delta t_{2\,\text{km}} = \frac{\Delta x_1}{v_{m\,x}} = \frac{2{,}0\text{ km}}{20\text{ km/h}} = 0{,}10\text{ h} = 6{,}0\text{ min}$$

3. Usando $\Delta x = v_{m\,x}\,\Delta t$, calcular el tiempo que tardamos en recorrer los tres kilómetros restantes:

$$\Delta t_{3\,\text{km}} = \frac{\Delta x_2}{v_{m\,x}} = \frac{3{,}0\text{ km}}{v_{\text{usual}\,x}}$$

4. Usando $\Delta x = v_{m\,x}\,\Delta t$, despejar $v_{\text{usual}\,x}$, la velocidad que nos permite recorrer 5 km en 10 min:

$$v_{\text{usual}\,x} = \frac{\Delta x_{\text{tot}}}{\Delta t_{\text{usual}}} = \frac{5{,}0\text{ km}}{10\text{ min}} = 0{,}50\text{ km/min}$$

5. Utilizando los resultados de los pasos 3 y 4, despejamos $\Delta t_{3\,\text{km}}$: $\Delta t_{3\,\text{km}} = \dfrac{\Delta x_2}{v_{\text{usual}\,x}} = \dfrac{3{,}0\ \text{km}}{0{,}50\ \text{km/min}} = 6{,}0\ \text{min}$
6. Despejar el tiempo total: $\Delta t_{\text{tot}} = \Delta t_{2\,\text{km}} + \Delta t_{3\,\text{km}} = 12\ \text{min}$
7. El desplazamiento dura 12 minutos comparado con los 10 minutos habituales. Sin embargo, habíamos salido de casa con 15 minutos de antelación; por lo tanto, *no llegamos tarde a la escuela.*

COMPROBACIÓN Obsérvese que 20 km/60 min = 1,0 km/3,0 min. Desplazándose los 5 km a un ritmo de un kilómetro cada 3,0 minutos implica que a los 15 minutos se llega a la escuela. Como salimos con 15 minutos de tiempo, si la velocidad media se mantiene en 20 km/h se llega puntual.

Ejemplo 2.4 La aventura del pájaro viajero

Dos trenes separados 60 km se aproximan uno al otro por vías paralelas, moviéndose cada uno de ellos a 15 km/h. Un pájaro vuela de un tren al otro en el espacio que los separa, hasta que se cruzan. ¿Cuál es la distancia total recorrida por el pájaro si éste vuela a 20 km/h?

PLANTEAMIENTO En este problema hay que determinar la distancia total que vuela el pájaro sabiendo la velocidad del ave, las velocidades de los trenes y la distancia inicial entre ellos. Una primera impresión parece aconsejar que hay que sumar las distancias recorridas por el pájaro cada vez que se mueve desde un tren hacia el otro. Sin embargo, hay una forma mucho más simple que consiste en usar el hecho de que el tiempo t que vuela el pájaro coincide con el tiempo que los trenes tardan en cruzarse. La distancia total que vuela el pájaro se calcula entonces multiplicando la velocidad del pájaro por el tiempo de vuelo. Para ello escribiremos en primer lugar una ecuación para la magnitud a determinar, es decir, la distancia total Δs recorrida por el pájaro.

SOLUCIÓN

1. La distancia total $s_{\text{pájaro}}$ es igual al módulo de la velocidad media multiplicado por el tiempo:
$$s_{\text{pájaro}} = (\text{módulo de la velocidad media})_{\text{pájaro}} \times t = (\text{velocidad})_{\text{m pájaro}} \times t$$
2. El tiempo t que el pájaro está en el aire es el tiempo que uno de los trenes invierte en recorrer la mitad de la distancia inicial D que separa los trenes. (Como los trenes se mueven a la misma velocidad, cada tren se mueve 30 km antes de cruzarse con el otro.):
$$\tfrac{1}{2}D = (\text{velocidad})_{\text{m tren}} \times t$$
por lo tanto,
$$t = \frac{D}{2(\text{velocidad})_{\text{m tren}}}$$
3. Sustituir el resultado del paso 2 por el tiempo obtenido del paso 1. La separación inicial de los dos trenes es de $D = 60$ km. Por lo tanto, la distancia total volada por el ave es:
$$s_{\text{pájaro}} = (\text{velocidad})_{\text{m pájaro}}\, t = (\text{velocidad})_{\text{m pájaro}} \frac{D}{2(\text{velocidad})_{\text{m tren}}}$$
$$= 20\ \text{km/h}\,\frac{60\ \text{km}}{2\ (15\ \text{km/h})} = \boxed{40\ \text{km}}$$

COMPROBACIÓN La velocidad de cada tren es 3/4 de la velocidad del pájaro, de forma que la distancia recorrida por uno de los trenes será 3/4 de la distancia recorrida por el pájaro. Cada tren recorre 30 km. Como 30 km son 3/4 de 40 km, el resultado de la distancia recorrida por el pájaro resulta plausible.

VELOCIDAD INSTANTÁNEA Y MÓDULO DE LA VELOCIDAD

Suponga que su velocidad media durante un viaje largo ha sido de 60 km/h. Esto no indica cómo ha variado la velocidad durante el viaje, ya que, por ejemplo, en determinados puntos del recorrido ha tenido que detenerse en semáforos y en otras zonas ha podido viajar más rápido para ganar tiempo. Para conocer los detalles del viaje hay que saber cuál ha sido la velocidad en cada instante. A primera vista puede parecer imposible definir la velocidad de la partícula en un solo instante, es decir, en un tiempo específico. En un instante determinado la partícula está en un solo punto. Si está en un solo punto, ¿cómo puede estar moviéndose? Por otra parte, si no se está moviendo, ¿cómo puede tener velocidad? Esto constituye una antigua paradoja que puede resolverse cuando nos damos cuenta que para observar el movimiento, y así

definirlo, debemos observar la posición del objeto en más de un instante. Veamos ahora la figura 2.5. Cuando consideramos sucesivamente intervalos de tiempo más cortos a partir de t_1, la velocidad media para cada intervalo se aproxima más a la pendiente de la tangente en t_1. La pendiente de esta tangente se define como la **velocidad instantánea** en t_1. Esta tangente es el límite de la relación $\Delta x/\Delta t$ cuando Δt, y por lo tanto Δx, se aproxima a cero. Así podremos decir,

La velocidad instantánea es el límite de la relación $\Delta x/\Delta t$ cuando Δt se aproxima al valor cero.

$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$
$$= \text{pendiente de la línea tangente a la curva } x \text{ función de } t \qquad 2.4$$

DEFINICIÓN: VELOCIDAD INSTANTÁNEA

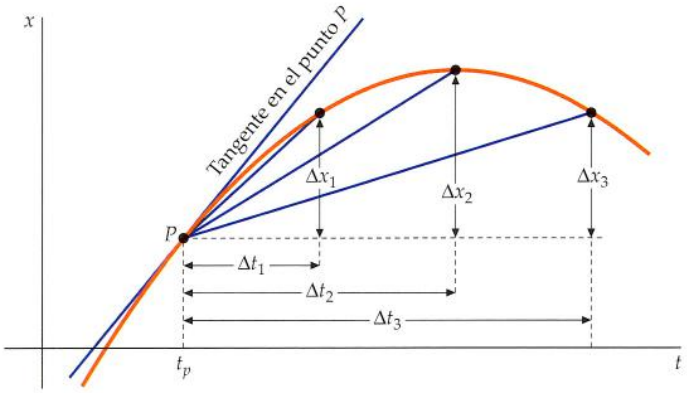


FIGURA 2.5 Gráfico de x en función de t. Obsérvese la secuencia de intervalos de tiempo sucesivamente más pequeños Δt_3, Δt_2, Δt_1, ... La velocidad media de cada intervalo es la pendiente de la línea recta para dicho intervalo. A medida que los intervalos se hacen más pequeños, estas pendientes se aproximan a la pendiente de la tangente a la curva en el punto t_1. La pendiente de esta línea se define como la velocidad instantánea en el tiempo t_1.

Este límite se denomina derivada de x respecto a t. La notación habitual para la derivada es dx/dt. Utilizando esta notación, la ecuación 2.4 se convierte en

$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \qquad 2.5$$

Véase el
Apéndice de matemáticas
para más información sobre
Cálculo diferencial

Esta pendiente puede ser positiva, negativa o nula; por consiguiente, en un movimiento unidimensional la velocidad instantánea puede ser positiva (x creciente) o negativa (x decreciente) o nula (no hay movimiento). En un objeto que se mueve a velocidad constante, la velocidad instantánea coincide con la velocidad media. El gráfico de la posición respecto del tiempo del movimiento del objeto (figura 2.6) es una línea recta, cuya pendiente es la velocidad.

La velocidad instántanea es un vector. Su módulo lo denominamos módulo de la **velocidad instantánea**. En lo que queda de texto se utilizará "velocidad" en lugar de "velocidad instantánea" y "módulo de la velocidad" en lugar de "módulo de la velocidad instantánea", excepto cuando sea recomendable el uso del adjetivo "instantáneo" para mayor énfasis o claridad.

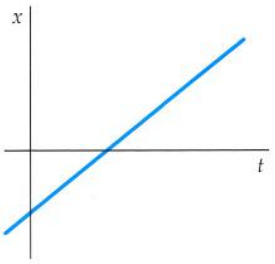


FIGURA 2.6 Gráfico posición-tiempo de una partícula que se mueve a velocidad constante.

Ejemplo 2.5 Posición de una partícula en función del tiempo *Inténtelo usted mismo*

La posición de una partícula viene descrita por la función indicada en la figura 2.7. Hallar la velocidad instantánea en el instante $t = 2$ s. ¿Cuándo es mayor la velocidad? ¿Cuándo es nula? ¿Es negativa alguna vez?

PLANTEAMIENTO En la figura 2.7 hemos dibujado la línea de tangente a la curva en el instante $t = 2$ s. La pendiente de la línea tangente es la velocidad instantánea de la partícula en el tiempo dado. Puede utilizarse esta figura para medir la pendiente de la línea tangente.

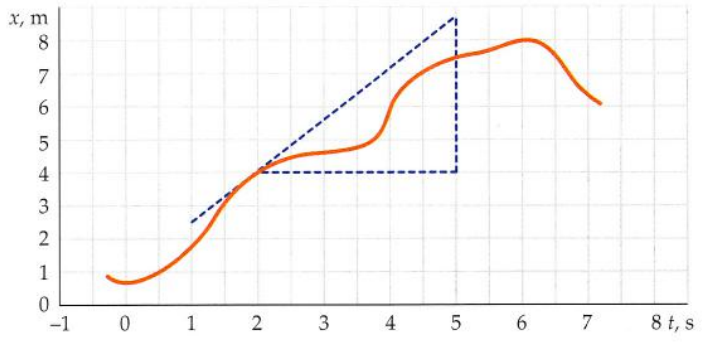


FIGURA 2.7

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos

1. Determinar los valores x_1 y x_2 sobre la línea tangente en los instantes $t_1 = 2{,}0$ s y $t_2 = 5{,}0$ s.
2. Calcular la pendiente de la línea tangente a partir de estos valores. Esta pendiente es igual a la velocidad instantánea en $t = 2{,}0$ s.
3. Según la figura, la pendiente (y, por lo tanto, la velocidad instantánea) es [mayor en aproximadamente $t \approx 4{,}0$ s]. La pendiente y la velocidad son [cero para $t = 0{,}0$ y $t = 6{,}0$ s] y son [negativas antes de 0,0 y después de 6,0 s].

Respuestas

$x_1 \approx 4{,}0$ m, $x_2 \approx 8{,}5$ m

$$v_x = \text{pendiente} \approx \frac{8{,}5\text{ m} - 4{,}0\text{ m}}{5{,}0\text{ s} - 2{,}0\text{ s}} = \boxed{1{,}5\text{ m/s}}$$

COMPROBACIÓN La posición de la partícula cambia desde la posición 1,8 m en el instante 1,0 segundos hasta que la posición es de 4,0 m a los 2,0 segundos, por lo que la velocidad media para el intervalo comprendido entre 1,0 s y 2,0 s es de 2,2 m/s. Esta velocidad tiene el mismo orden de magnitud que la velocidad instantánea a los 1,8 s, por lo que el paso 2 es plausible.

PROBLEMA PRÁCTICO 2.1 ¿Cuál es la velocidad media de esta partícula entre $t = 2{,}0$ s y $t = 5{,}0$ s?

Ejemplo 2.6 Caída de una piedra desde un acantilado

La posición de una piedra que a partir del reposo se deja caer desde un acantilado viene dada por $x = 5t^2$, donde x se mide en metros y hacia abajo desde la posición inicial cuando $t = 0$, y t se expresa en segundos. Hallar la velocidad en un instante t cualquiera. (Se omite la indicación explícita de la unidades para simplificar la notación.)

PLANTEAMIENTO Podemos calcular la velocidad de un instante determinado t calculando la derivada dx/dt directamente a partir de su definición en la ecuación 2.4. En la figura 2.8 se muestra la curva correspondiente que nos da x en función de t. Las líneas tangentes están dibujadas en los tiempos t_1, t_2 y t_3. Las pendientes de estas líneas tangentes crecen uniformemente, indicando que la velocidad instantánea crece uniformemente con el tiempo.

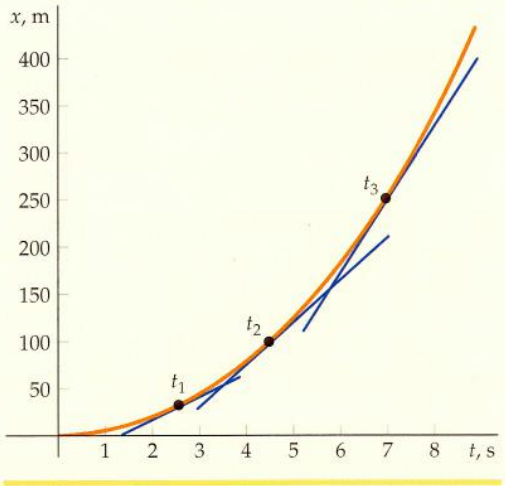


FIGURA 2.8

SOLUCIÓN

1. Por definición la velocidad instantánea es: $$v_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$
2. Podemos calcular el desplazamiento Δx a partir de la función posición $x(t)$: $$x(t) = 5t^2$$
3. En un tiempo posterior $t + \Delta t$, la posición $x(t + \Delta t)$, viene dada por: $$x(t + \Delta t) = 5(t + \Delta t)^2 = 5[t^2 + 2t\,\Delta t + (\Delta t)^2] = 5t^2 + 10t\,\Delta t + 5(\Delta t)^2$$
4. El desplazamiento para este intervalo de tiempo será: $$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t) = [5t^2 + 10t\,\Delta t + 5(\Delta t)^2] - 5t^2 = 10t\,\Delta t + 5(\Delta t)^2$$
5. Dividir Δx por Δt para determinar la velocidad media en este intervalo de tiempo: $$v_{m\,x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{10t\,\Delta t + 5(\Delta t)^2}{\Delta t} = 10t + 5\,\Delta t$$
6. A medida que consideramos intervalos de tiempo cada vez más cortos, Δt se aproxima a cero y el segundo termino, $5\Delta t$, tiende a cero; en cambio, el primer término, $10t$, permanece invariable: $$v_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (10t + 5\,\Delta t) = \boxed{10t}$$ donde v_x se da en m/s y t se da en s.

COMPROBACIÓN La piedra parte del reposo y va cada vez más deprisa. El resultado para la velocidad es $v_x = 10t$, es decir, 0 cuando $t = 0$, y aumenta a medida que lo hace el tiempo. Por lo tanto, $v_x = 10t$ es un resultado plausible.

OBSERVACIÓN Si hubiéramos hecho $\Delta t = 0$ en los pasos 4 y 5, el desplazamiento hubiera sido $\Delta x = 0$, en cuyo caso la relación $\Delta x/\Delta t$ quedaría indefinida. En su lugar, hemos dejado Δt como una variable hasta el paso final, cuando el límite $\Delta t \to 0$ está bien definido.

Para calcular las derivadas de forma rápida, utilizaremos unas reglas que están basadas en el cálculo de límites como en el ejemplo anterior (véase tabla A.4 en el Apéndice A). Una regla particularmente útil es

$$\text{Si} \quad x = Ct^n, \quad \text{entonces} \quad \frac{dx}{dt} = Cnt^{n-1} \qquad 2.6$$

donde C y n son constantes. Utilizando esta regla en el ejemplo 2.6, resulta $x = 5t^2$ y $v_x = dx/dt = 10t$, de acuerdo con los resultados anteriores.

2.2 ACELERACIÓN

La aceleración es la tasa de cambio de la velocidad instantánea. Cuando, por ejemplo, un conductor aprieta el pedal del acelerador de su coche, espera cambiar su velocidad. La **aceleración media** en un intervalo particular de tiempo $\Delta t = t_f - t_i$, se define como el cociente $\Delta v/\Delta t$, donde $\Delta v = v_f - v_i$:

$$a_{mx} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{fx} - v_{ix}}{t_f - t_i} \quad \text{(por tanto, } \Delta v_x = a_{mx}\Delta t) \qquad 2.7$$

DEFINICIÓN: ACELERACIÓN MEDIA

La aceleración tiene dimensiones de velocidad (L/T) dividida por el tiempo (T), es decir, tiene las dimensiones de una longitud dividida por el tiempo al cuadrado. La unidad en el SI es m/s^2. Al igual que el desplazamiento y la velocidad, la aceleración es una magnitud vectorial. En un movimiento unidimensional, usamos los signos + y − para indicar la dirección y la aceleración. La ecuación 2.7 nos indica que para que a_m sea positiva Δv_x debe ser positivo y viceversa.

La **aceleración instantánea** es el límite del cociente $\Delta v/\Delta t$ cuando Δt tiende a cero. Si representamos la velocidad en función del tiempo, la aceleración instantánea en el tiempo t se define como la pendiente de la línea tangente a la curva en ese tiempo.

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$$
$$= \text{pendiente de la línea tangente a la curva de } v \text{ en función de } t \qquad 2.8$$

DEFINICIÓN: ACELERACIÓN INSTANTÁNEA

La aceleración es, por lo tanto, la derivada de la velocidad v_x respecto al tiempo, dv_x/dt. Como la velocidad es también la derivada de la posición x respecto a t, la aceleración es la segunda derivada de x respecto a t, d^2x/dt^2. Podemos ver el origen de esta notación escribiendo la aceleración como dv_x/dt, y sustituyendo v_x por dx/dt:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d(dx/dt)}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad 2.9$$

Obsérvese que cuando el intervalo de tiempo se hace muy pequeño, la aceleración media y la aceleración instantánea coinciden. Por lo tanto, a partir de ahora utilizaremos el vocablo aceleración para referirnos a la "aceleración instantánea".

Es importante darse cuenta que el signo de la aceleración de un objeto no indica si está aumentando o disminuyendo su velocidad. Para saberlo hay que comparar los signos de la velocidad y de la aceleración. Si v_x y a_x son ambas positivas, v_x se hace cada vez más positiva, por lo que el módulo de la velocidad aumenta si v_x y a_x son ambas negativas, v_x se hace cada vez más negativa por lo que el módulo de la velocidad aumenta. Cuando v_x y a_x tienen signos opuestos, el objeto se frena. Si v_x es positiva y a_x negativa, v_x se hace cada vez menos positiva de forma que el módulo de la velocidad disminuye. Si v_x es negativa y a_x positiva, v_x se hará cada vez

> ! La deceleración no significa que la aceleración sea negativa sino que los signos de la velocidad y de la aceleración son distintos.

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 2.1

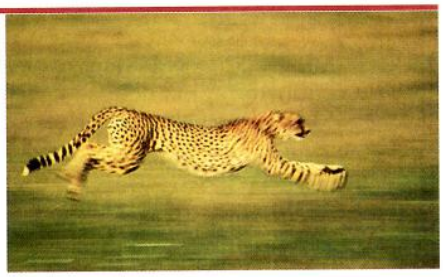
Usted va en su coche siguiendo a otro coche que circula a gran velocidad. De repente, el conductor del vehículo de delante frena bruscamente hasta parar para evitar pasar por un enorme bache. Tres centésimas de segundo después de que usted vea las luces de freno iluminarse, usted frena. Suponga que los dos coches se mueven a la misma velocidad y que ambos vehículos frenan de la misma forma, es decir, disminuyen su velocidad con el mismo ritmo. La distancia entre los dos coches, ¿es constante cuando los dos coches frenan al unísono?

menos negativa de forma que el módulo de la velocidad disminuye. En resumen, si v_x y a_x tienen el mismo signo, el módulo de la velocidad aumenta, mientras que si tienen signos opuestos, el módulo de la velocidad disminuye. Cuando un objeto se frena decimos que se desacelera.

Si la aceleración es cero, no hay cambio temporal de la velocidad —la velocidad es constante. En este caso, el gráfico de x en función de t es una línea recta. Si la aceleración no es cero pero es constante, como en el ejemplo 2.13, entonces la velocidad varía linealmente con el tiempo y x varía cuadráticamente con el tiempo.

Ejemplo 2.7 Un felino rápido

Un guepardo puede acelerar de 0 a 96 km/h en 2 s, mientras que una moto requiere 4,5 s. Calcular las aceleraciones medias del guepardo y de la moto, y compararlas con la aceleración de caída libre debida a la gravedad, $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$.



(Gunther Ziesler/Peter Arnold.)

PLANTEAMIENTO Tenemos las velocidades iniciales y finales y el intervalo de tiempo que utilizan el felino y la moto, por lo que usando la ecuación 2.7 podemos determinar la aceleración de ambos.

SOLUCIÓN

1. Convertir 96 km/h a m/s:
$$96\ \frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}}\left(\frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}}\right)\left(\frac{1000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}}\right) = 26{,}7\ \text{m/s}$$

2. Determinar la aceleración media a partir de los datos suministrados:

guepardo $a_{m\,x} = \dfrac{\Delta v_x}{\Delta t} = \dfrac{26{,}7\ \text{m/s} - 0}{2{,}0\ \text{s}} = 13{,}3\ \text{m/s}^2 = \boxed{13\ \text{m/s}^2}$

moto $a_{m\,x} = \dfrac{\Delta v_x}{\Delta t} = \dfrac{26{,}7\ \text{m/s} - 0}{4{,}5\ \text{s}} = 5{,}93\ \text{m/s}^2 = \boxed{5{,}9\ \text{m/s}^2}$

3. Comparar los resultados con la aceleración de la gravedad, multiplicando por el factor de conversión $1g/9{,}81\ \text{m/s}^2$:

guepardo $13{,}3\ \text{m/s}^2 \times \dfrac{1g}{9{,}81\ \text{m/s}^2} = 1{,}36g = \boxed{1{,}4g}$

moto $5{,}93\ \text{m/s}^2 \times \dfrac{1g}{9{,}81\ \text{m/s}^2} = 0{,}604g = \boxed{0{,}60g}$

COMPROBACIÓN La moto tarda casi el doble que el guepardo para acelerar hasta la misma velocidad, con lo cual tiene sentido que la aceleración de la moto sea algo menor que la mitad de la aceleración del guepardo.

OBSERVACIÓN Para reducir los errores de redondeo, los cálculos hay que hacerlos usando valores con al menos tres dígitos aunque al final los resultados se presenten usando sólo dos dígitos significativos.

PROBLEMA PRÁCTICO 2.2 Un coche se mueve a 45 km/h en el tiempo $t = 0$. El coche acelera de forma constante a razón de 10 km/(h·s). (*a*) ¿Cuál es su velocidad cuando $t = 2{,}0$ s? (*b*) ¿En qué momento el coche se mueve a 70 km/h?

Ejemplo 2.8 La velocidad y la aceleración en función del tiempo

La posición de una partícula viene dada por $x = Ct^3$, siendo C una constante cuyas unidades son m/s^3. Hallar la velocidad y aceleración en función del tiempo.

PLANTEAMIENTO Podemos determinar la velocidad aplicando $dx/dt = Cnt^{n-1}$ (ecuación 2.6) a la posición de la partícula, donde en este caso n vale 3. A continuación, repetimos el proceso para calcular la derivada temporal de la velocidad.

SOLUCIÓN

1. Las dimensiones de x y t son L y T, respectivamente:
$$C = \frac{x}{t^3} \Rightarrow [C] = \frac{[x]}{[t]^3} = \boxed{\frac{\text{L}}{\text{T}^3}}$$

2. La velocidad puede determinarse aplicando $dx/dt = Cnt^{n-1}$ (ecuación 2.6):
$$x = Ct^n = Ct^3$$
$$v_x = \frac{dx}{dt} = Cnt^{n-1} = C3t^{3-1} = \boxed{3Ct^2}$$

3. La derivada de la velocidad respecto al tiempo nos da la aceleración: $a = \frac{dv_x}{dt} = Cnt^{n-1} = 3C(2)(t^{2-1}) = \boxed{6Ct}$

COMPROBACIÓN Podemos comprobar las dimensiones de nuestras respuestas. Para la velocidad $[v_x] = [C][t^2] = (L/T^3)(T^2) = L/T$. Para la aceleración $[a_x] = [C][t] = (L/T^3)(T) = L/T^2$.

PROBLEMA PRÁCTICO 2.3 Si un coche acelera desde el reposo en $x = 0$ con aceleración constante a_x, su velocidad v_x depende de a_x y de la distancia recorrida. ¿Cuál de las ecuaciones siguientes tiene las dimensiones correctas y, por lo tanto, es una forma plausible de relacionar x, a_x, y v_x?

(*a*) $v_x = 2a_x x$ (*b*) $v_x^2 = 2a_x/x$ (*c*) $v_x = 2a_x x^2$ (*d*) $v_x^2 = 2a_x x$

DIAGRAMAS DEL MOVIMIENTO

Frecuentemente, al resolver problemas de física hay que estimar la dirección del vector aceleración a partir de la descripción del movimiento. Los diagramas del movimiento pueden resultar útiles. El móvil se dibuja a intervalos de tiempo constantes. Por ejemplo, supongamos que estamos en un trampolín y que queremos describir el movimiento desde que saltamos para caer en el trampolín y salir rebotados. En la figura 2.9*a* se muestra el diagrama del movimiento de la primera fase. Los puntos representan nuestra posición a intervalos de tiempo iguales, por lo que el espacio entre puntos consecutivos aumenta, ya que la velocidad aumenta también. Las cifras que aparecen junto a los puntos indican la progresión del tiempo y junto a cada punto una flecha representa la velocidad. La dirección de cada flecha indica la dirección de la velocidad en cada instante y la longitud de la flecha representa el módulo de la velocidad. El vector aceleración va en la dirección en que el vector velocidad cambia, que es hacia abajo. En general, si las flechas de la velocidad se alargan a medida que el tiempo progresa, la aceleración va en la misma dirección que la velocidad. Por otro lado, si las flechas de la velocidad se hacen más cortas a medida que avanza el tiempo (figura 2.9*b*), la aceleración va en la dirección opuesta a la velocidad. La figura 2.9*b* es el diagrama de nuestro movimiento cuando después de saltar sobre el trampolín, nos movemos hacia arriba.

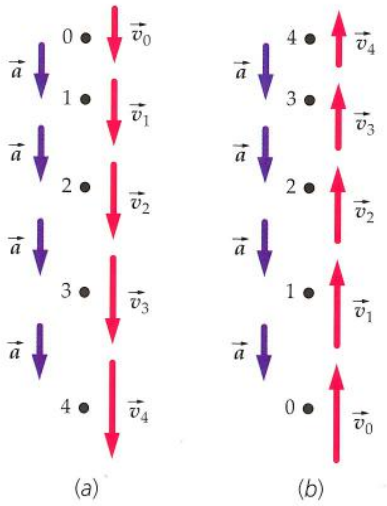


FIGURA 2.9 Diagramas del movimiento. Los intervalos de tiempo entre puntos sucesivos son idénticos. (*a*) El vector velocidad aumenta, lo cual significa que la aceleración va en la dirección del vector velocidad. (*b*) El vector velocidad disminuye, lo cual significa que la aceleración va en la dirección opuesta a la del vector velocidad.

2.3 MOVIMIENTO CON ACELERACIÓN CONSTANTE

El movimiento de una partícula que tiene aceleración casi constante es corriente en la naturaleza. Por ejemplo, cerca de la superficie de la Tierra todos los objetos caen verticalmente con aceleración de la gravedad constante (si puede despreciarse la resistencia del aire). Otros ejemplos de aceleración casi constante podrían ser un avión acelerando por la pista para despegar, el movimiento de un coche frenando frente a un semáforo en rojo o un coche acelerando cuando el semáforo cambia a verde. En una partícula en movimiento, la velocidad final v_x es igual a la velocidad inicial más el cambio de la velocidad, y el cambio de la velocidad es la aceleración media multiplicada por el tiempo. Es decir,

$$v_x = v_{0x} + \Delta v = v_{0x} + a_{m\,x}\,\Delta t \qquad 2.10$$

Si una partícula tiene aceleración constante a_x, su aceleración instantánea y su aceleración media coinciden. Es decir,

$$a_x = a_{m\,x} \qquad (a_x \text{ es constante}) \qquad 2.11$$

Dado que son frecuentes las situaciones en que la aceleración es constante, podemos utilizar las ecuaciones de la aceleración y la velocidad para obtener un conjunto especial de **ecuaciones cinemáticas** para aquellos problemas que comporten aceleración constante en una dimensión.

* En el capítulo 1 se introdujo el vector velocidad y el vector aceleración, y se tratarán con más detalle en el capítulo 3.

DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES CINEMÁTICAS CON ACELERACIÓN CONSTANTE

Supongamos que una partícula que se mueve con aceleración constante a_x tiene una velocidad v_{0x} cuando el tiempo vale $t_0 = 0$, y v_x es la velocidad en un tiempo t posterior. Combinando las ecuaciones 2.10 y 2.11, tenemos

$$v_x = v_{0x} + a_x t \qquad (a_x \text{ es constante}) \qquad 2.12$$

ACELERACIÓN CONSTANTE, V EN FUNCIÓN DE t

Esta es la ecuación de una línea recta en un gráfico de v en función de t (figura 2.10). La pendiente de la línea es la aceleración a_x.

Si buscamos una ecuación para la posición de x en función del tiempo, consideramos primero el caso especial del movimiento a velocidad constante $v_x = v_{0x}$ (figura 2.11). El desplazamiento Δx en el intervalo de tiempo Δt es

$$\Delta x = v_{0x}\,\Delta t \qquad (a_x = 0)$$

El área del rectángulo sombreado en el gráfico v_x-t (figura 2.11*a*) se calcula multiplicando la altura v_{0x} por la anchura Δt, por lo que el desplazamiento Δx es el área bajo la curva. Si v_{0x} es negativo (figura 2.11*b*), tanto el área como el desplazamiento son negativos. Normalmente, el área es una magnitud positiva. Sin embargo, en este contexto este no es el caso. Si v_{0x} es negativo, la altura de la curva es negativa y el área bajo la curva es la magnitud negativa $v_{0x}\,\Delta t$.

La interpretación geométrica del desplazamiento a partir del área bajo la curva v_x-t no sólo vale si la velocidad es constante sino que vale en general, tal como se ilustra en la figura 2.12. Para demostrar esta afirmación, dividimos primero el intervalo de tiempo en pequeños intervalos Δt_1, Δt_2, y así sucesivamente. Tal como se muestra en la figura, se dibujan unos rectángulos. El área del rectángulo correspondiente al intervalo Δt_i es $v_i\,\Delta t_i$ que es, aproximadamente, igual al desplazamiento Δx_i

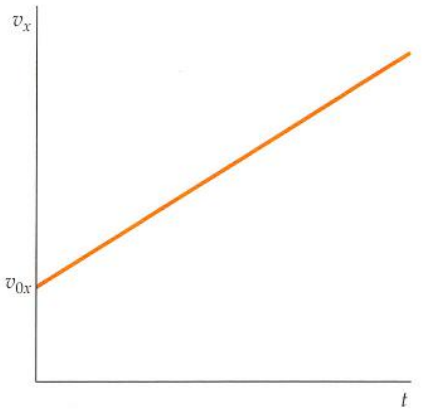


FIGURA 2.10 Gráfico de la velocidad en función del tiempo con aceleración constante.

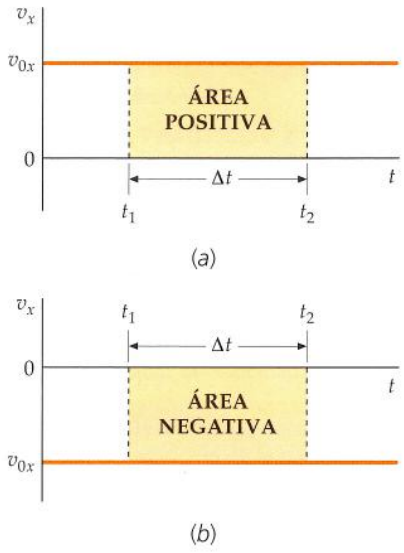


FIGURA 2.11 Gráficos del movimiento a velocidad constante.

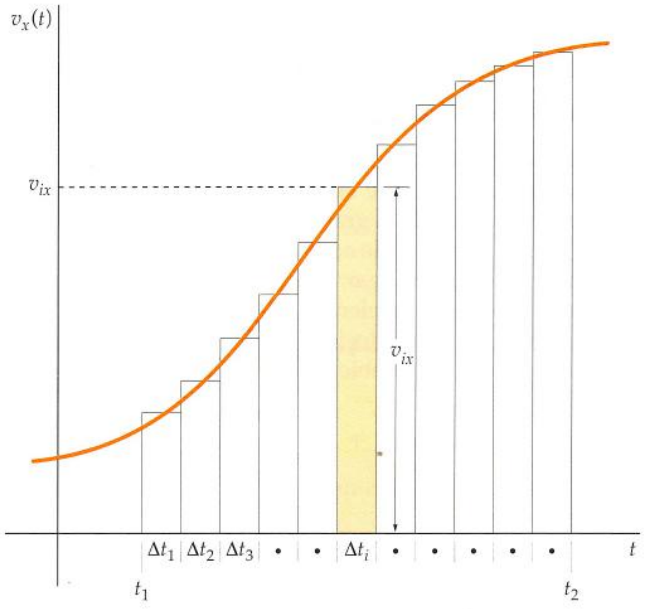


FIGURA 2.12 Gráfico de una curva general de $v_x(t)$ en función de t. El desplazamiento total desde t_1 hasta t_2 es el área bajo la curva en este intervalo, que puede obtenerse, aproximadamente, sumando las áreas de los rectángulos.

durante el intervalo Δt_i. La suma de las áreas de los rectángulos es, aproximadamente, igual a la suma de cada uno de los desplazamientos en cada intervalo de tiempo y coincide, aproximadamente, con el desplazamiento total entre los tiempos t_1 y t_2. Podemos hacer la aproximación tan precisa como queramos poniendo tantos rectángulos bajo la curva como queramos, cada uno de los cuales tendrá un valor de Δt más pequeño. En el límite de rectángulos infinitamente pequeños, la suma resultante se aproxima al valor del área bajo la curva, que a su vez coincide con el desplazamiento. Así, el desplazamiento Δx es el área bajo la curva v_x-t.

Para una aceleración constante (figura 2.13*a*), Δx es el área de la región sombreada. Esta región se divide en un rectángulo y un triángulo de área $v_{1x}\,\Delta t$ y $\frac{1}{2}a_x(\Delta t)^2$, respectivamente, donde $\Delta t = t_2 - t_1$. Por lo tanto

$$\Delta x = v_{1x}\,\Delta t + \tfrac{1}{2}a_x(\Delta t)^2 \qquad 2.13$$

Si $t_1 = 0$ y $t_2 = t$, la ecuación 2.13 resulta

$$x - x_0 = v_{0x}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 \qquad 2.14$$

ACELERACIÓN CONSTANTE: $x(t)$

donde x_0 y v_{0x} son la posición y la velocidad en el tiempo $t = 0$, y $x = x(t)$ es la posición en el tiempo t. El término $v_{0x}t$ representa el desplazamiento que tendría lugar si a_x fuera cero y el término $\frac{1}{2}a_x t^2$ es el desplazamiento adicional debido a la aceleración constante.

Usamos ahora las ecuaciones 2.12 y 2.14 para obtener dos ecuaciones cinemáticas para el caso de la aceleración constante. Despejando t de la ecuación 2.12 y sustituyendo su valor en la ecuación 2.14, se obtiene

$$\Delta x = v_{0x}\frac{v_x - v_{0x}}{a_x} + \frac{1}{2}a_x\left(\frac{v_x - v_{0x}}{a_x}\right)^2$$

Multiplicando ambos lados por $2a_x$, obtenemos

$$2a_x\,\Delta x = 2v_{0x}(v_x - v_{0x}) + (v_x - v_{0x})^2$$

Simplificando y ordenando los términos, se llega a

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x\,\Delta x \qquad 2.15$$

ACELERACIÓN CONSTANTE: $v_x(x)$

La definición de velocidad media (ecuación 2.3) queda

$$\Delta x = v_{m\,x}\,\Delta t$$

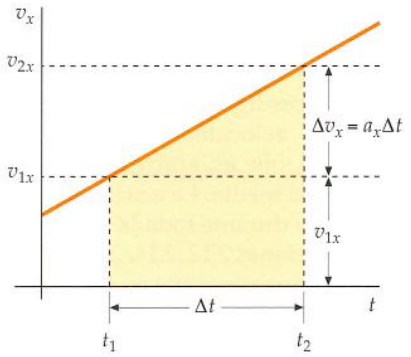
donde $v_{m\,x}\,\Delta t$ es el área bajo la línea horizontal de altura $v_{m\,x}$ en la figura 2.13*b*, y Δx es el área bajo la curva v_x-t en la figura 2.13*a*. Se puede ver que si $v_{m\,x} = \frac{1}{2}(v_{1x} + v_{2x})$, el área bajo la línea de altura v_m en la figura 2.13*a* y el área bajo la curva v_x-t en la figura 2.13*b* son iguales. Así

$$v_{m\,x} = \tfrac{1}{2}(v_{1x} + v_{2x}) \qquad 2.16$$

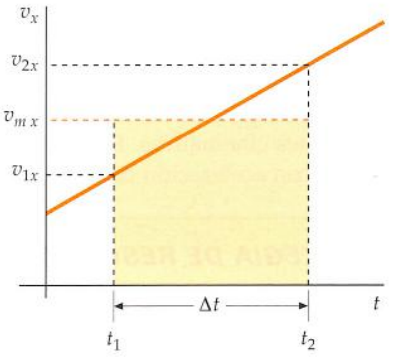
ACELERACIÓN CONSTANTE: $v_{m\,x}$ Y v_x

En un movimiento con aceleración constante, la velocidad media es la media de las velocidades final e inicial.

Un ejemplo de una situación en que la ecuación 2.16 no se puede aplicar, sería el de un corredor que tarda 40,0 min en recorrer una distancia de 10,0 km. La velocidad media de la carrera es 0,250 km/min, calculada usando la definición de



(*a*)



(*b*)

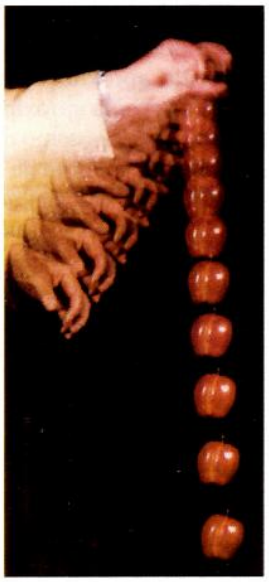
FIGURA 2.13 Gráficos del movimiento con aceleración constante.

"Va de cero a 60 en unos 3 segundos." (© *Sydney Harris.*)

¡ La ecuación 2.16 es aplicable sólo cuando la aceleración es constante durante los intervalos de tiempo.

velocidad media ($v_{m\,x} = \Delta x/\Delta t$). El corredor comienza la carrera desde el reposo ($v_{1x} = 0$) y durante los primeros segundos su velocidad aumenta rápidamente alcanzando el valor constante v_{2x} que se mantiene durante el resto de la carrera. El valor de v_{2x} es ligeramente superior al de la velocidad media mientras que si calculamos la velocidad media mediante la ecuación 2.16 resulta un valor de 0,125 km/h, que es, aproximadamente, la mitad del valor dado por la definición de velocidad media. La ecuación 2.16 no puede aplicarse, ya que la aceleración no es constante durante toda la carrera.

Las ecuaciones 2.12, 2.14, 2.15 y 2.16 se usan para resolver problemas cinemáticos con aceleración constante en una dimensión. La elección de qué ecuación o ecuaciones se usan para un problema particular depende de la información de la que se disponga y de qué pregunta se tiene que resolver. La ecuación 2.15 es útil, por ejemplo, si se quiere determinar la velocidad final de una pelota que cae, partiendo del reposo, desde una altura x cuando no estamos interesados en saber la duración de la caída.



Fotografía estroboscópica de la caída de una manzana a 60 destellos por segundo. La aceleración de la manzana viene indicada por el mayor espaciado que se observa en las imágenes inferiores. *(Estate of Harold E. Edgerton/Palm Press.)*

USO DE LAS ECUACIONES CINEMÁTICAS CON LA ACELERACIÓN CONSTANTE

Revise la Estrategia de resolución de problemas para resolver problemas usando las ecuaciones cinemáticas. Examine entonces los ejemplos de movimiento unidimensional con aceleración constante que hay a continuación.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Movimiento en una dimensión con aceleración constante

PLANTEAMIENTO Averiguar si el problema pide determinar el tiempo, la distancia, la velocidad o la aceleración de un objeto.

SOLUCIÓN Siga los pasos siguientes para resolver problemas de un movimiento con aceleración constante en una dimensión.

1. Dibuje una figura que muestre la posición inicial y final de la partícula. La figura debe contener un eje de coordenadas indicando los sentidos positivo y negativo, y señale las coordenadas y la velocidad inicial y final del objeto. Señale la aceleración.
2. Seleccione una de las ecuaciones cinemáticas con aceleración constante (ecuaciones 2.12. 2.14, 2.15 y 2.16). Sustituya los valores en la ecuación y, si es posible, despeje la magnitud deseada.
3. Si es necesario, seleccione otra de las ecuaciones cinemáticas con aceleración constante, sustituya los valores dados en ella y despeje la magnitud deseada.

COMPROBACIÓN Hay que comprobar que las respuestas sean dimensionalmente consistentes y que las unidades sean correctas. Además, compruebe que los signos y el orden de magnitud del resultado concuerdan con lo que era razonable esperar.

Problemas con un objeto Empezaremos con diversos ejemplos que muestran el movimiento de un objeto.

Ejemplo 2.9 Distancia de frenado de un vehículo

Una persona que conduce un vehículo de noche por una autopista ve de pronto, a cierta distancia, un coche parado y frena hasta detenerse con una aceleración de 5 m/s^2. ¿Cuál es la distancia de frenado del vehículo si su velocidad inicial es (a) 15 m/s o (b) 30 m/s?

PLANTEAMIENTO Use la Estrategia para la resolución de problemas que precede a este ejemplo. En la figura, el coche se dibuja mediante un punto. Elegimos la dirección x como la

dirección del movimiento y la posición incial $x_0 = 0$. Entonces, la velocidad inicial es $v_{0x} = +15\ \text{m/s}$, la velocidad final es $v_x = 0$ y la aceleración es $a_x = -5\ \text{m/s}^2$, ya que la velocidad disminuye. Queremos determinar la distancia recorrida, Δx. Como no necesitamos conocer el tiempo que tarda el coche en detenerse, utilizamos la ecuación 2.15 como la más conveniente.

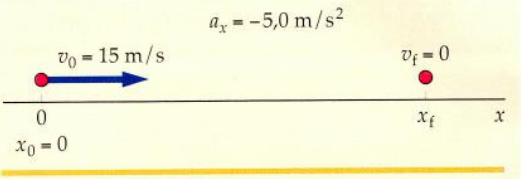


FIGURA 2.14

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Dibuje el coche en sus posiciones inicial y final (figura 2.14). Incluya un eje de coordenadas y señale los parámetros cinemáticos.

2. Usando la ecuación 2.15 calcule el desplazamiento Δx:

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x\Delta x$$
$$0 = (15\ \text{m/s})^2 + 2(-5{,}0\ \text{m/s}^2)\Delta x$$
$$\Delta x = 22{,}5\ \text{m} = \boxed{23\ \text{m}}$$

(*b*) Sustituya la velocidad inicial de 30 m/s en la expresión para Δx obtenida en la parte (*a*) (véase la figura 2.14):

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x\Delta x$$
$$0 = (30\ \text{m/s})^2 + 2(-5{,}0\ \text{m/s}^2)\Delta x$$
$$\Delta x = \boxed{90\ \text{m}}$$

COMPROBACIÓN La velocidad del coche disminuye 5,0 m/s cada segundo. Si su velocidad inicial es 15 m/s invertirá 3,0 s hasta pararse. Durante los 3,0 s tiene una velocidad media igual a la mitad de 15 m/s, por lo que recorrerá $\frac{1}{2}(15\ \text{m/s})(3{,}0\ \text{s}) = 23\ \text{m}$. Esto confirma nuestro resultado del apartado (*a*). El resultado del apartado (*b*) puede confirmarse de forma parecida.

Ejemplo 2.10 Distancia de frenado

Inténtelo usted mismo

En el ejemplo 2.9, (*a*) ¿cuánto tiempo tarda el coche en detenerse si su velocidad inicial es 30 m/s? (*b*) ¿Qué distancia recorre el coche durante el último segundo?

PLANTEAMIENTO Use la Estrategia para la resolución de problemas que precede al ejemplo 2.9. (*a*) En este apartado del problema se pide determinar el tiempo que el coche tarda en pararse. Se conoce la velocidad inicial $v_{0x} = 30\ \text{m/s}$. A partir del ejemplo 2.9, se sabe que el coche lleva una aceleración $a_x = -5{,}0\ \text{m/s}^2$. La ecuación 2.12 relaciona el tiempo, la velocidad y la aceleración. (*b*) Como la velocidad disminuye en 5 m/s cada segundo, la velocidad que tendrá el coche 1 s antes de detenerse debe ser de 5 m/s. Determinar la velocidad media durante el último segundo y con ella calcular la distancia recorrida.

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	Respuestas
(*a*) 1. Represente el coche mediante un punto pequeño en sus posiciones inicial y final (Figura 2.15). Incluya un eje de coordenadas y los parámetros cinemáticos.	
2. Use la ecuación 2.12 para determinar el tiempo que le cuesta parar Δt.	$\Delta t =$ 6,0 s
(*b*) 1. Represente el coche, mediante un punto pequeño, en sus posiciones inicial y final (figura 2.16). Incluya un eje de coordenadas.	
2. Calcular la velocidad media durante el último segundo, a partir de $v_{mx} = \frac{1}{2}(v_{ix} + v_{fx})$.	$v_{mx} = 2{,}5\ \text{m/s}$
3. Calcular la distancia recorrida a partir de $\Delta x = v_{mx}\,\Delta t$.	$\Delta x = v_{mx}\Delta t =$ 2,5 m

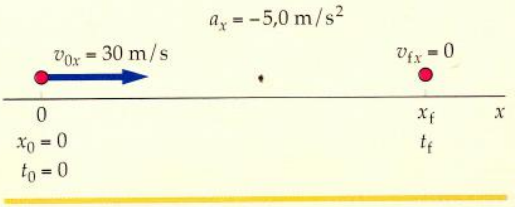


FIGURA 2.15

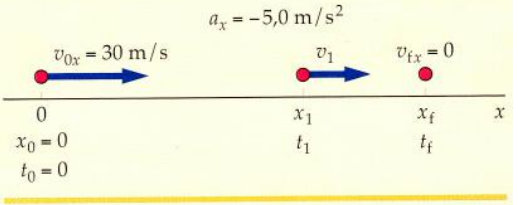


FIGURA 2.16

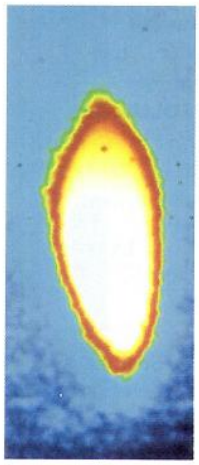
COMPROBACIÓN No esperamos que el coche se mueva muy rápido durante el último segundo. Así que el resultado de 2,5 m del apartado (*b*) parece plausible.

Ejemplo 2.11 Un electrón viajero

Inténtelo usted mismo

Un electrón en un tubo de rayos catódicos acelera desde el reposo con una aceleración constante de $5{,}33 \times 10^{12}\ \text{m/s}^2$ durante 0,150 μs ($1\ \mu\text{s} = 10^{-6}$ s). El electrón se mueve otros 0,200 μs a velocidad constante y, finalmente, se para con una aceleración de $-2{,}67 \times 10^{13}\ \text{m/s}^2$. ¿Qué distancia recorre el electrón?

PLANTEAMIENTO La aceleración cambia dos veces durante el movimiento del electrón, por lo que no se pueden aplicar las ecuaciones con aceleración constante a todo el movimiento de la partícula. Sin embargo, se puede dividir el movimiento del electrón en tres intervalos, cada uno de los cuales tiene una aceleración constante distinta, usando la posición y la velocidad final del primer intervalo como las condiciones iniciales para el segundo intervalo y la posición y la velocidad final del segundo intervalo como las condiciones iniciales para el tercer intervalo. Aplique la Estrategia para la resolución de problemas que precede al ejemplo 2.9 en cada uno de los tres intervalos con aceleración constante. Elija el origen de coordenadas en la posición inicial del electrón y el sentido positivo en el sentido de movimiento de la partícula.



Acelerador lineal de unos tres kilómetros de longitud de la Universidad de Stanford (EE.UU.). Se utiliza para acelerar electrones y positrones en línea recta a velocidades próximas a las de la luz. Sección transversal del haz de electrones del acelerador, tal como se observa en un monitor de vídeo. *(Stanford Linear Accelerator, U.S. Department of Energy.)*

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos

1. Dibuje el electrón en sus posiciones inicial y final para cada uno de los tres intervalos de su movimiento (figura 2.17). Señale los parámetros cinemáticos y dibuje el eje de coordenadas.

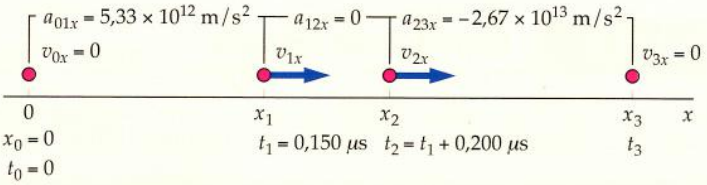


FIGURA 2.17

2. Si el electrón parte del reposo, $v_{0x} = 0$. Use las ecuaciones 2.12 y 2.14 para determinar la posición x_1 y v_{1x} al final del primer intervalo de 0,150 μs.
3. La aceleración es cero durante el segundo intervalo, por lo que la velocidad es constante.
4. Si la velocidad es constante durante el segundo intervalo, el desplazamiento Δx_{12} es igual a la velocidad, v_{1x} multiplicada por 0,200 μs.
5. Para calcular el desplazamiento durante el tercer intervalo, use la ecuación 2.15 con $v_{3x} = 0$.

Respuestas

$x_1 = 6{,}00\ \text{cm}$, $v_{1x} = 8{,}00 \times 10^5\ \text{m/s}$

$v_{2x} = v_{1x} = 8{,}00 \times 10^5\ \text{m/s}$

$\Delta x_{12} = 16{,}0\ \text{cm}$; por lo tanto, $x_2 = 22{,}0\ \text{cm}$

$\Delta x_{23} = 1{,}20\ \text{cm}$; por lo tanto, $x_3 =$ **23,2 cm**

COMPROBACIÓN Las velocidades medias son grandes, pero los intervalos de tiempo son pequeños, por lo que las distancias recorridas son modestas, como era de esperar.

Algunas veces para tener una idea del movimiento de un objeto conviene utilizar las formulas con aceleración constante aunque en realidad la aceleración varíe. Los resultados son sólo aproximaciones, no cálculos exactos. Este es el caso del ejemplo siguiente:

Ejemplo 2.12 El choque de prueba — *Póngalo en su contexto*

Un coche que va a 100 km/h choca contra una pared de hormigón rígida. ¿Cuál es su aceleración?

(© 1994 General Motors Corporation, all rights reserved GM Archives.)

PLANTEAMIENTO En este ejemplo no es correcto considerar el coche como una partícula, ya que las distintas partes del mismo sufrirán aceleraciones distintas al arrugarse sobre la pared. El parachoques delantero se para de forma casi instantánea mientras que el trasero lo hace posteriormente. Resolveremos el problema para la parte del coche que no se arruga, la que ocupa el conductor, y que está representada por el tornillo que fija el asiento al chasis. Realmente no esperamos que la aceleración de este tornillo sea constante. Para resolver este problema necesitamos más información: la distancia de detención o el tiempo de detención del coche. Podemos estimar la distancia de detención utilizando el sentido común. Después del impacto, el centro del coche se desplazará hacia adelante algo menos que la mitad de la longitud del coche. Tomaremos para nuestra estimación el valor razonable de 0,75 m. Como el problema no nos proporciona el tiempo, utilizaremos la relación $v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x \Delta x$.

SOLUCIÓN

1. Represente el tornillo mediante un círculo pequeño en sus posiciones final e inicial (figura 2.18). Incluya un eje de coordenadas y señale los parámetros cinemáticos:

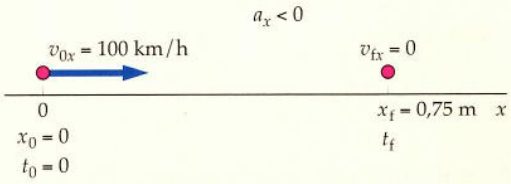


FIGURA 2.18

2. Convertir la velocidad expresada en km/h en m/s:

$$(100\ \cancel{\text{km}}/\cancel{\text{h}}) \times \left(\frac{1\ \cancel{\text{h}}}{60\ \cancel{\text{min}}}\right) \times \left(\frac{1\ \cancel{\text{min}}}{60\ \text{s}}\right) \times \left(\frac{1000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}}\right) = 27{,}8\ \text{m/s}$$

3. Usando $v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x \Delta x$, obtener la aceleración:

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x \Delta x$$

por lo tanto

$$a_x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2\Delta x} = \frac{0^2 - (27{,}8\ \text{m/s})^2}{2(0{,}75\ \text{m})}$$

4. Completar el cálculo de la aceleración:

$$a_x = -\frac{(27{,}8\ \text{m/s})^2}{1{,}5\ \text{m}} = -514\ \text{m/s}^2 \approx \boxed{-500\ \text{m/s}^2}$$

COMPROBACIÓN Obsérvese que el módulo de esta aceleración es superior a 50 g. Este resultado es plausible, ya que se espera que se pongan en juego aceleraciones grandes cuando se produce una colisión a altas velocidades.

PROBLEMA PRÁCTICO 2.4 Estime el tiempo que tarda el coche en detenerse.

Caída libre Muchos problemas prácticos se refieren a objetos en caída libre, es decir, objetos que caen bajo la única influencia de la gravedad. Todos los objetos en caída libre que parten de la misma velocidad inicial se mueven de forma idéntica. Como se ve en la figura 2.19, se sueltan desde el reposo, simultáneamente, una pluma y una manzana en una cámara de vacío, de modo que caen con el mismo movimiento. Ambos objetos tienen la misma aceleración. El módulo de la aceleración causada por la gravedad se designa por g, cuyo valor aproximado es $a = g \approx 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 32{,}2\ \text{ft/s}^2$. Como g es el módulo de una aceleración, siempre es positiva. Si la dirección hacia abajo se considera positiva $+y$, la aceleración debida a la gravedad es $a_y = +g$; si se considera positiva hacia arriba, entonces $a_y = -g$.

FIGURA 2.19 Se dejan caer simultáneamente una manzana y una pluma en el vacío. Ambas describen el mismo movimiento. *(James Sugar/Black Star.)*

> ! Como g es el *módulo* de la aceleración, g es *siempre* positiva.

Ejemplo 2.13 El birrete volador

Un estudiante de física contento por su graduación lanza su birrete hacia arriba con una velocidad inicial de 14,7 m/s. Considerando que su aceleración es 9,81 m/s² hacia abajo (despreciamos la resistencia del aire), (*a*) ¿cuánto tiempo tardará el birrete en alcanzar su punto más alto? (*b*) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada? (*c*) Suponiendo que el birrete se recoge a la misma altura de la que ha salido, ¿cuánto tiempo permanece en el aire?

PLANTEAMIENTO Cuando el birrete alcanza su punto más alto, su velocidad instantánea es cero. Así convertimos la expresión "punto más alto" a la condición matemática $v_y = 0$.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Dibujar el birrete en su posición inicial y en el punto más alto de su trayectoria. Incluir un eje de coordenadas y señalar el origen y las dos posiciones del birrete:

2. El tiempo se relaciona con la velocidad y la aceleración:
$$v_y = v_{0y} + a_y t$$

3. Calcular $v_y = 0$ y despejar t:
$$t = \frac{0 - v_{0y}}{a_y} = \frac{-14{,}7\ \text{m/s}}{-9{,}81\ \text{m/s}^2} = \boxed{1{,}50\ \text{s}}$$

(*b*) Determinar la distancia recorrida a partir del tiempo t y la velocidad media:
$$\Delta y = v_{m\,y} t = \tfrac{1}{2}(v_{0y} + v_y)\Delta t$$
$$= \tfrac{1}{2}(14{,}7\ \text{m/s} + 0)(1{,}50\ \text{s}) = \boxed{11{,}0\ \text{m}}$$

(*c*) 1. Calcular $y = y_0$ en la ecuación 2.14 y despejar t:
$$\Delta y = v_{0_y} t + \tfrac{1}{2} a_y t^2$$
$$0 = (v_{0y} + \tfrac{1}{2} a_y t)t$$

2. Hay dos soluciones para t cuando $y = y_0$. La primera corresponde al tiempo en que se lanza el birrete y la segunda corresponde al tiempo en que se recoge:
$$t = 0 \qquad \text{(primera solución)}$$
$$t = -\frac{2v_{0y}}{a_y} = -\frac{2(14{,}7\ \text{m/s})}{-9{,}81\ \text{m/s}^2} = \boxed{3{,}00\ \text{s}} \qquad \text{(segunda solución)}$$

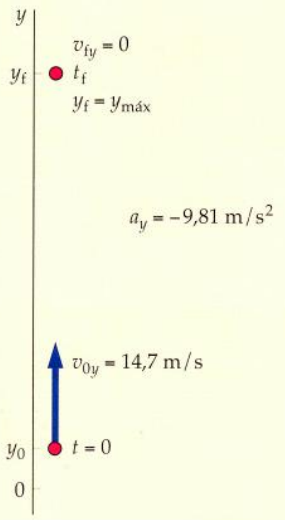


FIGURA 2.20

COMPROBACIÓN Cuando el birrete sube, su velocidad disminuye con una tasa de 9,81 m/s cada segundo. Su velocidad inicial es 14,7 m/s, por lo que esperamos que su ascenso dure más de 1,0 s, pero menos de 2,0. Por lo tanto, si sube 1,5 s nos parece razonable.

OBSERVACIÓN En la figura 2.21*b* se representa la velocidad frente al tiempo. Obsérvese que la pendiente es constante, incluso cuando $v_y = 0$. La pendiente es la aceleración instantánea, una constante que vale $-9{,}81\ \text{m/s}^2$. En el gráfico de la figura 2.21*a* se representa la altura frente al tiempo, siendo el tiempo de ascenso el mismo que el tiempo de descenso. En realidad, la aceleración del birrete no es constante, ya que la resistencia del aire produce un efecto significativo sobre un objeto ligero como el birrete. Si no se puede despreciar la resistencia del aire, la caída será más larga que el ascenso.

PROBLEMA PRÁCTICO 2.5 Hallar $y_{máx} - y_0$ usando la ecuación 2.15. Determinar la velocidad del birrete cuando llega de nuevo al punto de partida.

PROBLEMA PRÁCTICO 2.6 ¿Cuál es la velocidad del birrete en los siguientes instantes de tiempo? (*a*) 0,100 s antes de que llegue al punto más alto; (*b*) 0,100 s después de que haya pasado por el punto más alto. (*c*) Calcular $\Delta v_y / \Delta t$ durante este intervalo de tiempo de 0,200 s.

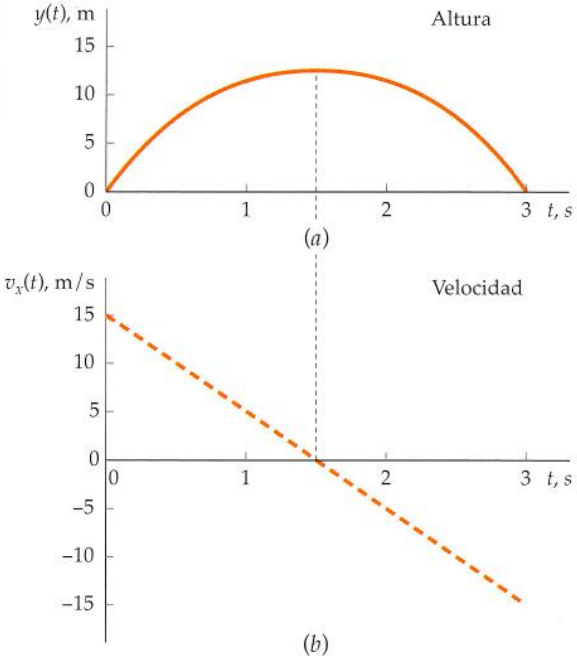


FIGURA 2.21 Se representan, uno encima del otro, los gráficos de la altura y la velocidad de forma que pueden verse el valor de ambos parámetros en el mismo instante de tiempo.

Problemas con dos objetos A continuación, exponemos algunos problemas que incluyen dos objetos que se mueven con aceleración constante.

Ejemplo 2.14 A la caza de un coche con exceso de velocidad

Un coche lleva una velocidad de 25 m/s (= 90 km/h) en una zona escolar. Un coche de policía, que está parado, arranca cuando el infractor le adelanta y acelera con una aceleración constante de 5 m/s². (*a*) ¿Cuánto tiempo tarda el coche de policía en alcanzar al vehículo infractor? (*b*) ¿Qué velocidad lleva el coche de policía cuando le alcanza?

PLANTEAMIENTO Para determinar cuando los dos coches se encuentran en la misma posición, expresamos las posiciones x_S del vehículo infractor y x_P del coche de policía en función del tiempo y despejamos t para $x_S = x_P$. Cuando ya sabemos cuando el coche de policía alcanza al infractor, podemos determinar la velocidad del coche de policía en el momento en que alcanza al coche infractor usando la ecuación $v_x = a_x t$.

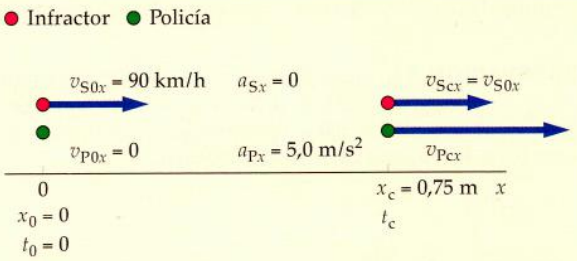


FIGURA 2.22 El coche del infractor y del policía tienen la misma posición cuando $t = 0$ y, de nuevo, cuando $t = t_c$.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Dibuje los dos coches en sus posiciones iniciales ($t = 0$) y finales ($t = t_0$) (figura 2.22). Incluya un eje de coordenadas y señale los parámetros cinemáticos:

2. Escriba las funciones de posición del infractor y del policía: $x_S = v_{Sx}t$ y $x_P = \frac{1}{2}a_{Px}t^2$

3. Hacer $x_S = x_P$ y resolver para el tiempo t_c para $t_c > 0$:

$$v_{Sx}t_c = \tfrac{1}{2}a_{Px}t_c^2 \Rightarrow v_{Sx} = \tfrac{1}{2}a_{Px}t_c \qquad t_c \neq 0$$

$$t_c = \frac{2v_{Sx}}{a_{Px}} = \frac{2(25\text{ m/s})}{5{,}0\text{ m/s}^2} = \boxed{10\text{ s}}$$

(*b*) La velocidad del coche de policía viene expresada por $v_x = v_{0x} + a_x t$, donde $v_{0x} = 0$:

$$v_{Px} = a_{Px}t_c = (5{,}0\text{ m/s}^2)(10\text{ s}) = \boxed{50\text{ m/s}}$$

COMPROBACIÓN La velocidad final del coche de policía en (*b*) es, exactamente, el doble que la del coche infractor. Como los dos coches cubren la misma distancia en igual tiempo, ambos hicieron el recorrido con igual velocidad media. La velocidad media del infractor es, por supuesto, de 25 m/s. Como el policía parte del reposo y su velocidad media es de 25 m/s, debe alcanzar una velocidad final de 50 m/s.

PROBLEMA PRÁCTICO 2.7 ¿Qué distancia han recorrido los coches cuando el policía alcanza al infractor?

Ejemplo 2.15 El coche de policía

Inténtelo usted mismo

¿Qué velocidad lleva el coche de policía del ejemplo 2.14 cuando se encuentra a 25 m por detrás del vehículo infractor?

PLANTEAMIENTO La velocidad viene expresada por $v_P = a_x t_1$, donde t_1 es el tiempo en el cual $x_S - x_P = 25$ m.

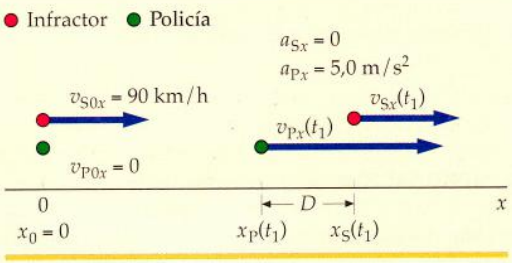


FIGURA 2.23

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos

1. Dibujar una curva x-t que muestre las posiciones de los dos coches (figura 2.23). En este gráfico identificar la distancia $D = x_S - x_P$ entre los dos coches para un instante dado.

Respuestas

2. Utilizar las ecuaciones para x_P y x_S del ejemplo 2.14 y despejar t_1 cuando $x_S - x_P = 25$ m. Hay dos soluciones, una que corresponde a pocos instantes después del inicio del movimiento y otra que corresponde a poco antes de que el vehículo con exceso de velocidad sea alcanzado. — $t_1 = (5 \pm \sqrt{15})$ s
3. Utilizar $v_{P1} = a_{Px}t_1$ para calcular la velocidad del coche de policía cuando $x_S - x_P = 25$ m. — $v_{P1} =$ 5,64 m/s y 44,4 m/s

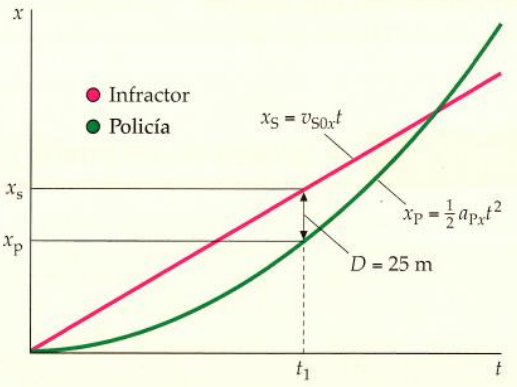


FIGURA 2.24

COMPROBACIÓN En la figura 2.24 se observa que la distancia entre los dos coches al principio es cero, crece hasta un valor máximo y luego disminuye. Para una determinada distancia de separación esperamos dos velocidades distintas.

OBSERVACIÓN La separación en cualquier momento viene dada por $D = x_S - x_P = v_{Sx}t - \frac{1}{2}a_{Px}t^2$. Cuando la separación es máxima, $dD/dt = 0$, lo cual ocurre en el instante $t = 5{,}0$ s. Para intervalos de tiempo iguales antes y después de $t = 5{,}0$ s, las separaciones son las mismas.

Ejemplo 2.16 Un ascensor en movimiento

Una persona en un ascensor ve un tornillo que cae del techo. La altura del ascensor es de 3 m. ¿Cuánto tiempo tarda el tornillo en chocar contra el suelo si el ascensor asciende con una aceleración constante = 4,0 m/s²?

PLANTEAMIENTO Cuando el tornillo llegue al suelo, la posición del tornillo y el suelo son la misma. Iguale las posiciones y despeje el tiempo.

SOLUCIÓN

1. Dibujar un diagrama que muestre las posiciones inicial y final del tornillo y del suelo del ascensor (Figura 2.25). Incluya un eje de coordenadas y señale los parámetros cinemáticos. El tornillo y el suelo tienen la misma velocidad inicial, pero diferentes aceleraciones. Escoger como origen la posición inicial del suelo y elegir la dirección hacia arriba como la dirección y positiva. El tornillo llega al suelo al tiempo t_f:

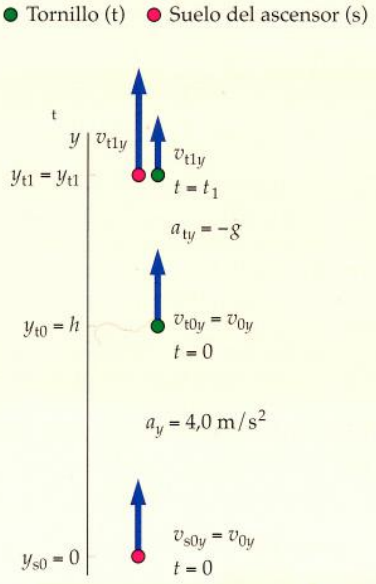


FIGURA 2.25 El eje y está fijado al edificio.

2. Escribir las ecuaciones que especifiquen la posición y_s del suelo del ascensor y la posición y_t del tornillo. Ambos tienen la misma velocidad inicial v_{0y}:

$$y_s - y_{s0} = v_{s0y}t + \tfrac{1}{2}a_{sy}t^2$$
$$y_s - 0 = v_{0y}t + \tfrac{1}{2}a_{sy}t^2$$
$$y_t - y_{t0} = v_{t0y}t + \tfrac{1}{2}a_{ty}t^2$$
$$y_t - h = v_{0y}t + \tfrac{1}{2}(-g)t^2$$

3. Igualar las expresiones para y_s cuando y_t a $t = t_f$ y simplificar:

$$y_t = y_s$$
$$h + v_{0y}t_f - \tfrac{1}{2}gt_f^2 = v_{0y}t_f + \tfrac{1}{2}a_{sy}t_f^2$$
$$h - \tfrac{1}{2}gt_f^2 = \tfrac{1}{2}a_{sy}t_f^2$$

4. Despejar el tiempo y sustituir los valores:

$$h = \tfrac{1}{2}(a_s + g)t_f^2 \quad \text{por lo tanto}$$
$$t_f = \sqrt{\frac{2h}{a_s + g}} = \sqrt{\frac{2(3{,}0\text{ m})}{4{,}0\text{ m/s}^2 + 9{,}81\text{ m/s}^2}} = 0{,}659\text{ s} = \boxed{0{,}66\text{ s}}$$

COMPROBACIÓN Si el ascensor fuera estacionario, la distancia que cae el tornillo sería $h = \frac{1}{2}gt_f^2$. Si $h = 3{,}0$ m, el tiempo que tarda en llegar al suelo es $t_f = 0{,}78$ s. A causa de la aceleración del ascensor, esperamos que el tornillo tarde menos en caer. El resultado que se ha obtenido satisface esta suposición.

Ejemplo 2.17 Un ascensor en movimiento — *Inténtelo usted mismo*

Considerar el ascensor y el tornillo del ejemplo 2.16. Suponer que la velocidad de subida del ascensor es de 16 m/s cuando el tornillo se desprende del techo y empieza a caer. (*a*) ¿Qué distancia recorre el ascensor mientras el tornillo cae? ¿Qué distancia recorre el tornillo? (*b*) ¿Cuál es la velocidad del tornillo y del ascensor en el momento del impacto de aquél en el suelo?

PLANTEAMIENTO El tiempo de vuelo del tornillo se ha obtenido en la solución del ejemplo 2.16. Usar este tiempo para resolver los apartados (*a*) y (*b*).

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	Respuestas
(*a*) 1. Usar la ecuación 2.13 para calcular la distancia que se mueve el suelo del ascensor entre el tiempo $t = 0$ y $t = t_f$, donde t_f se ha calculado en el paso 4 del ejemplo 2.16.	$\Delta y_s = v_{si}t_f + \frac{1}{2}a_s t_f^2 =$ **11,4 m**
2. Entre $t = 0$ y $t = t_f$, el desplazamiento del tornillo es inferior al del suelo en unos 3,0 m.	$\Delta y_t =$ **+8,4 m**
(*b*) Usar la ecuación 2.12, $v_y = v_{0y} + a_y t$, para encontrar la velocidad del impacto del tornillo con el suelo del ascensor.	$v_{ty} = v_{tiy} - gt_f =$ **9,5 m/s** $v_{sy} = v_{siy} + a_{sy}t_f =$ **19 m/s**

COMPROBACIÓN Los resultados del apartado (*b*) para la velocidad del tornillo y del suelo del ascensor en el momento del impacto, son ambos positivos indicando que las dos velocidades van hacia arriba. Para que se dé el impacto el ascensor debe moverse más rápido que el tornillo. Este resultado es consistente con lo que se ha obtenido en el apartado (*b*).

OBSERVACIÓN El tornillo impacta con el suelo del ascensor 8,4 m por encima de su posición inicial. Con respecto al edificio, en el momento del contacto, el tornillo todavía está subiendo. Obsérvese que en el momento del impacto la velocidad del tornillo relativa al edificio es positiva.

2.4 INTEGRACIÓN

En esta sección usamos el cálculo integral para derivar las ecuaciones del movimiento. Puede encontrarse un tratamiento conciso del cálculo en el Apéndice de Matemáticas.

Para determinar la velocidad a partir de una determinada aceleración, observemos que la velocidad es la función $v_x(t)$ cuya derivada es la aceleración $a_x(t)$:

$$\frac{dv_x(t)}{dt} = a_x(t)$$

Si la aceleración es constante, la velocidad es aquella función del tiempo que cuando se deriva es igual a esta constante. Por ejemplo

$$v_x = a_x t \qquad a_x \text{ es constante}$$

De un modo más general, podemos añadir a la función $a_x t$ cualquier constante sin que se modifique la derivada respecto al tiempo. Llamando c a esta nueva constante, resulta

$$v_x = a_x t + c$$

Cuando $t = 0$, $v_x = c$. Así pues, c es la velocidad inicial v_{0x}.

Análogamente, la función posición $x(t)$ es aquella función cuya derivada es la velocidad:

$$\frac{dx}{dt} = v_x = v_{0x} + a_x t$$

Cada uno de estos términos puede tratarse separadamente. La función cuya derivada es una constante v_{0x} es $v_{0x}t$ más cualquier constante. La función cuya derivada es $a_x t$ es $\frac{1}{2}at^2$ más cualquier constante. Llamando x_0 a la suma combinada de todas estas constantes arbitrarias, resulta

$$x = x_0 + v_{0x}t + \tfrac{1}{2}at_x^2$$

Cuando $t = 0$, $x = x_0$. Así pues, x_0 es la posición inicial.

Siempre que se obtiene una función a partir de su derivada, debe añadirse una constante arbitraria en la función general. Como para obtener $x(t)$ a partir de la aceleración debemos integrar dos veces, aparecen dos constantes. Normalmente estas constantes se determinan a partir de la velocidad y la posición iniciales en un instante determinado. Generalmente se elige el instante en que $t = 0$. Por ello, estas constantes reciben el nombre de **condiciones iniciales**. Un problema común llamado **problema del valor inicial** toma la forma: "dado $a_x(t)$ y los valores iniciales de x y de v_x determinar $x(t)$". Este problema es particularmente importante en física porque la aceleración de una partícula está determinada por las fuerzas que actúan sobre ella. Así pues, si conocemos las fuerzas que actúan sobre una partícula y su posición y velocidad en un instante determinado, podemos hallar su posición en cualquier otro instante.

Una función $F(t)$ cuya derivada (respecto a t) es igual a la función $f(t)$ se denomina **antiderivada** de $f(t)$. (Ya que $v_x = dx/dt$ y $a_x = dv_x/dt$, x es la antiderivada de v_x y v_x es la antiderivada de a_x.) El problema de la antiderivada está relacionado con el de la obtención del área bajo una curva.

Al obtener la ecuación 2.14 se demostró que el cambio en la posición Δx es igual al área bajo la curva velocidad-tiempo. Para demostrar esto (véase la figura 2.12) vemos que el área bajo la curva puede aproximarse dividiendo el intervalo de tiempo en cierto número de pequeños intervalos Δt_1, Δt_2, etc., y trazando una serie de áreas rectangulares. El área del rectángulo correspondiente al intervalo de tiempo Δt_i es $v_{ix}\,\Delta t_i$, el cual es aproximadamente igual al desplazamiento Δx_i durante el intervalo Δt_i. La suma de las áreas de los rectángulos es, por lo tanto, la suma de los desplazamientos realizados durante los intervalos de tiempo correspondientes y es aproximadamente igual al desplazamiento total desde el instante t_1 al t_2. Matemáticamente, escribiremos esto en la forma

$$\Delta x \approx \sum_i v_{ix}\,\Delta t_i$$

donde la letra $\sum$ (sigma mayúscula) representa una "suma". Podemos hacer la aproximación tan exacta como queramos escogiendo suficientes rectángulos bajo la curva, cada uno de los cuales corresponde a un valor pequeño de Δt. En el límite correspondiente a intervalos de tiempo cada vez más pequeños, esta suma es igual al área comprendida bajo la curva, que equivale, por lo tanto, al desplazamiento. Este límite se denomina **integral** y se escribe del modo siguiente.

$$\Delta x = x(t_2) - x(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\sum_i v_{ix}\,\Delta t_i\right) = \int_{t_1}^{t_2} v_x\,dt \qquad 2.17$$

Véase el **Apéndice de matemáticas** *para más información sobre* **Integrales**

Es útil imaginar que el signo integral $\int$ es una S alargada que indica una suma. Los límites t_1 y t_2 indican los valores inicial y final de la variable de integración t.

El proceso de calcular una integral se llama **integración**. En la ecuación 2.17, v_x es la derivada de x, y x es la antiderivada de v_x. Éste es un ejemplo del teorema fundamental de cálculo, cuya formulación durante el siglo XVII aceleró el desarrollo matemático de la física:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt}, \quad \text{entonces} \quad F(t_2) - F(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt \qquad 2.18$$

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

La antiderivada de una función se denomina también integral indefinida de la función y se escribe sin límites sobre el signo integral:

$$x = \int v_x\,dt$$

La operación de determinar x a partir de la derivada v_x (es decir, determinar la antiderivada) se llama también integración. Por ejemplo, si $v_x = v_{0x}$ (una constante) entonces,

$$x = \int v_{0x}\,dt = v_{0x}t + x_0$$

donde x_0 es la constante arbitraria de integración. A partir de la ecuación 2.6 que expresa la regla general para la derivada de una potencia, podemos determinar una regla general para la integración de una potencia de t. El resultado es

$$\int t^n\,dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1 \qquad 2.19$$

donde C es una constante arbitraria. Puede comprobarse fácilmente derivando el segundo miembro mediante la regla de la ecuación 2.6. (Y para el caso especial $n = -1$, $\int t^{-1}dt = \ln t + C$, donde $\ln t$ es el logaritmo natural de t.)

Dado que $a_x = dv_x/dt$, el cambio de velocidad durante cierto intervalo de tiempo puede interpretarse análogamente como el área bajo la curva a_x en función de t en dicho intervalo. Así se escribe

$$\Delta v_x = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\sum_i a_{ix}\,\Delta t_i\right) = \int_{t_1}^{t_2} a_x\,dt \qquad 2.20$$

Así pueden deducirse las ecuaciones de la aceleración constante calculando las integrales indefinidas de la aceleración y la velocidad. Si a_x es constante, tenemos

$$v_x = \int a_x dt = a_x \int dt = v_{0x} + a_x t \qquad 2.21$$

donde hemos escrito en primer lugar la constante de integración v_{0x}. Integrando de nuevo y llamando x_0 a la constante de integración, resulta

$$x = \int (v_{0x} + a_x t)dt = x_0 + v_{0x}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 \qquad 2.22$$

Es instructivo deducir las ecuaciones 2.21 y 2.22 usando integrales definidas en vez de integrales indefinidas. Si la aceleración es constante, la ecuación 2.20, cuando $t_1 = 0$, nos da

$$v_x(t_2) - v_x(0) = a_x \int_0^{t_2} dt = a_x(t_2 - 0)$$

donde el tiempo t_2 es arbitrario. Como es arbitrario, se puede considerar $t_2 = t$, y se obtiene

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$

donde $v_x = v_x(t)$ y $v_{0x} = v_x(0)$. Para obtener la ecuación 2.22, se sustituye $v_{0x} + a_x t$ por v_x en la ecuación 2.17 con $t_1 = 0$. Esto nos lleva a

$$x(t_2) - x(0) = \int_0^{t_2} (v_{0x} + a_x t)dt$$

Esta integral es igual al área bajo la curva v_x-t (figura 2.26). Evaluando la integral y resolviendo para x nos da

$$x(t_2) - x(0) = \int_0^{t_2} (v_{0x} + a_x t)dt = v_{0x}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2\Big|_0^{t_2} = v_{0x}t_2 + \tfrac{1}{2}a_x t_2^2$$

donde t_2 es arbitrario. Poniendo $t_2 = t$, obtenemos

$$x = x_0 + v_{0x}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2$$

donde $x = x(t)$ y $x_0 = x(0)$.

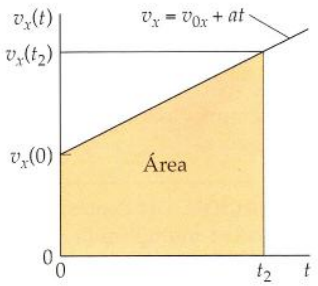


FIGURA 2.26 El área bajo la curva v_x-t es el desplazamiento $\Delta x = x(t_2) - x(0)$.

La definición de velocidad media es $\Delta x = v_{m\,x}\,\Delta t$ (ecuación 2.3). Además, $\Delta x = \int_{t_1}^{t_2} v_x\,dt$ (ecuación 2.17). Igualando estas ecuaciones y resolviendo para $v_{m\,x}$, resulta

$$v_{m\,x} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_1}^{t_2} v_x\,dt \qquad 2.23$$

DEFINICIÓN ALTERNATIVA DE VELOCIDAD MEDIA

donde $\Delta t = t_2 - t_1$. La ecuación 2.23 equivale matemáticamente a la definición de velocidad media, por lo que ambas ecuaciones sirven como definición.

Ejemplo 2.18 Un transbordador

Un transbordador lleva una velocidad constante $v_{0x} = 8{,}0$ m/s durante 60 s. A continuación, para sus motores y se acerca a la costa. Su velocidad es entonces una función del tiempo dada por la expresión $v_x = v_{0x}t_1^2/t^2$, siendo $t_1 = 60$ s. ¿Cuál es el desplazamiento del transbordador en el intervalo $0 < t < \infty$?

(Gene Mosca.)

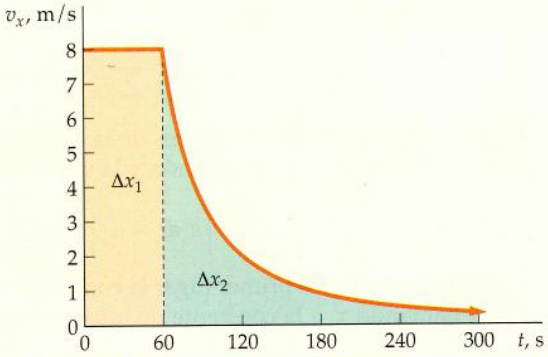


FIGURA 2.27

PLANTEAMIENTO La función velocidad viene representada por la figura 2.27. El desplazamiento total se calcula sumando el desplazamiento Δx_1 correspondiente al intervalo $0 < t < t_1 = 60$ s y el desplazamiento Δx_2 durante el intervalo $t_1 < t < \infty$.

SOLUCIÓN

1. La velocidad del transbordador es constante durante los primeros 60 segundos; así, el desplazamiento es simplemente el producto de la velocidad por el tiempo transcurrido:

$$\Delta x_1 = v_{0x}\,\Delta t = v_{0x}t_1 = (8{,}0\text{ m/s})(60\text{ s}) = 480\text{ m}$$

2. El desplazamiento restante viene dado por la integral de la velocidad desde $t = t_1$ hasta $t = \infty$. Utilizamos la ecuación 2.17 para calcular la integral:

$$\Delta x_2 = \int_{t_1}^{\infty} v_x\,dt = \int_{t_1}^{\infty} \frac{v_{0x}t_1^2}{t^2}\,dt = v_{0x}t_1^2\int_{t_1}^{\infty} t^{-2}\,dt$$

$$= v_{0x}t_1^2\left.\frac{t^{-1}}{-1}\right|_{t_1}^{\infty} = -v_{0x}t_1^2\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{t_1}\right)$$

$$= -(0 - v_0t_1) = (8\text{ m/s})(60\text{ s}) = 480\text{ m}$$

3. El desplazamiento total es la suma de los dos desplazamientos anteriores:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 480\text{ m} + 480\text{ m} = \boxed{960\text{ m}}$$

COMPROBACIÓN Las expresiones obtenidas para los desplazamientos en los pasos 1 y 2 son la velocidad multiplicada por el tiempo, por lo que ambos son dimensionalmente correctos.

OBSERVACIÓN El área bajo la curva de v en función del tiempo es finita. Así, aunque el transbordador nunca deja de moverse, viaja sólo una distancia finita. Una representación mejor de la velocidad de un buque que bordea la costa con los motores parados sería una función exponencialmente decreciente $v_x = v_{0x}e^{-b(t-t_1)}$, donde b es una constante positiva. En este caso, el buque se acercaría a la costa también una distancia finita en el intervalo $t_1 \le t \le \infty$.

Aceleradores lineales

Los aceleradores lineales son unos instrumentos que aceleran partículas cargadas eléctricamente por un largo conducto hasta que chocan con un blanco. Los grandes aceleradores proporcionan a las partículas una energía cinética grande, del orden de miles de millones de electronvolt, que sirve para estudiar las partículas fundamentales de la materia y las fuerzas que las mantienen unidas. (La energía que se requiere para extraer un electrón de un átomo es del orden del electronvolt.) En el acelerador lineal de dos millas de longitud de la Universidad de Stanford, las ondas electromagnéticas impulsan a gran velocidad a los electrones o positrones que se mueven en un tubo de cobre. Cuando las partículas chocan a gran velocidad con el blanco, se producen diversas clases de partículas subatómicas además de rayos X y rayos gamma. Estas partículas pasan por unos dispositivos de detección denominados detectores de partículas.

El cilindro de color beige del fondo es el acelerador del Naval Academy Tandem Accelerator Laboratory. Un haz de protones de gran velocidad se mueve por el acelerador hacia el blanco en primer plano. *(Gene Mosca.)*

Los experimentos con los aceleradores han permitido a los físicos determinar que los protones y los neutrones, que hace tiempo se pensaba que eran partículas elementales del núcleo atómico, están formados, a su vez, por otras partículas elementales más fundamentales denominadas quarks. Se ha identificado también otro grupo de partículas, los leptones, que incluye los electrones, los neutrinos y unas cuantas partículas más. Los centros de investigación con los aceleradores más grandes, como el Fermi National Accelerator Laboratory en Batavia, Illinois, para conseguir mayores velocidades de las partículas usan series de aceleradores lineales y circulares. A medida que la velocidad de una partícula se aproxima a la velocidad de la luz, la energía que se requiere para acelerarla hasta esta velocidad tiende a infinito.

Aunque los grandes aceleradores son los que llaman más la atención, en todo el mundo se usan miles de aceleradores lineales para numerosas aplicaciones prácticas. Una de las más comunes es el tubo de rayos catódicos (TRC) de un aparato de televisión o de un monitor de ordenador. En un tubo de rayos catódicos, electrones del cátodo (un filamento calentado) se aceleran en un entorno vacío hacia un ánodo cargado positivamente. Unos electroimanes controlan la dirección del haz de electrones que se dirigen hacia una pantalla cubierta de fósforo, un material que emite luz cuando inciden en él electrones. La energía cinética de los electrones en un tubo de rayos catódicos alcanza un máximo de 30 000 electronvolt, que corresponde a una velocidad que es un tercio de la que tendría el electrón si se moviera a la velocidad de la luz.

En la práctica médica de tratamiento radiológico del cáncer, se usan aceleradores lineales que tienen una potencia que es unas mil veces mayor que la de los tubos de rayos catódicos. "El acelerador lineal usa tecnología de microondas (similar a la usada en el radar) para acelerar electrones en una zona denominada "guía de ondas" que los impele hacia un pesado blanco de metal. Como consecuencia de las colisiones, del blanco salen rayos X de gran energía que convenientemente canalizados y con una determinada forma del haz se focalizan en el tumor del paciente".[1]

Otra aplicación de los aceleradores consiste en la producción de radioisótopos como trazadores en medicina y biología, para la esterilización de material quirúrgico, y para determinar la composición de materiales. Por ejemplo, en una técnica denominada emisión de rayos X inducida por partículas (PIXE), un haz de iones, habitualmente protones, produce la emisión de rayos X en átomos blanco lo cual permite saber de qué átomos se trata. Esta técnica se ha utilizado en el estudio de materiales arqueológicos y en una gran variedad de otra clase de muestras.

[1] The American College of Radiology and the Radiological Society of North America, http//www.radiologyinfo.org/content/therapy/linear_accelerator.htm.

Resumen

El desplazamiento, la velocidad y la aceleración son magnitudes cinemáticas *definidas* importantes.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
1. Desplazamiento	$\Delta x = x_2 - x_1$	2.1
Interpretación gráfica	El desplazamiento es el área bajo la curva v_x en función de t.	
2. Velocidad		
Velocidad media	$v_{m\,x} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ o $v_{m\,x} = \dfrac{1}{\Delta t}\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} v_x\,dt$	2.3, 2.23
Velocidad instantánea	$v_x(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{dx}{dt}$	2.5
Interpretación gráfica	La velocidad instantánea se representa gráficamente por la pendiente de la recta tangente de la curva x en función de t.	
3. Módulo de la velocidad		
Módulo de la velocidad media	Módulo de la velocidad media $= \dfrac{\text{distancia total}}{\text{tiempo total}} = \dfrac{s}{t}$	2.2
Módulo de la velocidad instantánea	Módulo de la velocidad instantánea $= \lvert v_x \rvert$	
4. Aceleración		
Aceleración media	$a_{m\,x} = \dfrac{\Delta v_x}{\Delta t}$	2.7
Aceleración instantánea	$a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$	2.9
Interpretación gráfica	La aceleración instantánea se representa gráficamente por la pendiente de la curva v_x en función del tiempo t.	
Aceleración debida a la gravedad	La aceleración de un objeto próximo a la superficie de la Tierra en caída libre bajo la influencia de la gravedad está dirigida hacia abajo y su módulo es $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 32{,}2\ \text{ft/s}^2$	
5. Ecuaciones cinemáticas para la aceleración constante		
Velocidad	$v_x = v_{0x} + a_x t$	2.12
Velocidad media	$v_{m\,x} = \frac{1}{2}(v_{0x} + v_x)$	2.16
Desplazamiento en función de $v_{m\,x}$	$\Delta x = x - x_0 = v_{m\,x} t = \frac{1}{2}(v_{0x} + v_x)t$	
Desplazamiento en función del tiempo	$\Delta x = x - x_0 = v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$	2.14
v_x^2 en función de Δx	$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x \Delta x$	2.15
6. El desplazamiento y la velocidad como integrales	El desplazamiento se representa gráficamente por el área bajo la curva v_x en función del tiempo. Esta área es la integral de v_x extendida al tiempo, desde cierto valor inicial t_1 a cierto valor final t_2, y se expresa del modo siguiente: $\Delta x = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \sum\limits_i v_{i\,x} \Delta t_i = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} v_x\,dt$	2.17
	Igualmente, el cambio de velocidad durante cierto tiempo se representa gráficamente por el área bajo la curva a_x en función de t: $\Delta v_x = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \sum\limits_i a_{i\,x} \Delta t_i = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} a_x\,dt$	2.20

Respuestas a las comprobaciones conceptuales

2.1 No. La distancia entre los dos coches no permanece constante. En cambio, la distancia disminuirá constantemente. Cuando usted empieza a frenar, la velocidad de su coche es mayor que la velocidad del coche de delante, ya que éste comenzó la frenada 0,3 s antes. Los dos coches frenan igual; por lo tanto, la velocidad de su coche siempre será mayor durante toda la frenada.

Respuesta a los problemas prácticos

2.1 1,2 m/s

2.2 (*a*) 65 km/h (*b*) 2,5 s

2.3 Sólo (*d*) tiene las mismas dimensiones a los dos lados de la ecuación. Aunque no podemos obtener la ecuación exacta a partir del análisis dimensional, podemos obtener la dependencia funcional.

2.4 54 ms

2.5 (*a*) y (*b*) $y_{máx} - y_0 = 11{,}0$ m (*c*) $-14{,}7$ m/s; obsérvese que el módulo de la velocidad final es el mismo que el inicial.

2.6 (*a*) $+0{,}981$ m/s (*b*) $-0{,}981$ m/s
(*c*) $[(-0{,}981 \text{ m/s}) - (+0{,}981 \text{ m/s}]/(0{,}200 \text{ s}) = -9{,}81 \text{ m/s}^2$

2.7 250 m

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben aportarse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

En los datos numéricos sin coma decimal se deben considerar significativos todos los dígitos, incluidos los ceros a la derecha del último diferente de cero.

Usar en todos los problemas $g = 9{,}81$ m/s² para la aceleración de la gravedad y despreciar, a menos que se indique lo contrario, el rozamiento y la resistencia del aire.

- • Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil
- •• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
- ••• Desafiante, para alumnos avanzados
- SSM La solución se encuentra en el *Manual de soluciones*

Los problemas consecutivos que están sombreados son problemas relacionados.

PROBLEMAS CONCEPTUALES

1 • ¿Cuál es la velocidad media del recorrido de "ida y vuelta" de un objeto que se lanza verticalmente hacia arriba y que vuelve a caer en el mismo sitio desde donde ha sido lanzado?

2 • Un objeto lanzado verticalmente hacia arriba vuelve al suelo T segundos más tarde. Su altura máxima es H metros y su altura en el momento de soltarlo es despreciable. También es despreciable la resistencia del aire. El módulo de su velocidad media durante estos T segundos es: (*a*) H/T, (*b*) 0, (*c*) $H/(2T)$, (*d*) $2H/T$.

3 • Usando la información del problema anterior, ¿cuál es el módulo de la velocidad media durante la primera mitad del recorrido? ¿Cuál es el módulo de la velocidad media durante la segunda mitad del recorrido? (Dar la respuesta en función de H y T.)

4 • Dé un ejemplo de la realidad cotidiana de un movimiento en una dimensión donde (*a*) la velocidad sea positiva y la aceleración sea negativa, y (*b*) donde la velocidad sea positiva y la aceleración sea positiva.

5 • Póngase en el centro de una habitación espaciosa. Considere que el movimiento hacia su derecha es positivo y el movimiento hacia su izquierda, negativo. Muévase por la habitación en línea recta con una aceleración constante para alcanzar rápidamente una velocidad estacionaria en la dirección negativa. Una vez alcanzada la velocidad estacionaria, mantenga la velocidad negativa pero con aceleración positiva. (*a*) Describa cómo varía su velocidad a medida que se mueve. (*b*) Dibuje un gráfico x-t del movimiento suponiendo que ha empezado en $x = 0$. (*c*) Directamente en el gráfico del apartado (*b*) dibuje un gráfico v_x-t. SSM

6 • Verdadero o falso: El desplazamiento *siempre* es igual al producto de la velocidad media por el tiempo. Explique la respuesta.

7 • Verdadero o falso: Para que la velocidad sea constante, la aceleración *debe ser* cero. Explique la respuesta.

8 •• **MÚLTIPLES PASOS** Dibuje cuidadosamente los gráficos que representan la posición, la velocidad y la aceleración en un periodo de tiempo $0 \leq t \leq 30$ s para un automóvil que se mueve a velocidad constante de 5,0 m/s en la dirección $+x$. Pasa por el origen cuando $t = 0{,}0$ s. Durante 5,0 s sigue a 5 m/s, después acelera durante 10,0 s a una tasa de 0,50 m/s por cada segundo. A partir de entonces, el automóvil pierde velocidad a una tasa de 0,50 m/s durante los 15,0 segundos restantes.

9 • Verdadero o falso: La velocidad media siempre se calcula como la semisuma de las velocidades final e inicial. Explique la respuesta.

10 • Dos hermanos gemelos idénticos lanzan simultáneamente dos piedras al agua desde un puente horizontal. Una piedra llega al agua antes que la otra. ¿Puede darse esta situación? Explique qué es lo que han hecho diferente. Ignore los efectos de la resistencia del aire.

11 •• El Dr. Josiah S. Carberry está en lo alto de la torre Sears en Chicago. Con el objetivo de emular a Galileo, e ignorando la seguridad de los peatones que se mueven en la zona cercana a la base del edificio, suelta una bola desde lo más alto del edificio. Un segundo más tarde suelta una segunda bola. Mientras las bolas están en el aire, su separación (*a*) ¿aumenta con el tiempo, (*b*) disminuye, o (*c*) se mantiene constante? Ignórense los efectos de la resistencia del aire. SSM

12 •• ¿Cuál de las curvas posición-tiempo de la figura 2.23 describe mejor el movimiento de un objeto sometido (*a*) a una aceleración positiva, (*b*) con velocidad constante positiva, (*c*) que está siempre en re-

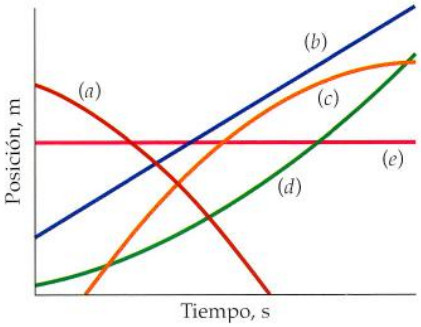


FIGURA 2.28
Problema 12

poso y (*d*) con aceleración negativa? (Puede haber más de una respuesta correcta en cada parte del problema.)

13 •• ¿Cuál de las curvas velocidad-tiempo de la figura 2.29 describe mejor el movimiento de un objeto sometido (*a*) a una aceleración constante y positiva, (*b*) con una aceleración positiva que decrece con el tiempo, (*c*) con una aceleración positiva que aumenta con el tiempo, y (*d*) sin aceleración? (Puede haber más de una respuesta correcta en cada parte del problema.) SSM

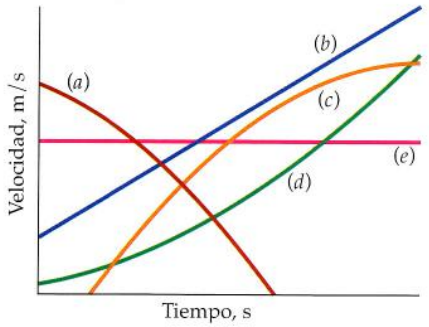


FIGURA 2.29 Problema 13

14 •• El diagrama de la figura 2.30 representa la trayectoria de un objeto que se mueve en línea recta a lo largo del eje x. Suponiendo que el objeto se encuentra en el origen ($x_0 = 0$) en $t = 0$. De los cinco tiempos que se muestran, ¿qué tiempo (o tiempos) representa cuando el objeto está (*a*) lo más alejado del origen, (*b*) en reposo por un instante, (*c*) en el medio de estar en reposo por un cierto tiempo, y (*d*) alejándose del origen?

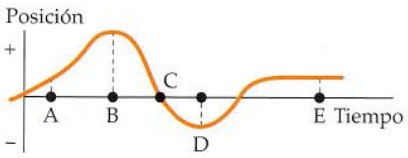


FIGURA 2.30 Problemas 14 y 15

15 •• Un objeto se mueve a lo largo del eje x como indica la figura 2.30 en un gráfico posición-tiempo. ¿Para qué tiempo o tiempos (*a*) la velocidad es máxima, (*b*) la aceleración es positiva, y (*c*) la velocidad negativa? SSM

16 •• En cada uno de los cuatro gráficos de x en función de t de la figura 2.31 indicar: (*a*) si la velocidad en el instante t_2 es mayor, menor o igual que la velocidad en el instante t_1, (*b*) si el módulo de la velocidad en el tiempo t_2 es mayor, menor o igual que en el tiempo t_1.

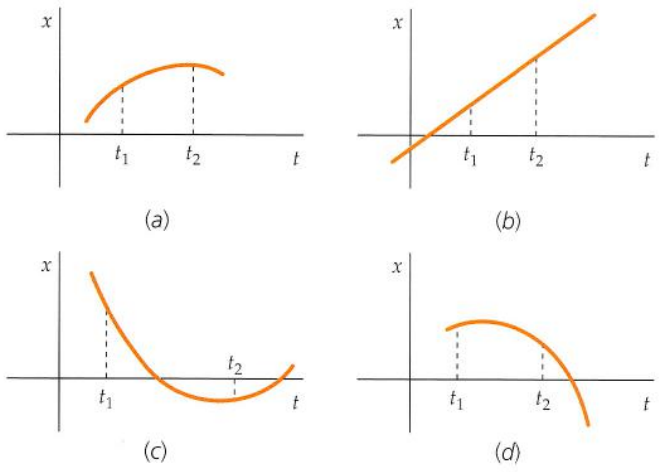


FIGURA 2.31 Problema 16

17 •• Verdadero o falso:

(*a*) Si la aceleración es cero, la partícula no puede estar moviéndose.
(*b*) Si la aceleración es cero, la curva x en función de t es una línea recta.
(*c*) Si la aceleración es distinta de cero en un instante, en este instante el objeto puede estar en reposo.

Explicar los argumentos para cada respuesta. Si la respuesta es *verdadero*, dar un ejemplo.

18 •• Una pelota de tenis se mueve horizontalmente cuando golpea contra una pared vertical de hormigón de un frontón con incidencia perpendicular y rebota. Desprecie cualquier efecto debido a la gravedad durante el breve intervalo de tiempo del rebote. Suponga que la dirección hacia la pared es positiva $+x$. ¿Cuáles son las direcciones de la velocidad y de la aceleración, (*a*) antes de chocar con la pared, (*b*) en el momento del choque y, (*c*) inmediatamente después del choque?

19 •• Se lanza una pelota hacia arriba verticalmente. Despreciar cualquier efecto debido a la resistencia del aire. (*a*) ¿Cuál es su velocidad en el punto más alto de su movimiento? (*b*) ¿Cuál es la aceleración en ese punto? (*c*) ¿Qué es diferente respecto a la velocidad y la aceleración en el punto más alto del movimiento si la bola choca y rebota contra el techo? SSM

20 •• Se lanza hacia arriba un objeto desde el suelo, alcanza una altura H y cae T segundos más tarde en el mismo sitio donde había salido. Despreciar cualquier efecto debido a la resistencia del aire. (*a*) Expresar el módulo de la velocidad media para todo el recorrido en función de H y T. (*b*) Expresar el módulo de la velocidad media para el mismo intervalo de tiempo en función de la velocidad inicial v_0.

21 •• Se lanza hacia arriba una pequeña bola de plomo. Verdadero o falso: (Despreciar cualquier efecto debido a la resistencia del aire.) (*a*) El módulo de su aceleración disminuye durante el camino ascendente. (*b*) La dirección de su aceleración cuando va hacia arriba es opuesta a la dirección de la aceleración cuando cae de vuelta. (*c*) La dirección de la velocidad cuando cae es opuesta a la dirección de la velocidad cuando la bola está subiendo.

22 •• En el instante $t = 0$, un objeto A se deja caer desde el tejado de una casa. En el mismo instante, otro objeto B se deja caer desde una ventana a 10 m por debajo del tejado. La resistencia del aire es despreciable. Durante el descenso de B al suelo la distancia entre los dos objetos (*a*) es proporcional a t, (*b*) es proporcional a t^2, (*c*) decrece, (*d*) permanece igual a 10 m constantemente.

23 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Un automóvil Porsche acelera uniformemente de 80,5 km/h en el instante $t = 0$ hasta 113 km/h en $t = 9$ s. (*a*) ¿Qué gráfico de la figura 2.32 representa mejor el movimiento del coche? (*b*) Dibujar el gráfico posición-tiempo mostrando la posición del coche durante los nueve segundos, suponiendo que en $t = 0$ su posición es $x = 0$.

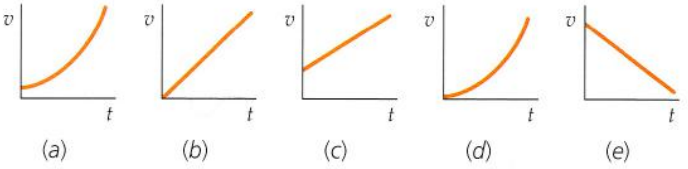


FIGURA 2.32 Problema 23

24 •• Un objeto cae, partiendo del reposo, y recorre una distancia D en un tiempo T. Si el tiempo de la caída fuera el doble, $2T$: (*a*) ¿cuál será la distancia recorrida desde su posición inicial?, (*b*) ¿cuál será su velocidad?, y (*c*) ¿cuál será su aceleración? (Despreciar la resistencia del aire.)

25 •• En un determinado instante de una carrera, dos caballos corren uno junto al otro en la misma dirección (la dirección $+x$). La velocidad y la aceleración instantánea del caballo A son +10 m/s y +2,0 m/s^2, respectivamente, y la velocidad y la aceleración instantánea del caballo B son +12 m/s y −1,0 m/s^2, respectivamente. ¿Cuál de los dos caballos está adelantando al otro? Explique la respuesta.

26 •• Verdadero o falso: (*a*) La ecuación $x - x_0 = v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$ es válida para todo movimiento de partículas en una dimensión. (*b*) Si la velocidad en un instante determinado es cero, la aceleración en dicho instante también debe ser cero. (*c*) La ecuación $\Delta x = v_m \Delta t$ es válida para todo movimiento en una dimensión.

27 •• Si un objeto se mueve con aceleración constante sobre una línea recta, su velocidad instantánea a la mitad de la distancia recorrida en cualquier intervalo de tiempo es: (*a*) mayor que su velocidad media, (*b*) menor que su velocidad media, (*c*) igual que su velocidad media, (*d*) *la mitad de su velocidad media, (e) dos veces su velocidad media.*

28 •• Una tortuga ve como su cuidador le pone lechuga fresca al otro lado del terrario. Empieza a acelerar (a ritmo constante) en dirección a la comida a partir del reposo en el tiempo $t = 0$. Sea t_1 el tiempo en el que la tortuga ha recorrido la mitad de la distancia que la separa de la comida. Obtener una expresión para el cociente t_2/t_1, donde t_2 es el tiempo que la tortuga invierte en llegar a la comida.

29 •• En la figura 2.33 se representan en función del tiempo las posiciones de dos coches que siguen carriles paralelos y rectos en una autopista. Sean los valores de x positivos los que están a la derecha del origen. Responder cualitativamente las preguntas siguientes: (*a*) ¿Los dos coches están en algún momento uno al lado del otro? Si la respuesta es afirmativa, ¿cuándo? (*b*) ¿Siempre se mueven en la misma dirección o, de vez en cuando, se mueven en direcciones opuestas? Si es así, ¿cuándo? (*c*) ¿Se mueven siempre a la misma velocidad? Si es así, ¿cuándo? (*d*) ¿Cuándo los dos coches están más alejados? (*e*) Dibujar la curva velocidad-tiempo para cada coche (sin números). SSM

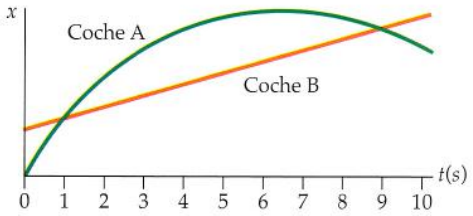


FIGURA 2.33 Problema 29

30 •• Un coche que se mueve a velocidad constante pasa por el origen cuando $t = 0$. En ese momento, un camión, en reposo en el origen, empieza a acelerar. La figura 2.34 muestra un dibujo cualitativo de las velocidades del coche y del camión en función del tiempo. Comparar sus desplazamientos (desde el origen), velocidades y aceleraciones en el instante en que sus curvas se cruzan.

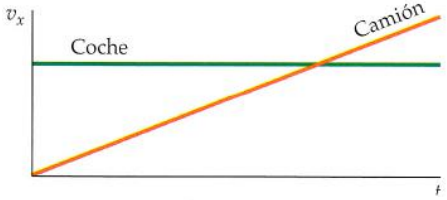


FIGURA 2.34 Problema 30

31 •• Reginaldo sale a correr por la mañana. Sigue un recorrido recto y su velocidad en función del tiempo viene representada por la figura 2.35. Inicia su recorrido partiendo del reposo, alcanza su velocidad máxima $v_{máx}$ cuando el tiempo vale $t_{máx}$ y acaba su recorrido en reposo. Otra persona, Josie, corre a velocidad constante v_J desde $t = 0$ hasta $t = t_f$ de modo que ambos, durante el mismo intervalo de tiempo, recorren la misma distancia. Observación: t_f NO es dos veces $t_{máx}$, sino que representa un tiempo arbitrario. ¿Cuál es la relación entre v_J y $v_{máx}$?

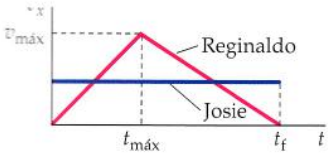


FIGURA 2.35 Problema 31

32 •• De los gráficos v_x en función de t representados en la figura 2.36, ¿cuál describe mejor el movimiento de una partícula (*a*) con velocidad positiva y módulo de la velocidad creciente, (*b*) velocidad positiva y aceleración cero, (*c*) aceleración constante distinta de cero, y (*d*) una disminución del módulo de la velocidad?

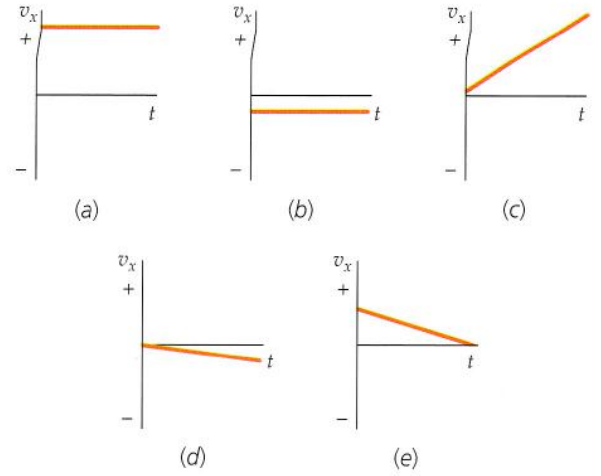


FIGURA 2.36 Problemas 32 y 33

33 •• De los gráficos v_x en función de t representados en la figura 2.36, ¿cuál describe mejor el movimiento de una partícula con (*a*) velocidad negativa y módulo de la velocidad creciente, (*b*) velocidad negativa y aceleración cero, (*c*) aceleración variable, y (*d*) módulo de la velocidad creciente?

34 •• Representar las curvas v en función de t para cada una de las siguientes condiciones: (*a*) La aceleración es cero y constante, pero la velocidad no es nula. (*b*) La aceleración es constante, pero no cero. (*c*) La velocidad y la aceleración son positivas. (*d*) La velocidad y la aceleración son negativas. (*e*) La velocidad es positiva y la aceleración negativa. (*f*) La velocidad es negativa y la aceleración positiva. (*g*) La velocidad es momentáneamente nula, pero la aceleración no lo es.

35 •• En la figura 2.37 se representan nueve gráficos de posición, velocidad y aceleración para objetos en movimiento lineal. Indicar los gráficos que cumplen las siguientes condiciones: (*a*) La velocidad es constante. (*b*) La velocidad invierte su dirección. (*c*) La aceleración es

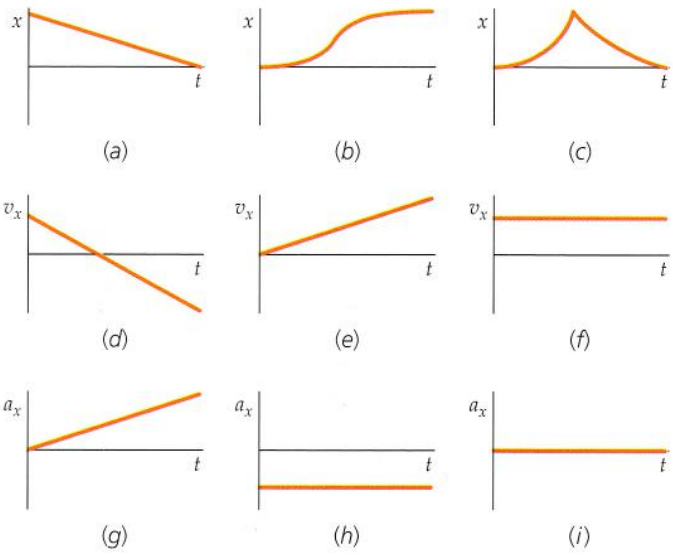


FIGURA 2.37 Problema 35

constante. (*d*) La aceleración no es constante. (*e*) ¿Qué gráficos de posición, velocidad y aceleración son mutuamente coherentes?

ESTIMACIONES Y APROXIMACIONES

36 • **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Totalmente absorto pensando en la excitante lectura que el profesor de física le acaba de dar, usted camina directamente hacia la pared en vez de hacia la puerta de la clase. Estimar la magnitud de la aceleración media cuando usted se da cuenta y frena en seco.

37 • **APLICACIÓN BIOLÓGICA** De vez en cuando, tenemos noticia de personas que sobreviven a caídas desde grandes alturas cuando la superficie sobre la que caen es suficientemente blanda. Durante una escalada por la vía norte del Eiger (montaña de los Alpes suizos), una fijación del montañero Carlos Ragone cedió de forma que sufrió una caída de 150 m sobre la nieve. Sorprendentemente sufrió únicamente unas pocas magulladuras y un tirón en el hombro. Suponiendo que su impacto dejó un agujero de 122 cm en la nieve, estimar la aceleración a la que estuvo sometido durante el frenado mientras estaba impactando en la nieve. (Se supone que la aceleración fue constante.) SSM

38 •• Cuando se resuelven problemas relacionados con la caída libre en la atmósfera de la Tierra, es importante recordar que siempre se da la resistencia del aire. Por lo tanto, si para simplificar, suponemos que los objetos caen con aceleración constante, podemos obtener resultados erróneos en varios órdenes de magnitud. ¿Qué criterio podemos aplicar para suponer que un objeto cae con aceleración (prácticamente) constante? Una forma de darse cuenta es que la resistencia del aire aumenta con la velocidad. Cuando un cuerpo cae, partiendo del reposo, a través del aire, a medida que su velocidad aumenta, su aceleración disminuye. La velocidad se aproxima, aunque nunca la alcanza, a la velocidad terminal o velocidad límite, que depende de la masa y del área transversal del objeto. A la velocidad terminal, la fuerza de la gravedad y la fuerza ejercida por la resistencia del aire se igualan y, por lo tanto, la aceleración es cero. Para un paracaidista, una estimación razonable de la velocidad terminal es de unos 50 m/s. Si el paracaidista lleva la mitad de esta velocidad, su aceleración es $\frac{3}{4}g$. Tomemos la mitad de la velocidad límite como un límite superior por encima del cual no podemos usar las fórmulas de la aceleración constante para calcular la velocidad y el desplazamiento. (*a*) Estimar cuánto debe caer el paracaidista para que podamos utilizar la aproximación de aceleración constante. (*b*) Repetir el análisis para una pelota de ping pong que tiene una velocidad terminal aproximada de 5,0 m/s. (*c*) ¿Qué se puede concluir al comparar las respuestas de los apartados (*a*) y (*b*)?

39 •• **APLICACIÓN BIOLÓGICA** El 16 de agosto de 2008 el jamaicano Usain Bolt estableció un nuevo récord del mundo en los 100 m lisos con una marca de $t = 9{,}77$ s. Supongamos que aceleró desde el reposo a aceleración constante a y que alcanzó su velocidad máxima en 3,00 s, la cual mantuvo hasta llegar a la meta. ¿Cuál fue su aceleración en la prueba del récord?

40 •• La figura 2.38 muestra la fotografía tomada con tiempos de apertura cortos (1/30 s) de un malabarista con dos pelotas de tenis en el aire. (*a*) La pelota de tenis que está a mayor altura está menos borrosa que la otra. ¿Por qué? (*b*) ¿Puede estimarse la velocidad de esta última pelota? (*c*) Determinar hasta qué altura por encima del punto de lanzamiento es probable que llegue la pelota y compararla con la estimación a partir de la fotografía. *Sugerencia: hay que construir una escala que suponga un valor razonable a partir de la estatura del malabarista.*

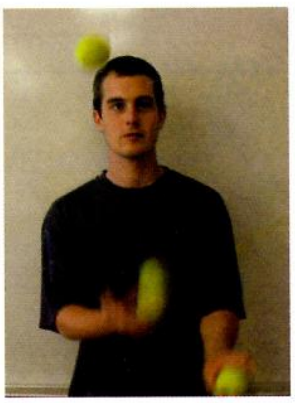


FIGURA 2.38
Problema 40
(Gentileza de Chuck Adler.)

41 •• Una regla popular para determinar la distancia entre nuestra posición y el punto donde se ha producido el relámpago es contar los segundos que transcurren entre la luz del relámpago y el sonido del trueno (producido por la rápida dilatación del aire como consecuencia de las altas temperaturas producidas por la chispa). Suponiendo que la velocidad del sonido es de 1224 km/h, (*a*) estimar a qué distancia se ha producido el relámpago si el ruido del trueno ha tardado 5 s en llegar. (*b*) Estimar la inexactitud en la medida de la distancia del apartado (*a*). Explicar las suposiciones y el razonamiento. *Sugerencia: la velocidad del sonido depende de la temperatura del aire y la forma de contar es inexacta.*

DESPLAZAMIENTO, VELOCIDAD Y MÓDULO DE LA VELOCIDAD

42 • **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** (*a*) Un electrón de un tubo de televisión recorre los 16 cm de distancia de la rejilla a la pantalla con una velocidad media de 4×10^7 m/s. ¿Qué tiempo transcurre en ese trayecto? (*b*) Un electrón en un conductor por el que circula una corriente se mueve con una velocidad media de 4×10^5 m/s. ¿Qué tiempo tarda en recorrer 16 cm?

43 • Un atleta corre 2,5 km en línea recta en 9 min y luego tarda 30 min en volver andando al punto de partida. (*a*) ¿Cuál es la velocidad media durante los primeros 9 minutos? (*b*) ¿Cuál es la velocidad media durante el tiempo que camina? (*c*) ¿Cuál es la velocidad media a lo largo de todo el recorrido? (*d*) ¿Cuál es el valor del módulo de la velocidad media para todo el recorrido? SSM

44 • Un coche viaja en línea recta con una velocidad media de 80 km/h durante 2,5 h y luego con velocidad media de 40 km/h durante 1,5 h. (*a*) ¿Cuál es el desplazamiento total en el viaje de 4 h? (*b*) ¿Cuál es la velocidad media del viaje completo?

45 • Una ruta aérea muy concurrida a través del Océano Atlántico tiene una longitud aproximada de 5500 km. (*a*) ¿Cuánto tiempo tardaba el reactor supersónico Concorde, que ahora ya no presta servicio, y que volaba al doble de la velocidad del sonido en recorrer esta ruta? Utilizar el valor 330 m/s como velocidad del sonido. (*b*) ¿Cuánto tardaría un avión subsónico en realizar el mismo viaje volando a 0,9 veces la velocidad del sonido?

46 • La luz se propaga con una velocidad de $c = 3 \times 10^8$ m/s. (*a*) ¿Cuánto tiempo tarda la luz en ir del Sol a la Tierra al recorrer una distancia de $1{,}5 \times 10^{11}$ m? (*b*) ¿Cuánto tiempo tarda la luz en recorrer la distancia Luna-Tierra que es de $3{,}84 \times 10^8$ m?

47 • Proxima Centauri, la estrella más cercana a la Tierra, aparte del Sol, es una enana roja muy poco luminosa próxima a la estrella Alfa Centauri y situada a $4{,}1 \times 10^{13}$ km de distancia de nuestro planeta. Desde la proximidad de esta estrella, Gregor manda una orden a la empresa Tony's Pizza de Hoboken, New Jersey, para lo cual utiliza una señal de comunicación luminosa. La nave más rápida de Tony viaja a la velocidad de $10^{-4}\,c$ (véase problema 46). (*a*) ¿Cuánto tiempo tarda en llegar la orden a la empresa? (*b*) ¿Cuánto tiempo tendrá que esperar Gregor entre que envía la señal y recibe la pizza? Si las normas de distribución de Tony dicen que la tardanza máxima en servir la pizza es de 1000 años y que si sobrepasa este plazo, el servicio será gratuito, ¿tendrá Gregor que pagar la pizza? SSM

48 • Un coche que tiene que recorrer 100 km cubre los primeros 50 km a 40 km/h. ¿A qué velocidad debe recorrer los segundos 50 km para que la velocidad media en todo el trayecto sea de 50 km/h?

49 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Al final de un partido de hockey sobre hielo, a veces el equipo que pierde usa a su portero como ju-

gador de campo para añadir un jugador ofensivo adicional y, de este modo, incrementar la posibilidad de marcar. En estas condiciones, el equipo adversario tiene una oportunidad de marcar dado que la portería está libre a 55 m. Suponga que usted es el portero de este equipo y que intenta marcar en la portería desguarnecida del equipo contrario. Lanza el puck (disco) y, finalmente, oye un desilusionante ruido, que significa que el disco ha golpeado en el poste de la portería, a los 2,5 s de haberlo lanzado. En este caso, ¿a qué velocidad ha lanzado el puck con su disparo? Suponer que la velocidad del sonido es de 343 m/s.

50 •• El cosmonauta Andrei, su compañero en la Estación Espacial Internacional, le lanza una banana a una velocidad de 15 m/s. En el mismo instante, usted le lanza a Andrei un cucharón de helado en la misma trayectoria. La colisión entre la banana y el cucharón produce que la banana se rompa a 7,2 m de usted y 1,2 s después del lanzamiento de ambos objetos. (*a*) ¿A qué velocidad lanzó el cucharón? (*b*) ¿Qué distancia les separa? (Despreciar los efectos de la gravedad.)

51 •• La figura 2.39 muestra la posición de una partícula en función del tiempo. Determinar la velocidad media en los intervalos de tiempo *a*, *b*, *c* y *d* indicados en la figura.

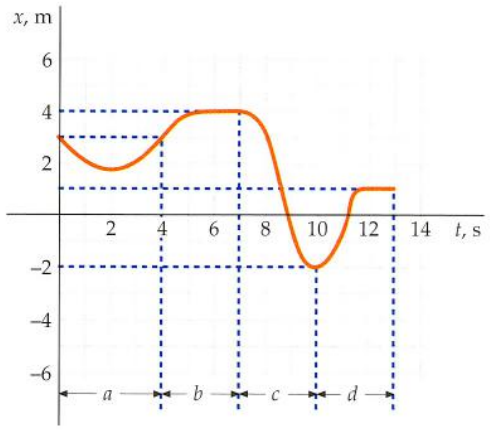


FIGURA 2.39 Problema 51

52 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Se sabe que las galaxias se alejan de la Tierra a una velocidad proporcional a su distancia de nuestro planeta, fenómeno conocido como ley de Hubble en honor de Sir Edwin Hubble, descubridor de esta propiedad. La velocidad de una galaxia a la distancia r es $v = Hr$, siendo H la constante de Hubble, de valor $1{,}58 \times 10^{-18}\ \text{s}^{-1}$. Determine la velocidad de una galaxia (*a*) que dista $5{,}00 \times 10^{22}$ m de la Tierra y (*b*) otra que dista $2{,}00 \times 10^{25}$ m de la Tierra. (*c*) Si cada una de estas galaxias viaja con velocidad constante, ¿cuánto tiempo ha transcurrido desde que ambas estuvieron en el mismo lugar que la Tierra?

53 •• Un leopardo puede correr a $v_1 = 113$ km/h, un halcón puede volar a $v_2 = 161$ km/h y un atún puede nadar a $v_3 = 105$ km/h. Si nos imaginamos que los tres animales forman un equipo y corren una carrera de relevos, cada uno recorriendo una distancia L a su velocidad máxima, ¿cuál sería la velocidad media del equipo? Comparar el resultado obtenido con la media de las tres velocidades. Explicar por qué el módulo de la velocidad media del equipo de relevos no es igual a la media numérica de las tres velocidades. SSM

54 •• Dos coches circulan por una carretera recta. El coche A mantiene una velocidad constante de 80 km/h; el coche B mantiene una velocidad constante de 110 km/h. En $t = 0$, el coche B está a 45 km detrás del coche A. (*a*) ¿A qué distancia medida desde el punto en que $t = 0$ el coche B adelantará al coche A? (*b*) ¿A qué distancia por delante de A estará el coche B a los 30 s de haberlo adelantado?

55 •• **MÚLTIPLES PASOS** Un coche que marcha con una velocidad constante de 20 m/s pasa por un cruce en el instante $t = 0$. Un segundo coche que viaja en el mismo sentido a 30 m/s pasa por el mismo cruce 5 segundos después. (*a*) Hacer un gráfico de las funciones de posición $x_1(t)$ y $x_2(t)$ de ambos coches. (*b*) Determinar cuándo el segundo coche adelanta al primero. (*c*) ¿Cuánto han recorrido ambos coches desde el cruce al producirse el adelantamiento? (*d*) ¿Dónde se encuentra el primer coche cuando el segundo pasa el cruce? SSM

56 •• **APLICACIÓN BIOLÓGICA** Los murciélagos usan la ecolocalización para determinar la distancia que los separa de objetos que no pueden ver fácilmente en la oscuridad. El tiempo entre la emisión de un pulso de alta frecuencia y la detección de su eco se usa para determinar la distancia. Suponer que un murciélago vuela a velocidad constante de 19,5 m/s en línea recta hacia la pared vertical de una cueva, lanza un pulso y recibe el eco transcurridos 0,15 s. Suponiendo que sigue volando a la misma velocidad, ¿a qué distancia está de la pared cuando recibe el eco? Suponer que la velocidad del sonido es 343 m/s.

57 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un submarino usa el sonar (pulsos de sonido que se mueven por el agua) para determinar la distancia hacia otros objetos. El tiempo entre el pulso emitido y el eco recibido se usa para determinar las distancias. Alternativamente, midiendo el tiempo entre ecos *sucesivos* que responden a otros tantos pulsos emitidos, comparándolos con los *intervalos de tiempo* de los pulsos, se puede calcular la velocidad del submarino. Supongamos que el operador de sonar de un submarino que se mueve a velocidad constante bajo el agua por el Mediterráneo Oriental donde la velocidad del sonido en el agua es 1522 m/s, envía pulsos cada 2,00 s y estos le vuelven reflejados cada 1,98 s. ¿A qué velocidad se mueve el submarino?

ACELERACIÓN

58 • Un coche deportivo acelera con la tercera marcha de 48,3 km/h a 80,5 km/h en 3,70 s. (*a*) ¿Cuál es su aceleración media en m/s^2? (*b*) Si el coche continúa con esta aceleración otro segundo, ¿cuál será su velocidad?

59 • En el instante $t = 5{,}0$ s, un objeto situado en $x = +3{,}0$ m se mueve a +5,0 m/s. Para $t = 8{,}0$ s, se encuentra en $x = +9{,}0$ m y su velocidad es −1,0 m/s. Determinar la aceleración media para este intervalo $5{,}0\ \text{s} < t < 8{,}0\ \text{s}$. SSM

60 •• Una partícula se mueve a lo largo del eje x con una velocidad $v_x = (8{,}0\ \text{m/s}^2)t - 7{,}0\ \text{m/s}$, donde v_x se expresa en metros por segundo y t en segundos. (*a*) Determinar la aceleración media a intervalos de un segundo comenzando en $t = 3{,}0$ s y $t = 4{,}0$ s. (*b*) Representar v_x en función de t en el intervalo $0 < t < 10$ s. (*c*) ¿Cuál es la aceleración instantánea en el medio de cada uno de los dos intervalos especificados en el apartado (*a*) comparadas con las aceleraciones calculadas en el apartado (*a*). Explique la respuesta.

61 •• **MÚLTIPLES PASOS** La posición de cierta partícula depende del tiempo según la ecuación $x(t) = t^2 - 5{,}0t + 1{,}0$, donde x se expresa en metros y t en segundos. (*a*) Determinar el desplazamiento y la velocidad media durante el intervalo $3{,}0\ \text{s} \le t \le 4{,}0\ \text{s}$. (*b*) Hallar la fórmula general para el desplazamiento durante el intervalo entre t y $t + \Delta t$. (*c*) Hallar la velocidad instantánea para cualquier tiempo t haciendo el límite cuando Δt tiende a cero. SSM

62 •• La posición de un objeto en función del tiempo viene dada por $x = At^2 - Bt + C$, donde $A = 8{,}0\ \text{m/s}^2$, $B = 6{,}0\ \text{m/s}$, y $C = 4{,}0$ m. Determinar la velocidad instantánea y la aceleración en función del tiempo.

63 ••• El movimiento unidimensional de una partícula viene representado en la figura 2.40. (*a*) ¿Cuál es la aceleración media en los intervalos *AB*, *BC* y *CE*? (*b*) ¿A qué distancia de su punto de partida se encuentra la partícula al cabo de 10 s? (*c*) Representar el desplazamiento de la partícula en función del tiempo, indicando en la gráfica los instantes *A*, *B*, *C*, *D* y *E*. (*d*) ¿En qué instante la partícula se mueve más lentamente?

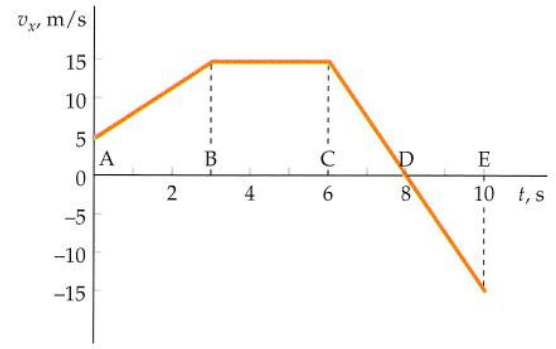


FIGURA 2.40 Problema 63

ACELERACIÓN CONSTANTE Y CAÍDA LIBRE

64 • Un objeto lanzado hacia arriba con velocidad inicial v_0 alcanza una altura h. Otro objeto lanzado en las mismas condiciones con velocidad inicial $2v_0$ alcanzará una altura de (*a*) $4h$, (*b*) $3h$, (*c*) $2h$, (*d*) h. (Resistencia del aire despreciable.)

65 • Un coche parado en la posición $x = 50$ m acelera con aceleración constante de 8,0 m/s^2. (*a*) Transcurridos 10 s, ¿cuál es su velocidad? (*b*) ¿Qué distancia ha recorrido? (*c*) ¿Cuál es su velocidad media en el intervalo $0 \leq t \leq 10$ s?

66 • Un objeto con una velocidad inicial de +5,0 m/s posee una aceleración constante de +2 m/s^2. Cuando su velocidad es de 15 m/s, ¿qué distancia ha recorrido?

67 • Un objeto con aceleración constante posee una velocidad de +10 m/s cuando se encuentra en $x = 6{,}0$ m y de 15 m/s cuando se encuentra en $x = 10{,}0$ m. ¿Cuál es su aceleración? SSM

68 • La velocidad de un objeto aumenta a una tasa constante de +4,0 m/s cada segundo. Su velocidad es +1,0 m/s cuando $t = 0{,}0$, en cuyo instante está en $x = +7$ m. ¿Con qué velocidad se mueve cuando está en $x = +8{,}0$ m? ¿Cuándo sucederá esto?

69 •• Se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad inicial de 20 m/s. (La resistencia del aire es despreciable.) (*a*) ¿Cuánto tiempo está la pelota en el aire? (*b*) ¿Cuál es la mayor altura alcanzada por la pelota? (*c*) ¿Cuándo está la pelota a 15 m por encima del punto de lanzamiento?

70 •• En el corrimiento de tierras de Blackhawk, en California, una masa de rocas y barro cayó 460 m al desprenderse de una montaña y luego recorrió 8,0 km a través de una llanura (según algunas hipótesis se desplazó sobre una capa de vapor de agua). Suponiendo que esta masa cayera con la aceleración de la gravedad y después se deslizara horizontalmente con desaceleración constante, (*a*) ¿cuánto tiempo tardó en caer los 460 m? (*b*) ¿Cuál era su velocidad al llegar al fondo? (*c*) ¿Cuánto tiempo tardó en deslizarse horizontalmente a lo largo de los 8,0 km?

71 •• Una grúa levanta una carga de ladrillos a la velocidad constante de 5,0 m/s, cuando a 6 m del suelo se desprende un ladrillo de la carga. (*a*) Describir el movimiento del ladrillo desprendido haciendo un esquema de $y(t)$. (*b*) ¿Cuál es la altura máxima respecto al suelo que alcanza el ladrillo? (*c*) ¿Cuánto tiempo tarda en llegar al suelo? (*d*) ¿Cuál es su velocidad en el momento de chocar contra el suelo? SSM

72 •• Un tornillo se desprende del fondo exterior de un ascensor que se mueve hacia arriba a la velocidad de 6,0 m/s. El tornillo alcanza el fondo del hueco del ascensor en 3,0 s. (*a*) ¿A qué altura estaba el ascensor cuando se desprendió el tornillo? (*b*) ¿Qué velocidad tiene el tornillo al chocar contra el fondo del hueco del ascensor?

73 •• Un objeto cae de una altura de 120 m. Determinar la distancia que recorre durante su último segundo en el aire.

74 •• Un objeto cae de una altura h. Durante el segundo final de su caída recorre 38 m. ¿Cuánto vale h?

75 •• Una piedra cae verticalmente desde un acantilado de 200 m de altura. Durante el último medio segundo de su caída la piedra recorre una distancia de 45 m. Determinar la velocidad inicial de la piedra. SSM

76 •• Un objeto en caída libre desde una altura h recorre 0,4 h durante el primer segundo de su descenso. Determinar la velocidad media del objeto durante su caída.

77 •• Un autobús acelera a 1,5 m/s^2 desde el reposo durante 12 s. A continuación, se mueve a velocidad constante durante 25 s, después de los cuales disminuye su velocidad con una aceleración de módulo −1,5 m/s^2. (*a*) ¿Qué distancia total recorrió el autobús? (*b*) ¿Cuál fue su velocidad media?

78 •• Álvaro y Berta han salido a correr por un camino que discurre por el interior de un bosque. Mantienen una velocidad de 0,75 m/s. Álvaro ve que el final del camino y del bosque se encuentra a unos 35 m y acelera con una aceleración constante de 0,50 m/s^2, dejando atrás a Berta, que continúa a velocidad constante. (*a*) ¿Cuánto le cuesta a Álvaro llegar al final del camino? (*b*) Cuando alcanza la meta, inmediatamente se da la vuelta y deshace el camino a la velocidad constante de 0,85 m/s. ¿Cuánto tiempo transcurre hasta que se cruza con Berta? (*c*) ¿A qué distancia del final del camino se encuentran cuando se cruzan?

79 •• Se ha diseñado un cohete para tomar muestras de la polución de la atmósfera. El cohete se lanza verticalmente hacia arriba con una aceleración de 20 m/s^2. Al cabo de 25 s, el combustible se agota y el cohete continúa como una partícula libre hasta que alcanza el suelo. (La resistencia del aire es despreciable.) Se quiere obtener una muestra de aire a una altura de 20 km. (*a*) ¿Llegará el cohete a esa altura? Si no llega, ¿qué hay que cambiar para que el cohete alcance esta altura? (*b*) Determinar el tiempo total que el cohete está en el aire. (*c*) Calcular la velocidad del cohete justo antes de chocar contra el suelo.

80 •• Una maceta cae desde una repisa de un edificio de apartamentos. Una persona de un apartamento inferior que dispone de un cronómetro, observa que la maceta tarda 0,2 s en pasar a través de su ventana que tiene 4,0 m de altura. ¿A qué altura sobre el borde superior de la ventana está la repisa de la cual cayó la maceta? (Despreciar los efectos de la resistencia del aire.)

81 •• En una experiencia de cátedra un cuerpo se desliza a lo largo de una pista de aire inclinada sin rozamiento con una aceleración constante a. Se le impulsa desde el origen de la pista ($x = 0$) con una velocidad inicial v_0. En el instante $t = 8{,}0$ s se encuentra en $x = 100$ cm y se mueve a lo largo de la pista con velocidad $v = -5$ cm/s. Determinar la velocidad inicial v_0 y la aceleración a. SSM

82 •• Una piedra que cae de lo alto de un acantilado recorre un tercio de su distancia total al suelo en el último segundo de su caída. ¿Qué altura tiene el acantilado? (La resistencia del aire es despreciable.)

83 •• Un automóvil cuando frena en seco tiene una desaceleración máxima de unos 7,0 m/s²; el tiempo de reacción típico para aplicar los frenos es de 0,50 s. Un cartel indica que la velocidad límite en una zona escolar debe cumplir la condición de que todos los coches puedan detenerse en una distancia de frenado de 4,0 m. (*a*) ¿Qué velocidad máxima puede alcanzar en esa zona un automóvil? (*b*) ¿Qué fracción de los 4,0 m corresponde al tiempo de reacción? SSM

84 •• Dos trenes se acercan uno al otro sobre vías adyacentes. Inicialmente están en reposo con una separación de 40 m. El tren de la izquierda acelera hacia la derecha a 1,0 m/s². El tren de la derecha acelera hacia la izquierda a 1,3 m/s². (*a*) ¿Qué distancia recorre el tren de la izquierda antes de que se produzca el cruce de ambos? (*b*) Si los trenes tienen una longitud de 150 m, ¿cuánto tiempo tardan en cruzarse completamente, suponiendo que sus aceleraciones son constantes?

85 •• Dos piedras se dejan caer desde el borde de un acantilado de 60 m. La segunda piedra se deja caer 1,6 s después de la primera. ¿Qué distancia ha recorrido la segunda piedra cuando la separación entre ambas es de 36 m?

86 •• Una policía motorista escondida en un cruce de calles observa que un coche no respeta la señal de stop, cruza la intersección y continúa a velocidad constante. La policía emprende su persecución 2,0 s después de que el coche sobrepase la señal, acelera a 4,2 m/s² y alcanza una velocidad de 110 km/h; continúa con esta velocidad hasta que alcanza al coche infractor. En ese instante, el coche se encuentra a 1,4 km del cruce. (*a*) ¿Qué tiempo le lleva a la policía alcanzar el coche? (*b*) ¿Qué velocidad llevaba el coche?

87 •• En el instante $t = 0$, se deja caer una piedra desde un acantilado sobre un lago; 1,6 s más tarde, otra piedra se lanza hacia abajo desde el mismo punto con una velocidad inicial de 32 m/s. Ambas piedras chocan con el agua al mismo tiempo. Determinar la altura del acantilado.

88 •• Un tren de pasajeros circula a 29 m/s cuando el conductor ve delante de él un tren de carga a 360 m de distancia circulando por la misma vía en la misma dirección. El tren de carga lleva una velocidad de 6,0 m/s. (*a*) Si el tiempo de reacción del conductor es de 0,40 s, ¿cuál debe ser la desaceleración del tren de pasajeros para evitar la colisión? (*b*) Si el tiempo de reacción es 0,80 s y el tren desacelera con el valor obtenido en el apartado (*a*), ¿con qué velocidad el tren de pasajeros se acerca al de mercancías? (*c*) Calcular, para los dos tiempos de reacción, qué distancia recorre el tren de pasajeros desde que ve por primera vez el tren de mercancías hasta que se produce la colisión.

89 •• **APLICACIÓN BIOLÓGICA** Algunos elatéridos (insectos coleópteros) pueden proyectarse verticalmente por sí mismos con una aceleración de unos $400g$ (un orden de magnitud superior al que un ser humano puede resistir). Los elatéridos saltan "desdoblando" sus patas, que tienen una longitud aproximada de $d = 0{,}60$ cm. (*a*) ¿Hasta qué altura pueden saltar? (*b*) ¿Cuánto tiempo permanecen en el aire? (Suponer la aceleración constante mientras está en contacto con el suelo y despreciar la resistencia del aire.)

90 •• Un automóvil acelera desde el reposo a 2,0 m/s² durante 20 s. La velocidad se mantiene durante otros 20 s y a partir de entonces el coche está sometido a una aceleración de −3,0 m/s² hasta que el vehículo se detiene. ¿Qué distancia total recorre?

91 •• Consideremos el movimiento de una partícula que experimenta un movimiento de caída libre con aceleración constante. Antes de disponer de los modernos sistemas de adquisición de datos informatizados, el experimento de caída libre de un objeto, como, por ejemplo, un disco de hockey, se realizaba usando una cinta teñida colocada verticalmente junto a la trayectoria de caída del disco conductor. Con el uso de un generador de alto voltaje se hacía saltar una chispa, a intervalos regulares de tiempo, entre dos conductores paralelos en el punto donde se encontraba el disco gracias a sus propiedades conductoras. De este modo en la cinta quedaba registrada la posición del disco a intervalos de tiempo sucesivos. Mostrar que la posición del disco seguía la *Regla de Galileo de los números extraños* $\Delta y_{21} = 3\Delta y_{10}$, $\Delta y_{32} = 5\Delta y_{10}$, ..., donde Δy_{10} es el cambio en y durante el primer intervalo de tiempo Δt; Δy_{21} es el cambio en y durante el segundo intervalo de duración Δt, etc. SSM

92 •• Una partícula se mueve a lo largo del eje x con aceleración constante de +3 m/s². En el instante $t = 4{,}0$ s, está en $x = -100$ m; en $t = 6$ s posee una velocidad $v = +15$ m/s. Determinar su posición en $t = 6$ s.

93 •• Si fuera posible diseñar una nave espacial que pudiera mantener una aceleración constante de forma indefinida, los viajes a los planetas del Sistema Solar serían cuestión de días o semanas, y los viajes a estrellas próximas se podrían llevar a cabo en pocos años. (*a*) Usando los datos que aparecen en las tablas al final del libro, determinar el tiempo que se invertiría para ir desde la Tierra a Marte (el planeta más cercano a la Tierra) suponiendo que una nave parte del reposo, sigue una trayectoria recta, acelera durante media trayectoria con aceleración g, se da la vuelta y el resto del viaje desacelera con una aceleración g. (*b*) Repetir el cálculo para un viaje de $4{,}1 \times 10^{13}$ km a Proxima Centauri, nuestra vecina extrasolar más próxima. (Véase el problema 47.) SSM

94 •• La Stratosphere Tower de Las Vegas es un edificio de 293,35 m de altura. Un ascensor rápido invierte 1 minuto y 20 segundos en subir desde la planta baja hasta el último piso del edificio. Suponiendo que el ascensor mantiene una aceleración constante, determinar su valor expresándola en función de la aceleración de la gravedad.

95 •• Un tren sale de una estación con una aceleración de 0,40 m/s². Una pasajera llega corriendo al andén 6,0 s después de que el tren haya iniciado la marcha. ¿Cuál es la velocidad constante mínima con que debe correr la pasajera para poder alcanzar al tren? Dibuje un esquema de las curvas del movimiento del tren y de la pasajera en función del tiempo.

96 ••• Una bola A se suelta desde lo más alto de un edificio de altura h en el mismo instante en que otra bola B se lanza verticalmente hacia arriba desde el suelo. Cuando las bolas chocan, ambas se mueven en sentido contrario y la velocidad de la bola A es dos veces la velocidad de la bola B. ¿En qué fracción de la altura del edificio ocurre el encuentro?

97 ••• Resuelva el problema 96 si la colisión ocurre cuando las dos bolas se mueven en el mismo sentido y la velocidad de A es 4 veces la velocidad de B.

98 ••• Un metro parte de una estación y acelera desde el reposo con una aceleración de 1,00 m/s² hasta la mitad de la distancia que le separa de la siguiente estación; después, desacelera con el mismo ritmo durante la segunda mitad del trayecto. La distancia total entre estaciones es de 900 m. (*a*) Representar gráficamente la velocidad v en función del tiempo a lo largo de todo el recorrido. (*b*) Representar gráficamente la distancia recorrida en función del tiempo para todo el viaje. Dar valores numéricos apropiados a lo largo de ambos ejes.

99 ••• Un coche de policía pretende alcanzar a un coche que marcha a 125 km/h. La velocidad máxima del coche de policía es de 190 km/h, y arranca desde el reposo con aceleración constante de 8,0 km/h · s, hasta que su velocidad alcanza los 190 km/h y luego prosigue con velocidad constante. (*a*) ¿Cuándo alcanzará al otro coche si se pone en marcha al pasar éste junto a él? (*b*) ¿Qué espacio habrán recorrido entonces ambos coches? (*c*) Hacer un gráfico de $x(t)$ para cada coche. SSM

100 ••• Cuando el coche de policía del problema 99 (marchando a 190 km/h) está 100 metros detrás del otro coche (que circula a 125 km/h) el conductor observa que le siguen y acciona los frenos bloqueando las ruedas. (*a*) Suponiendo que cada coche pueda frenar con una aceleración negativa de 6,0 m/s² y que la conductora del coche de policía frena tan pronto como ve encenderse las luces de freno del coche que persigue, es decir, sin tiempo muerto de reacción, demostrar que los coches chocan. (*b*) ¿En qué momento chocan contando a partir del instante que empiezan a frenar? (*c*) Analizar cómo el tiempo de reacción afecta a la resolución de este problema.

101 ••• Necesitando urgentemente el premio en metálico, Lou se apunta a una competición de automóviles en la cual el coche del concursante comienza y termina la prueba parado, recorriendo una distancia L en el tiempo más corto posible. Hay que demostrar destreza mecánica y ser buen conductor, así como consumir la mayor cantidad de combustibles fósiles en el menor tiempo posible. La carrera está diseñada de modo que las velocidades máximas de los automóviles no se alcanzan nunca. (*a*) Si el coche de Lou posee una aceleración máxima a y una desaceleración máxima $2a$, ¿en qué fracción de L debe Lou mover su pie desde el pedal del acelerador al pedal del freno? (*b*) ¿Qué fracción de tiempo utilizado en el trayecto total ha transcurrido hasta este momento? (*c*) ¿Cuál es la máxima velocidad que alcanza el coche de Lou? Despreciar el tiempo de reacción de Lou y elaborar la respuesta en función de a y L.

102 ••• Una profesora de física prueba su equipo anti-gravedad saltando con velocidad inicial cero desde un helicóptero situado a 575 m de altura (despreciar la resistencia del aire). Durante 8,0 s la profesora se mueve en caída libre; inmediatamente después conecta los cohetes propulsores y frena con una aceleración de 15 m/s^2 hasta que su velocidad de caída se sitúa en 5 m/s, que es cuando ajusta los controles de modo que se mantenga esta velocidad hasta llegar al suelo. (*a*) En una única figura, dibuje la aceleración y la velocidad de la profesora en función del tiempo. (Considerar positivo el sentido hacia arriba.) (*b*) ¿Cuál es su velocidad transcurridos los primeros 8,0 s del salto? (*c*) ¿Durante cuánto tiempo está frenando? (*d*) ¿Qué distancia recorre mientras su velocidad disminuye? (*e*) ¿Cuál es el tiempo invertido en todo el salto? (*f*) ¿Cuál es la velocidad media durante el salto completo?

INTEGRACIÓN Y ECUACIONES DE MOVIMIENTO

103 • La velocidad de una partícula viene dada por $v_x(t) = (6{,}0\ \text{m/s}^2)t + (3\ \text{m/s})$. (*a*) Hacer un gráfico de v en función de t y hallar el área limitada por la curva en el intervalo de $t = 0$ s a $t = 5{,}0$ s. (*b*) Hallar la función de posición $x(t)$. Utilizarla para calcular el desplazamiento durante el intervalo de $t = 0$ a $t = 5{,}0$ s. SSM

104 • La figura 2.41 muestra la velocidad de una partícula en función del tiempo. (*a*) ¿Cuál es el valor en metros del área del rectángulo señalado? (*b*) Estimar el desplazamiento de la partícula para los intervalos de 1 s que empiezan a partir de $t = 1{,}0$ s y $t = 2{,}0$ s. (*c*) ¿Estimar la velocidad media para el intervalo $1{,}0\text{s} \leq t \leq 3{,}0\text{s}$. (*d*) La ecuación de la curva es $v = (0{,}5\ \text{m/s}^3)t^2$. Determinar el desplazamiento de la partícula en el intervalo $1\text{s} \leq t \leq 3\text{s}$ por integración y comparar la respuesta con la del apartado (*b*). En este caso, ¿la velocidad media es igual a la semisuma de las velocidades inicial y final?

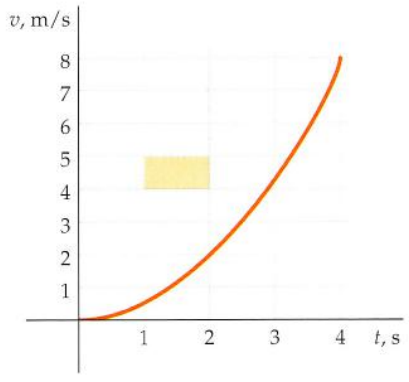


FIGURA 2.41 Problema 104

105 •• La velocidad de una partícula está dada por $v_x = (7{,}0\ \text{m/s}^3)t^2 - 5{,}0$ m/s. Si la partícula está en el origen cuando $t_0 = 0$, determinar la función de posición $x(t)$.

106 •• Considere el gráfico velocidad-tiempo de la figura 2.42. Suponiendo que $x = 0$ cuando $t = 0$, escriba las expresiones algebraicas correctas para $x(t)$, $v_x(t)$ y $a_x(t)$, con los valores apropiados de todas las constantes.

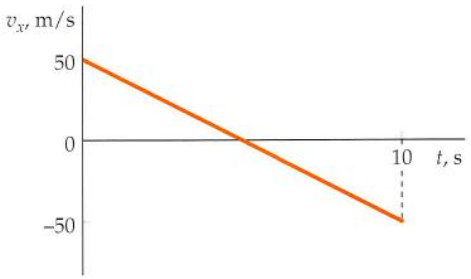


FIGURA 2.42 Problema 106

107 ••• La figura 2.43 muestra la aceleración de una partícula en función del tiempo. (*a*) ¿Cuál es el valor del área del rectángulo señalado, en m/s? (*b*) La partícula parte del reposo a $t = 0$. Hallar la velocidad en los tiempos $t = 1{,}0$ s, 2,0 s y 3,0 s contando los cuadrados bajo la curva. (*c*) Hacer un gráfico v_x a partir de los resultados de la parte (*b*) y hallar un valor estimado de la distancia recorrida por la partícula en el intervalo de $t = 0$ a $t = 3{,}0$ s.

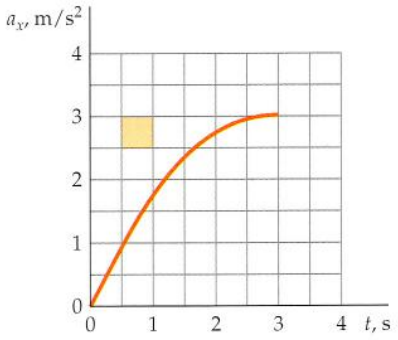


FIGURA 2.43 Problema 107

108 ••• La figura 2.44 muestra un gráfico v_x en función de t para una partícula que se mueve sobre una recta. Su posición en el instante $t = 0$ es $x_0 = 5$ m. (*a*) Hallar x para varios tiempos t contando cuadrados y dibujar x en función de t. (*b*) Hacer un dibujo aproximado de la aceleración a_x en función de t. (*c*) Determinar el desplazamiento de la partícula entre $t = 3{,}0$ s y 7,0 s.

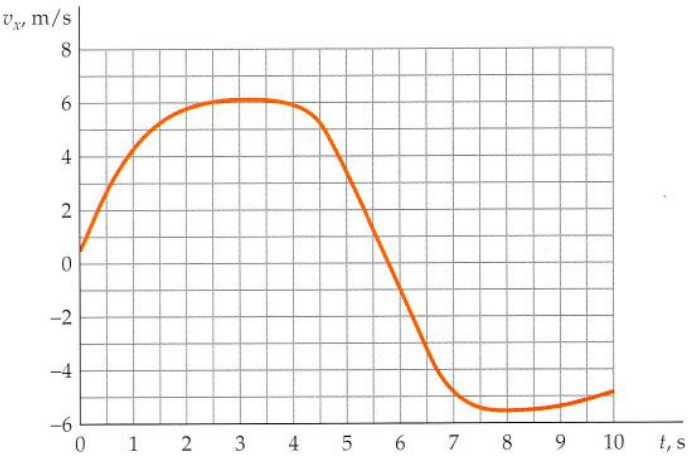


FIGURA 2.44 Problema 108

109 ••• **CONCEPTUAL** La figura 2.45 muestra un gráfico de x en función de t para un cuerpo que se mueve en línea recta. Dibujar gráficos aproximados (*a*) de v_x en función de t y (*b*) de a_x en función de t para este movimiento. (*c*) Usar los gráficos para comparar cualitativamente el tiempo en que el objeto está a la mayor distancia del origen con el tiempo en que su velocidad es máxima. Explicar por qué los tiempos no coinciden. (*d*) Usar los dibujos para comparar cualitativamente el tiempo con que el objeto se mueve más rápido con el tiempo en que su aceleración es máxima. Explicar por qué los tiempos *no* coinciden. SSM

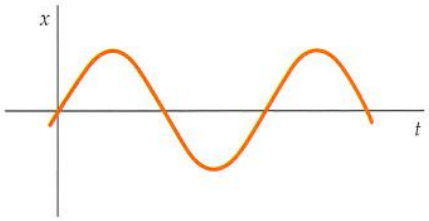


FIGURA 2.45 Problema 109

110 ••• **MÚLTIPLES PASOS** La aceleración de un cohete viene dada por $a_x = bt$, donde b es una constante positiva. (*a*) Determinar la posición en función del tiempo $x(t)$ si $x = x_0$ y $v_x = v_{0x}$ cuando $t = 0$. (*b*) Calcular la posición y la velocidad cuando t =5 s si $x_0 = 0$, $v_{0x} = 0$ y $b = 3{,}0\ \text{m/s}^3$. (*c*) Calcular la velocidad media del cohete entre $t = 4{,}5$ s y 5,5 s cuando $t = 5{,}0$ s si $x_0 = 0$, $v_{0x} = 0$ y $b = 3{,}0\ \text{m/s}^3$. Comparar esta velocidad media con la velocidad instantánea en $t = 5{,}0$ s.

111 ••• La aceleración de una partícula que se mueve en una dimensión durante el intervalo de tiempo comprendido entre 0,0 y 10,0 s viene dada por $a_x = (0{,}20\ \text{m/s}^3)t$. Sea el movimiento hacia la derecha la dirección $+x$. La partícula inicialmente tiene una velocidad hacia la derecha de 9,5 m/s y está a 5,0 m a la izquierda del origen. Determinar la velocidad media entre $t = 0{,}0$ s y 10,0 s, y comparar con la media de las velocidades instantáneas al inicio y al final. ¿Son las dos medias iguales? Explicarlo. SSM

112 ••• Considere el movimiento de una partícula que está sometida a una aceleración variable a_x dada por $a_x = a_{0x} + bt$, donde a_{0x} y b son constantes y $x = x_0$ y $v_x = v_{0x}$ si $t = 0$. (*a*) Calcular la velocidad instantánea en función del tiempo. (*b*) Determinar la posición en función del tiempo. (*c*) Calcular la velocidad media en el mismo intervalo de tiempo, entre un tiempo inicial 0 y un tiempo final arbitrario t. (*d*) Comparar la media de las velocidades inicial y final con la respuesta del apartado (*c*). ¿Las dos medias son iguales? Explique la respuesta.

PROBLEMAS GENERALES

113 ••• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** En una clase de ciencias, con el objetivo de determinar la aceleración de caída libre de los cuerpos, se monta un dispositivo experimental con dos células fotoeléctricas. (Nota: Las células fotoeléctricas nos han de resultar familiares, ya que están presentes en la vida cotidiana como en las puertas de algunas tiendas o como sistema de vigilancia que accionan un timbre cuando alguien cruza el haz de luz que las conecta). Una célula se coloca en el borde de una mesa de 1,0 m de altura y la otra 0,50 m exactamente debajo. Se suelta una canica desde el borde de la mesa de modo que, cuando pasa por la primera célula, pone en marcha un reloj y, cuando pasa por la segunda, lo para. (*a*) Probar que el valor de la aceleración de caída libre g se determina mediante la expresión $g_{\text{exp}} = (2\Delta y)/(\Delta t)^2$, donde Δy es la distancia vertical entre las células fotoeléctricas y Δt es el tiempo medido por el cronómetro. (*b*) ¿Qué valor de Δt se espera medir, suponiendo para g_{exp} el valor estándar ($9{,}81\ \text{m/s}^2$)? (*c*) Durante el experimento, un estudiante poco cuidadoso coloca la primera célula 0,50 cm por debajo la mesa, mientras la segunda célula está bien colocada a 0,50 m por encima del suelo. Sin embargo, la canica se suelta desde la misma altura en que se soltó cuando la célula estaba exactamente a 1,00 m del suelo. ¿Qué valor de g_{exp} obtendrá? ¿Qué porcentaje de diferencia habrá entre el valor obtenido y el valor común de esta magnitud?

114 ••• **MÚLTIPLES PASOS** La posición de un cuerpo que oscila sobre un muelle viene dada por $x = A\ \text{sen}\ \omega t$, donde A y ω son constantes de valores $A = 5{,}0$ cm y $\omega = 0{,}175\ \text{s}^{-1}$. (*a*) Representar x en función de t para $0 \leq t \leq 36$ s. (*b*) Medir la pendiente del gráfico en $t = 0$ para determinar la velocidad en ese instante. (*c*) Calcular la velocidad media para una serie de intervalos que comienzan en $t = 0$ y terminan en $t = 6{,}0$, 3,0, 2,0, 10, 0,50 y 0,25 s. (*d*) Calcular dx/dt y determinar la velocidad en el instante $t = 0$. (*e*) Comparar los resultados con los apartados (*c*) y (*d*) y explicar por qué los resultados del apartado (*c*) se aproximan a los resultados del apartado (*d*)).

115 ••• **CONCEPTUAL** Considere un objeto que se mueve con una velocidad descrita por la ecuación $v = B\ \text{sen}(\omega t)$, donde B y ω se expresa en radianes/s. (*a*) Explicar por qué B es igual al valor máximo de la velocidad $v_{\text{máx}}$. (*b*) ¿Cuál es la aceleración del objeto en función del tiempo? ¿La aceleración es constante? (*c*) ¿Cuál es la máxima aceleración del objeto en función de ω y $v_{\text{máx}}$? (*d*) Cuando $t = 0$, la posición es x_0. Determinar la posición en función del tiempo en función de t, ω, x_0 y $v_{\text{máx}}$. SSM

116 ••• Suponga que la aceleración de una partícula es una función de x, donde $a_x(x) = (2{,}0\ \text{s}^{-2})x$. (*a*) Si para $x = 1{,}0$ m la velocidad es cero, ¿cuál es la velocidad de la partícula en $x = 3{,}0$ m? (*b*) ¿Cuánto tiempo invierte la partícula en moverse desde $x = 1{,}0$ m hasta $x = 3{,}0$ m?

117 ••• Una piedra se hunde en el agua con una aceleración que decrece con el tiempo según $a_y = g - bv_y$, donde b es una constante positiva (La dirección $+y$ está dirigida hacia abajo.) (*a*) ¿Cuáles son las unidades SI de b? (*b*) Demostrar matemáticamente que si la roca empieza a hundirse cuando t =0, la aceleración dependerá del tiempo exponencialmente de acuerdo con $a_y(t) = ge^{-bt}$. (*c*) ¿Cuál es la velocidad terminal de la roca en función de g y de b? (Véase el problema 38 para una explicación de la *velocidad terminal*.) SSM

118 ••• En el problema 117, una piedra cae en el agua con una aceleración que viene dada por $a_y(t) = ge^{-bt}$, donde b es una constante positiva que depende de la forma y del tamaño de la piedra y de las propiedades físicas del agua. Basándose en este resultado, deduzca una expresión para la velocidad y la posición de la piedra en función del tiempo, suponiendo que tanto la velocidad como la posición iniciales son cero y que la dirección $+y$ se dirige hacia abajo.

119 ••• **HOJA DE CÁLCULO** La aceleración de una paracaidista que se lanza al vacío desde un avión viene dada, antes de abrir el paracaídas, por la fórmula $a_y = g - bv_y^2$, donde b es una constante que depende del área transversal de la saltadora y de la densidad de la atmósfera que le rodea. La dirección $+y$ está dirigida hacia abajo. (*a*) Si su velocidad inicial en el momento del salto es 0, demostrar que su velocidad en función del tiempo viene dada por la fórmula $v_y(t) = v_t \tanh(t/T)$, donde v_t es la velocidad límite (véase el problema 38) dada por $v_t = \sqrt{g/b}$ y $T = v_t/g$ es la escala que determina cuánto tiempo le cuesta alcanzar la velocidad terminal. (*b*) ¿A qué fracción de velocidad terminal corresponde la velocidad en $t = T$? (*c*) Use un programa de una hoja de cálculo para representar $v_y(t)$ en función del tiempo, usando una velocidad terminal de 56 m/s (use este valor para calcular b y T). ¿Tiene sentido la curva resultante?

120 ••• **APROXIMACIÓN** Imagine que está junto a un pozo de aquellos en los que se suelen formular deseos y que usted afirma que sabe a qué profundidad está la superficie del agua. Formula un deseo y tira la moneda. Pasados tres segundos se oye el sonido que indica que la moneda ha llegado al agua. Si la velocidad del sonido en el aire es 343 m/s, ¿a qué profundidad se haya la superficie del agua? Despreciar cualquier efecto debido a la resistencia del aire.

121 ••• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Un coche va a la velocidad máxima permitida de 40 km/h cuando a 65 m de un semáforo su conductor observa que la luz cambia a amarilla. La luz amarilla dura 5,0 s. El conductor invierte 1 s en pensar si todavía tiene tiempo de pasar y, a continuación, acelera con una aceleración constante. El coche de 4,5 m de longitud atraviesa el cruce, que tiene una anchura de 15 m, justo en el momento que el semáforo cambia a rojo, evitando una multa. Inmediatamente después de pasar el cruce, el conductor levanta el pie del acelerador. Pero, a pesar de ello, es multado por exceso de velocidad. Determinar la velocidad que llevaba el coche al pasar el cruce y decidir si tiene sentido reclamar ante la imposición de la multa, explicando los motivos.

122 ••• En un objeto celeste de radio R, la aceleración de la gravedad g a una distancia x del centro del objeto viene dada por $g = g_0R^2/x^2$, donde g_0 es la aceleración debida a la gravedad en la superficie del objeto y $x > R$. Para la Luna, $g_0 = 1{,}63\ \text{m/s}^2$ y $R = 3200$ km. Si se suelta una piedra a partir del reposo desde una altura de $4R$ por encima de la superficie lunar, ¿con qué velocidad impacta la piedra en la Luna? *Sugerencia: la aceleración es una función de la posición y aumenta a medida que el objeto cae. Por lo tanto, no hay que utilizar las ecuaciones válidas para la caída libre con aceleración constante.*

CAPÍTULO 3

LOS VELEROS NO NAVEGAN EN LÍNEA RECTA HACIA SU DESTINO SINO QUE SIGUEN UNA TRAYECTORIA EN ZIG-ZAG A TRAVÉS DEL VIENTO. EL VELERO DE LA FOTO, QUE SE DIRIGE HACIA UN PUERTO SITUADO AL SUDESTE, NAVEGA PRIMERO HACIA EL ESTE, DESPUÉS HACIA EL SUR Y DE NUEVO HACIA EL ESTE. *(PhotoDisc/Getty Images.)*

Movimiento en dos y tres dimensiones

3.1 Desplazamiento, velocidad y aceleración

3.2 Primer caso particular: movimiento de proyectiles

3.3 Segundo caso particular: movimiento circular

? ¿Cómo podemos calcular el desplazamiento y la velocidad medias? (Véase el ejemplo 3.1.)

El movimiento de un velero en zig-zag contra el viento o la trayectoria de una pelota de béisbol cuando sale del estadio no se pueden describir completamente utilizando las ecuaciones del capítulo 2. Para describir estos movimientos, debemos extender la idea de movimiento en una dimensión discutida en el capítulo 2 a dos y tres dimensiones. Con tal fin, debemos revisar el concepto de vector y usarlo para analizar y describir movimientos en más de una dimensión.

En este capítulo, estudiaremos los vectores desplazamiento, velocidad y aceleración con más detalle. Además, analizaremos dos tipos específicos de movimientos: el movimiento de proyectiles y el movimiento circular. Para estudiar este capítulo es necesario estar familiarizado con el material sobre vectores de las secciones 6 y 7 del capítulo 1. Le aconsejamos que revise esas secciones antes de empezar con este capítulo.

3.1 DESPLAZAMIENTO, VELOCIDAD Y ACELERACIÓN

Los conceptos de desplazamiento, velocidad y aceleración se utilizaron en el capítulo 2 para describir el movimiento de un objeto en línea recta. Ahora utilizaremos el concepto de vector para extender esos conceptos al movimiento en dos y tres dimensiones.

VECTORES POSICIÓN Y DESPLAZAMIENTO

El **vector posición** de una partícula es un vector trazado desde el origen de un sistema de coordenadas hasta la posición de la partícula. Para una partícula en el plano x, y en el punto con coordenadas (x, y) su vector posición $\vec{r}$ es

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} \qquad 3.1$$

DEFINICIÓN: VECTOR POSICIÓN

Observése que x e y, componentes de posición $\vec{r}$, son las coordenadas cartesianas (figura 3.1) de la partícula.

La figura 3.2 representa la trayectoria o camino real seguido por la partícula. En el instante t_1, la partícula se encuentra en P_1, y su vector posición es $\vec{r}_1$; en el instante t_2 la partícula se ha movido a P_2 y el vector posición es $\vec{r}_2$. El cambio de posición de la partícula es el vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \qquad 3.2$$

DEFINICIÓN: VECTOR DESPLAZAMIENTO

Utilizando los vectores unitarios, podemos escribir el vector desplazamiento como

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} \qquad 3.3$$

VECTORES VELOCIDAD

La velocidad media se define como el cociente entre el desplazamiento y el intervalo de tiempo transcurrido. El cociente entre el vector desplazamiento y el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ es el **vector velocidad media**.

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad 3.4$$

DEFINICIÓN: VECTOR VELOCIDAD MEDIA

El vector velocidad media y el vector desplazamiento tienen la misma dirección.

El módulo del vector desplazamiento es inferior a la distancia recorrida a lo largo de la curva a menos que la partícula se mueva en línea recta. Sin embargo, si consideramos intervalos de tiempo cada vez más pequeños (figura 3.3), el desplazamiento se aproxima a la distancia real recorrida por la partícula a lo largo de la curva, y el ángulo entre $\Delta\vec{r}$ y la tangente a la curva en el comienzo del intervalo tienden a cero. Definimos el vector velocidad instantánea como el límite del vector velocidad media cuando Δt tiende a cero:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad 3.5$$

DEFINICIÓN: VECTOR VELOCIDAD INSTANTÁNEA

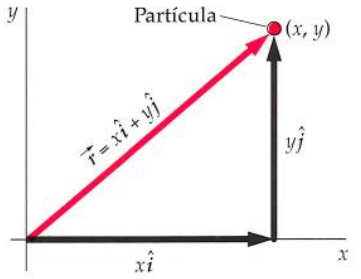


FIGURA 3.1 Las componentes x e y del vector posición $\vec{r}$ de una partícula son las coordenadas (cartesianas) de la partícula.

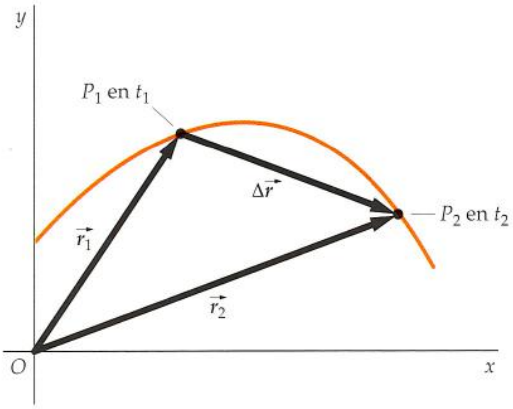


FIGURA 3.2 El vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$ es la diferencia de los vectores de posición $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Análogamente, $\Delta\vec{r}$ es el vector que, sumado al vector de posición inicial $\vec{r}_1$, nos da el nuevo vector posición final $\vec{r}_2$.

! No confundir la trayectoria de los gráficos x frente a y con los gráficos x en función de t del capítulo 2.

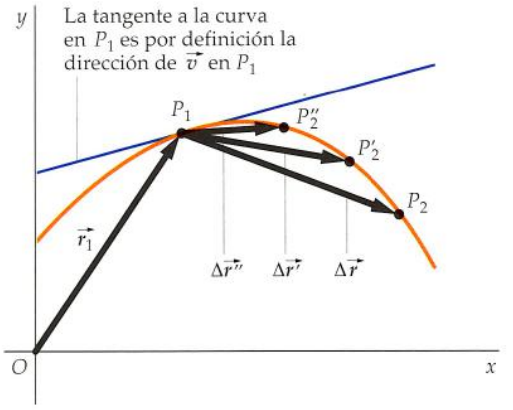


FIGURA 3.3 Al considerar intervalos de tiempo cada vez más pequeños, el ángulo entre la dirección $\Delta\vec{r}$ y la tangente a la curva tiende a cero.

El vector velocidad instantánea es la derivada del vector posición respecto al tiempo. Su módulo es la velocidad escalar y su dirección coincide con la tangente a la curva en la dirección del movimiento de la partícula.

Para calcular la derivada en la ecuación 3.5, expresamos el vector posición en función de sus componentes (ecuación 3.1).

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j}$$

Por lo tanto,

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)\hat{i} + \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)\hat{j}$$

es decir,

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} \qquad 3.6$$

donde $v_x = dx/dt$ y $v_y = dy/dt$ son las componentes x e y de la velocidad.

El módulo del vector velocidad viene dado por

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \qquad 3.7$$

y la dirección de la velocidad viene dada por

$$\theta = \text{arctg}\frac{v_y}{v_x} \qquad 3.8$$

¡ Vaya con cuidado a la hora de utilizar la calculadora para calcular el valor de θ en la ecuación 3.8. La mayoría de las calculadoras dan el valor correcto para θ si v_x es positivo. No obstante, si v_x es negativo se deberán añadir 180° (π rad) al resultado que devuelve la calculadora.

Véase el **Apéndice de matemáticas** *para más información sobre* **Trigonometría**

Ejemplo 3.1 La velocidad de un velero

Un barco de vela tiene las coordenadas $(x_1, y_1) = (130\text{ m}, 205\text{ m})$ en el instante $t_1 = 60{,}0$ s. Dos minutos más tarde, en el instante t_2, sus coordenadas son $(x_2, y_2) = (110\text{ m}, 218\text{ m})$. (*a*) Determinar la velocidad media en este intervalo de dos minutos. Expresar $\vec{v}_m$ en función de sus componentes rectangulares. (*b*) Determinar el módulo y la dirección de esta velocidad media. (*c*) Para $t \geq 20$ s, la posición del barco en función del tiempo es $x(t) = b_1 + b_2 t$ e $y(t) = c_1 + c_2/t$, donde $b_1 = 100$ m, $b_2 = 0{,}500$ m/s, $c_1 = 200$ m y $c_2 = 360$ m · s. Calcular la velocidad instantánea en función del tiempo para $t \geq 20$ s.

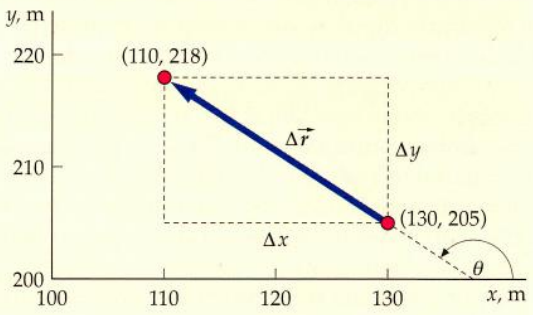


FIGURA 3.4

PLANTEAMIENTO Se conocen las posiciones inicial y final del barco de vela. Como el movimiento del velero es bidimensional, necesitamos expresar el desplazamiento, la velocidad media y la velocidad instantánea como vectores. Podemos utilizar las ecuaciones 3.5 a 3.8 para obtener dichos valores.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Dibuje un sistema de coordenadas (figura 3.4) y muestre el desplazamiento del velero. Dibuje el vector velocidad media (su dirección coincide con la del vector de desplazamiento):

2. Las componentes x e y de la velocidad media $\vec{v}_m$ se calculan directamente a partir de sus definiciones:

$$\vec{v}_m = v_{x\,m}\hat{i} + v_{y\,m}\hat{j}$$

donde

$$v_{x\,m} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{110\text{ m} - 130\text{ m}}{120\text{ s}} = -0{,}167\text{ m/s}$$

$$v_{y\,m} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{218\text{ m} - 205\text{ m}}{120\text{ s}} = 0{,}108\text{ m/s}$$

por lo tanto

$$\vec{v}_m = \boxed{-(0{,}167\text{ m/s})\hat{i} + (0{,}108\text{ m/s})\hat{j}}$$

(*b*) 1. El módulo de $\vec{v}_m$ se deduce del teorema de Pitágoras:

$$v_m = \sqrt{(v_{x\,m})^2 + (v_{y\,m})^2} = \boxed{0{,}199\text{ m/s}}$$

2. El cociente entre $v_{y,m}$ y $v_{x,m}$ expresa el valor de la tangente del ángulo θ entre $\vec{v}_m$ y el eje x (añadimos 180° al ángulo de −33,0° que proporciona la calculadora puesto que v_x es negativa):

$$\text{tg}\,\theta = \frac{v_{y\,m}}{v_{x\,m}}$$

luego

$$\theta = \text{arctg}\,\frac{v_{y\,m}}{v_{x\,m}} = \text{arctg}\,\frac{0{,}108\text{ m/s}}{-0{,}167\text{ m/s}} = -33{,}0° + 180° = \boxed{147°}$$

(*c*) La velocidad instantánea $\vec{v}$ se obtiene calculando dx/dt y dy/dt:

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} = b_2\hat{i} - c_2 t^{-2}\hat{j} = \boxed{(0{,}500\ \text{m/s})\hat{i} - \frac{360\ \text{m}\cdot\text{s}}{t^2}\hat{j}}$$

COMPROBACIÓN El módulo de $\vec{v}_m$ es mayor que el valor absoluto de su componente x o de su componente y. Si t se da en segundos, las unidades para la componente y de $\vec{v}$ del apartado (*c*) son $\text{m}\cdot\text{s}/\text{s}^2 = \text{m/s}$, que son las unidades propias de la velocidad.

VELOCIDAD RELATIVA

Si usted está sentado en un avión que se mueve a 800 km/h hacia el este, su velocidad es la misma que la del avión. Esta velocidad podría ser su velocidad relativa a la superficie de la Tierra o su velocidad relativa al aire exterior del aparato. (Esas dos velocidades serían diferentes si el avión volara dentro de una corriente en chorro.) Además, su velocidad es cero si se mide respecto del avión.

La superficie de la Tierra, el aire exterior del avión y el propio aparato son **sistemas de referencia**. Un sistema de referencia es un objeto o colección de objetos materiales cuyas partes están en reposo entre sí.

Para medir la posición de los objetos se usan ejes de coordenadas fijos a sistemas de referencia. (Decimos que un eje de coordenadas está fijo a un sistema de referencia si el eje de coordenadas está en reposo respecto del sistema de referencia.) Usted estaría en reposo respecto del sistema de referencia fijo al avión. (Siempre y cuando permanezca sentado en su asiento.) Sin embargo, para un sistema de coordenadas horizontal fijo respecto de la superficie de la Tierra y para un sistema de coordenadas horizontal fijo al aire exterior del avión, su posición cambia continuamente. (Si tiene problemas para imaginarse un sistema de coordenadas fijo en el aire exterior, imagínese un sistema de coordenadas ligado a un globo que flota en el aire. El aire y el globo están en reposo mutuo, por lo cual forman un único sistema de referencia.)

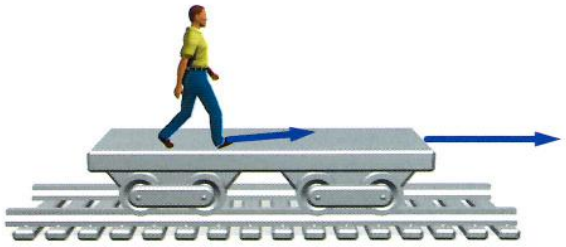
Si una partícula p se mueve con velocidad $\vec{v}_{pA}$ en relación al sistema de coordenadas A y éste a su vez se mueve con velocidad $\vec{v}_{AB}$ relativa a un sistema de referencia B, la velocidad $\vec{v}_{pB}$ de la partícula relativa a B está relacionada con $\vec{v}_{pA}$ y $\vec{v}_{AB}$ mediante

$$\vec{v}_{pB} = \vec{v}_{pA} + \vec{v}_{AB} \qquad 3.9$$

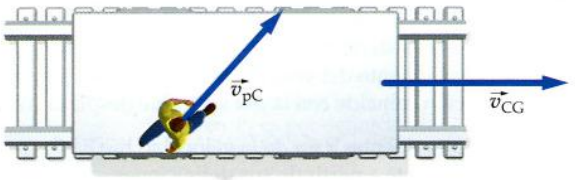
Por ejemplo, si una persona p está sobre una vagoneta C que se mueve con velocidad $\vec{v}_{CG}$ relativa al suelo G (figura 3.5*a*), y la persona camina con velocidad $\vec{v}_{pC}$ sobre la vagoneta (figura 3.5*b*), entonces la velocidad de la persona relativa al suelo es la suma vectorial de ambas velocidades: $\vec{v}_{pG} = \vec{v}_{pC} + \vec{v}_{CG}$ (figura 3.5*c*).

La velocidad de un objeto A relativa al objeto B tiene el mismo módulo pero dirección contraria a la velocidad del objeto B relativa al objeto A. Por ejemplo, $\vec{v}_{pC}$ es igual a $-\vec{v}_{Cp}$, donde $\vec{v}_{pC}$ es la velocidad de la persona relativa a la vagoneta, y $\vec{v}_{Cp}$ es la velocidad de la vagoneta relativa a la persona.

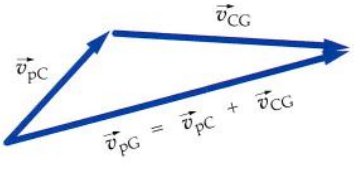
Abastecimiento de combustible en el aire. Cada uno de los aviones está prácticamente en reposo relativo con respecto a los otros aunque se muevan a grandes velocidades respecto a la Tierra. *(Novastock/Dembinsky Photo Associates.)*



(*a*)



(*b*)



(*c*)

FIGURA 3.5 La velocidad de una persona relativa al suelo es igual a la velocidad de la persona relativa a la vagoneta más la velocidad de la vagoneta relativa al suelo.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Velocidad relativa

PLANTEAMIENTO El primer paso para la resolución de problemas de velocidad relativa es identificar y marcar los sistemas de referencia relevantes. Aquí les llamaremos sistema de referencia A y B.

SOLUCIÓN

1. Utilizando $\vec{v}_{pB} = \vec{v}_{pA} + \vec{v}_{AB}$ (ecuación 3.9), relacione la velocidad del objeto móvil (partícula p) relativa al sistema A con la velocidad de la partícula relativa al sistema B.
2. Trace un diagrama de suma vectorial para la ecuación $\vec{v}_{pB} = \vec{v}_{pA} + \vec{v}_{AB}$. Incluya ejes de coordenadas en el dibujo.
3. Calcule la incógnita en cuestión. Utilice la trigonometría cuando sea necesario.

COMPROBACIÓN Asegúrese de que obtiene la velocidad o posición del cuerpo respecto del sistema de referencia correcto.

¡ Es muy importante el orden de los subíndices utilizados para expresar la velocidad relativa. Cuando utilice vectores velocidad relativa procure escribir los subíndices en el orden adecuado.

Ejemplo 3.2 Movimiento de un avión

Un avión debe volar hacia el norte. La velocidad del avión respecto al aire es 200 km/h y el viento sopla de oeste a este a 90 km/h. (*a*) ¿Cuál debe ser el rumbo del avión? (*b*) ¿Qué velocidad debe llevar el avión respecto al suelo?

PLANTEAMIENTO Como el viento sopla hacia el este, un avión con rumbo hacia el norte derivará hacia el este. Para compensar el viento de través, el avión debe dirigirse hacia el noroeste. La velocidad del avión respecto al suelo $\vec{v}_{pG}$ será la suma de la velocidad del avión respecto al aire $\vec{v}_{pA}$ más la velocidad del aire respecto al suelo $\vec{v}_{AG}$.

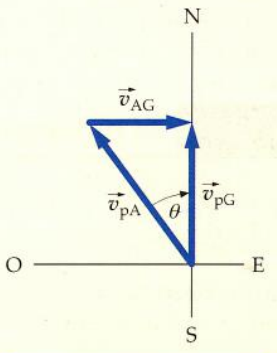


FIGURA 3.6

SOLUCIÓN

(*a*) 1. La velocidad del avión respecto al suelo viene dada por la ecuación 3.9:

$$\vec{v}_{pG} = \vec{v}_{pA} + \vec{v}_{AG}$$

2. Incluya un diagrama (figura 3.6) que muestre la suma de los vectores del paso 1. Incluya los ejes de referencia:

3. El seno del ángulo θ formado por la velocidad del avión y la dirección norte es igual al cociente entre v_{AG} y v_{pA}:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{v_{AG}}{v_{pA}} = \frac{90\ \text{km/h}}{200\ \text{km/h}} = \frac{9}{20}$$

por lo tanto,

$$\theta = \operatorname{arcsen}\frac{9}{20} = \boxed{27^\circ \text{ noroeste}}$$

(*b*) Como $\vec{v}_{AG}$ y $\vec{v}_{pG}$ son perpendiculares podemos utilizar el teorema de Pitágoras para determinar el módulo de $\vec{v}_{pG}$:

$$v_{pA}^2 = v_{pG}^2 + v_{AG}^2$$

con lo cual,

$$v_{pG} = \sqrt{v_{pA}^2 - v_{AG}^2}$$

$$= \sqrt{(200\ \text{km/h})^2 - (90\ \text{km/h})^2} = \boxed{180\ \text{km/h}}$$

COMPROBACIÓN Poniendo rumbo en contra del viento a 90 km/h obtendríamos una velocidad respecto al suelo de 200 km/h − 90 km/h = 110 km/h. El resultado de 180 km/h del apartado (*b*) es mayor que 110 km/h y menor que 200 km/h, como era de esperar.

VECTORES DE ACELERACIÓN

Se define el **vector aceleración media** como el cociente entre la variación del vector velocidad instantánea $\Delta\vec{v}$ y el intervalo de tiempo transcurrido Δt:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad 3.10$$

DEFINICIÓN: VECTOR ACELERACIÓN MEDIA

El **vector aceleración instantánea** es el límite de esta relación cuando el intervalo de tiempo se aproxima a cero; es decir, el vector aceleración instantánea, es la derivada del vector velocidad respecto al tiempo:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad 3.11$$

DEFINICIÓN: VECTOR ACELERACIÓN INSTANTÁNEA

Para calcular la aceleración instantánea, expresaremos $\vec{v}$ en función de sus coordenadas rectangulares:

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

Por lo tanto,

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}$$
$$= a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k} \qquad 3.12$$

donde las componentes de $\vec{a}$ son

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}.$$

Ejemplo 3.3 El movimiento de una pelota de béisbol

La posición de una pelota de béisbol golpeada por el bateador viene dada por la expresión $\vec{r} = [1{,}5\text{ m} + (12\text{ m/s})t]\hat{i} + [(16\text{ m/s})t - (4{,}9\text{ m/s}^2)t^2]\,\hat{j}$. Determinar su velocidad y aceleración en función del tiempo.

PLANTEAMIENTO Recordemos que $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ (ecuación 3.1). Podemos encontrar las componentes x e y de la velocidad y aceleración, tomando las derivadas temporales de x e y.

SOLUCIÓN

1. Calculamos las componentes x e y de $\vec{r}$:
$$x = 1{,}5\text{ m} + (12\text{ m/s})t$$
$$y = (16\text{ m/s})t - (4{,}9\text{ m/s}^2)t^2$$

2. Las componentes x e y de la velocidad se obtienen derivando x e y:
$$v_x = \frac{dx}{dt} = 12\text{ m/s}$$
$$v_y = \frac{dy}{dt} = (16\text{ m/s}) - 2(4{,}9\text{ m/s}^2)t$$

3. Derivando de nuevo se obtienen las componentes de la aceleración:
$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0$$
$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -9{,}8\text{ m/s}^2$$

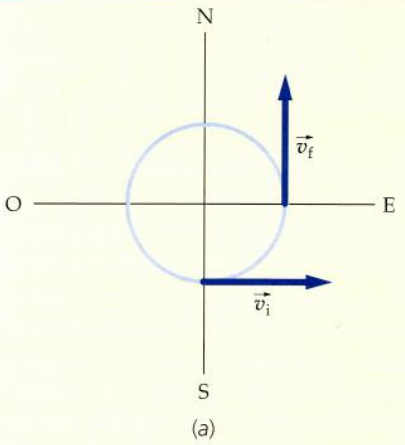
4. Utilizando la notación vectorial, la velocidad y la aceleración son:
$$\vec{v} = \boxed{(12\text{ m/s})\hat{i} + [16\text{ m/s} - (9{,}8\text{ m/s}^2)t]\hat{j}}$$
$$\vec{a} = \boxed{(-9{,}8\text{ m/s}^2)\hat{j}}$$

COMPROBACIÓN Las unidades de la velocidad y aceleración son m/s y m/s², respectivamente. En el paso 4, los resultados para la velocidad y aceleración tienen las unidades correctas de m/s y m/s².

Para que un vector sea constante, tanto su módulo como su dirección deben permanecer constantes. Si cualquiera de ellas cambia, el vector se modifica. Por lo tanto, si un coche toma una curva en la carretera con el módulo de la velocidad constante, experimenta una aceleración, ya que el vector velocidad se modifica debido al cambio de dirección.

Ejemplo 3.4 Tomando una curva

Un coche se mueve hacia el este a 60 km/h. Toma una curva y 5 s más tarde viaja hacia el norte a 60 km/h. Determinar la aceleración media del coche.

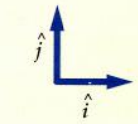


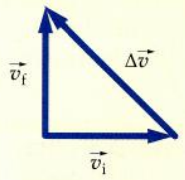
(a)

PLANTEAMIENTO Calculamos la aceleración media a partir de su definición, $\vec{a}_m = \Delta\vec{v}/\Delta t$. Primero calculamos $\Delta\vec{v}$ que es el vector que sumado a $\vec{v}_i$ nos da $\vec{v}_f$.

SOLUCIÓN

1. La aceleración media es el cociente entre la variación de velocidad y el intervalo de tiempo: $\vec{a}_m = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$
2. Para hallar $\Delta\vec{v}$, debemos especificar primero $\vec{v}_i$ y $\vec{v}_f$. Dibujemos $\vec{v}_i$ y $\vec{v}_f$ (figura 3.7*a*), y tracemos el diagrama de suma vectorial (figura 3.7*b*) correspondiente a $\vec{v}_f = \vec{v}_i + \Delta\vec{v}$:
3. El cambio de velocidad viene determinado por las velocidades inicial y final: $\vec{v}_f = \vec{v}_i + \Delta\vec{v}$
4. Sustituya los resultados anteriores para determinar la aceleración media: $\vec{a}_m = \dfrac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{\Delta t} = \dfrac{60\ \text{km/h}\,\hat{j} - 60\ \text{km/h}\,\hat{i}}{5{,}0\ \text{s}}$
5. Convierta 60 km/h a metros por segundo: $60\ \text{km/h} \times \dfrac{1\ \text{h}}{3600\ \text{s}} \times \dfrac{1000\ \text{m}}{1\ \text{km}} = 16{,}7\ \text{m/s}$
6. Exprese la aceleración en metros por segundo al cuadrado: $\vec{a}_m = \dfrac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{\Delta t} = \dfrac{16{,}7\ \text{m/s}\,\hat{j} - 16{,}7\ \text{m/s}\,\hat{i}}{5{,}0\ \text{s}} = \boxed{-3{,}4\ \text{m/s}^2\hat{i} + 3{,}4\ \text{m/s}^2\hat{j}}$





(b)

FIGURA 3.7

COMPROBACIÓN La componente de la velocidad en dirección este disminuye de 60 km/h a cero, de tal forma que cabría esperar que la componente x de la aceleración fuese negativa. Así mismo, la componente de la velocidad en dirección norte aumenta de cero a 60 km/h, de forma que cabría esperar que la componente y de la aceleración fuese positiva. El resultado del apartado 6 concuerda con estas expectativas.

OBSERVACIÓN Obsérvese que el coche sigue acelerando aunque el módulo de su velocidad se mantenga constante.

PROBLEMA PRÁCTICO 3.1 Determinar el módulo y la dirección del vector aceleración media.

El movimiento de un objeto alrededor de una circunferencia es un ejemplo corriente de movimiento en el cual la velocidad de un objeto cambia, aunque su módulo permanezca constante.

> ¡ No hay que suponer que la aceleración de un cuerpo es cero sólo porque se mueva a velocidad cuyo módulo sea constante. Para que la aceleración sea cero, ni el módulo ni la dirección pueden cambiar.

LA DIRECCIÓN DEL VECTOR ACELERACIÓN

En los capítulos siguientes será necesario determinar la dirección del vector aceleración a partir de una descripción del movimiento. Para ello, analicemos el movimiento de una saltadora de bungee saltando en una plataforma elástica cuando alcanza el punto más bajo de un salto y frena y, posteriormente, cambia el sentido de su velocidad iniciando un nuevo salto. Para determinar la dirección de la aceleración cuando está frenando, en la figura 3.8*a* dibujamos una serie de puntos que muestran su posición en sucesivos instantes de tiempo. Cuanto más rápido se

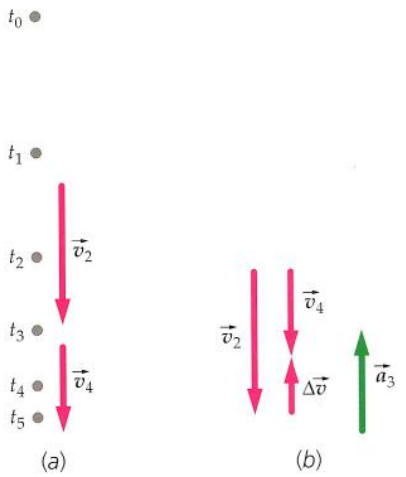


FIGURA 3.8 (*a*) Diagrama del movimiento del frenado de una saltadora de bungee cuando llega al suelo. Los puntos se han dibujado a instantes de tiempo consecutivos. (*b*) Dibujamos los vectores $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_4$ en el mismo punto y determinamos $\Delta\vec{v}$ como el vector que une el extremo de $\vec{v}_2$ con el punto que alcanza $\vec{v}_4$ de modo que $\vec{v}_2 + \Delta\vec{v} = \vec{v}_4$. La aceleración $\vec{a}_3$ va en la misma dirección y sentido que $\Delta\vec{v}$.

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 3.1

La figura 3.9 es el diagrama del movimiento de la saltadora antes, durante y después del instante de tiempo t_6, cuando se halla momentáneamente en reposo en el punto más bajo de su descenso. En la parte de su ascenso mostrada en el esquema, la velocidad de la saltadora aumenta. Utilice este diagrama para determinar la dirección de la aceleración de la saltadora (*a*) en el instante t_6 y (*b*) en el instante t_9.

mueve, mayor es la distancia que recorre en instantes de tiempo sucesivos y, por lo tanto, mayor es la distancia entre los correspondientes puntos de la figura. Numeramos los puntos correlativamente, empezando con el cero. En el instante t_0 la saltadora está en el punto 0, en el instante t_1 en el punto 1 y así sucesivamente. Para determinar la dirección de la aceleración en el instante t_3, dibujamos los vectores que representan la velocidad de la saltadora en los instantes t_2 y t_4. La aceleración media en el intervalo entre t_2 y t_4 es $\Delta\vec{v}/\Delta t$, donde $\Delta\vec{v} = \vec{v}_4 - \vec{v}_2$ y $\Delta t = t_4 - t_2$. Usamos estas expresiones para estimar la aceleración de la saltadora en el instante de tiempo t_3, es decir, como a_3 y $\Delta\vec{v}$ van en la misma dirección, determinando la dirección de Δv averiguamos también la dirección de $\vec{a}_3$. La dirección de $\Delta\vec{v}$ se obtiene usando la relación $\vec{v}_2 + \Delta\vec{v} = \vec{v}_4$ y dibujando el correspondiente diagrama de suma de vectores (figura 3.8*b*). Como la saltadora se mueve más rápido en el instante t_2 que en el instante t_4 (los puntos están más separados), la longitud de $\vec{v}_2$ es superior a la de $\vec{v}_4$. A partir de la figura podemos ver que $\Delta\vec{v}$ y, por lo tanto, la dirección de $\vec{a}_3$ está dirigida hacia arriba.

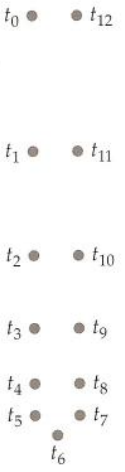


FIGURA 3.9
Los puntos que representan el ascenso de la saltadora se dibujan a la derecha de aquellos que representan su descenso con el objetivo de que no se superpongan. Sin embargo, el movimiento de la saltadora está dirigido en la misma dirección aunque con sentido contrario.

Ejemplo 3.5 La bala humana

Póngalo en su contexto

Un circo patrocinado por su universidad le pide sustituir a un actor que está enfermo. El trabajo consistiría en ser disparado desde un cañón. Usted acepta el reto encantado. El tubo del cañón se inclina un ángulo de 60° respecto al eje horizontal. Su profesor de física general le ofrece un punto extra en la nota final si usted es capaz de estimar correctamente la dirección de su aceleración durante el ascenso mediante un diagrama de movimiento.

PLANTEAMIENTO Durante el ascenso, usted viaja a lo largo de una trayectoria curva con velocidad decreciente. Utilice $\vec{a}_m = \Delta\vec{v}/\Delta t$ para estimar la dirección de su aceleración. Para estimar la dirección de $\Delta\vec{v}$ trace el diagrama de movimiento y entonces dibuje la relación $\vec{v}_i + \Delta\vec{v} = \vec{v}_f$.

SOLUCIÓN

1. Dibujamos el diagrama del movimiento para la etapa ascendente del vuelo (figura 3.10*a*). Como la velocidad decrece conforme usted asciende, el espacio entre puntos consecutivos del diagrama también decrece conforme usted asciende:
2. Elija un punto del diagrama del movimiento y dibuje el vector velocidad sobre el diagrama para los puntos anterior y posterior. Los vectores deben ser tangentes a la trayectoria.

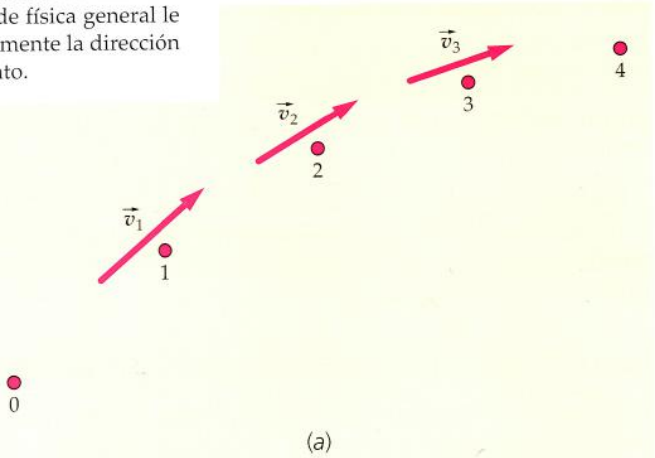
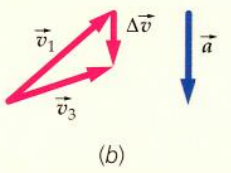


FIGURA 3.10

3. Trace el diagrama para la suma vectorial (figura 3.10*b*) de la relación $\vec{v}_i + \Delta\vec{v} = \vec{v}_f$. Comience dibujando los dos vectores velocidad aplicados sobre el mismo punto. Esos vectores tienen el mismo módulo y dirección que los vectores dibujados en el apartado 2. Finalmente, dibuje el vector $\Delta\vec{v}$ desde el extremo de $\vec{v}_i$ hasta el de $\vec{v}_f$.
4. Dibuje el vector aceleración estimado en la misma dirección que $\Delta\vec{v}$, pero sin el mismo módulo ($\vec{a} \approx \Delta\vec{v}/\Delta t$).

COMPROBACIÓN La componente vertical hacia arriba de la velocidad decrece durante el ascenso, de forma que cabría esperar que $\Delta\vec{v}$ tuviera una componente vertical hacia abajo. En el paso 3 se comprueba este hecho.

OBSERVACIÓN Determinar la dirección de la aceleración utilizando un diagrama de movimiento no es un método totalmente preciso. Por lo tanto, el resultado debe entenderse como una estimación de la dirección de la aceleración.



(*b*)

FIGURA 3.10 *(continuación)*

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 3.2

Utilice un diagrama del movimiento para estimar la dirección de la aceleración del ejemplo 3.5 durante la parte descendente del movimiento.

3.2 CASO PARTICULAR 1: MOVIMIENTO DE PROYECTILES

En el béisbol, en una carrera o en un tiro de falta, la pelota sigue una trayectoria curva a través del aire. Este tipo de movimiento denomina **movimiento de proyectiles** y ocurre cuando el cuerpo (proyectil) se lanza al aire y se mueve libremente. El proyectil puede ser una pelota, un dardo, un chorro de agua que emana de una fuente o incluso un cuerpo humano durante un salto largo. Si podemos despreciar la fricción del aire decimos que el proyectil está en caída libre. La aceleración de los cuerpos en caída libre, cerca de la superficie terrestre, es la aceleración debida a la gravedad.

La figura 3.11 muestra el lanzamiento de una partícula con velocidad inicial v_0 formando un ángulo θ_0 con el eje horizontal. Sea (x_0, y_0) el punto de lanzamiento, siendo y positiva hacia arriba y x positiva hacia la derecha. Las componentes de la velocidad inicial $\vec{v}_0$ son

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta_0 \qquad 3.13a$$

$$v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\theta_0 \qquad 3.13b$$

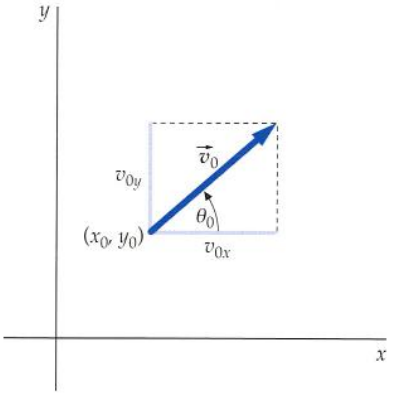


FIGURA 3.11 Las componentes de $\vec{v}_0$ son $v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$ y $v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\theta_0$, donde θ_0 es el ángulo que forma $\vec{v}_0$ con el eje x.

En ausencia de la resistencia del aire, la aceleración es la de la gravedad, dirigida verticalmente hacia abajo:

$$a_x = 0 \qquad 3.14a$$

y

$$a_y = -g \qquad 3.14b$$

Como la aceleración es constante, podemos utilizar las ecuaciones cinemáticas estudiadas en el capítulo 2. La componente x de la velocidad $\vec{v}$ es constante, ya que no existe aceleración horizontal:

$$v_x = v_{0x} \qquad 3.15a$$

La componente y varía con el tiempo según $v_y = v_{0y} + a_y t$ (ecuación 2.12), y siendo $a_y = -g$:

$$v_y = v_{0y} - gt \qquad 3.15b$$

Obsérvese que v_x no depende de v_y y viceversa. Las componentes horizontal y vertical del movimiento de proyectiles son independientes. Esto puede demostrarse dejando caer una bola desde cierta altura y lanzando horizontalmente desde la

misma altura una segunda bola al mismo tiempo. Ambas bolas chocan contra el suelo simultáneamente (ver figura 3.12).

Los desplazamientos x e y vienen dados por (véase ecuación 2.14.)

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t \qquad 3.16a$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2 \qquad 3.16b$$

La notación $x(t)$ e $y(t)$ destaca simplemente que x e y son funciones del tiempo. Si se conoce la componente y de la velocidad inicial, la ecuación 3.16*b* nos permite determinar el instante t en que la partícula se encuentra a la altura y. La posición horizontal en ese mismo tiempo puede calcularse a partir de la ecuación 3.16*a*. (La forma vectorial de las ecuaciones 3.14 a 3.16 se verá justo antes del ejemplo 3.10.)

La ecuación general para la trayectoria $y(x)$ puede obtenerse a partir de las ecuaciones 3.16 eliminando la variable t entre ambas. Escogiendo $x_0 = 0$ y $y_0 = 0$, se obtiene $t = x/v_{0x}$ de la ecuación 3.16*a*. Sustituyendo este resultado en la ecuación 3.16*b*, se obtiene

$$y(x) = v_{0y}\left(\frac{x}{v_{0x}}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2 = \left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}}\right)x - \left(\frac{g}{2v_{0x}^2}\right)x^2$$

Teniendo en cuenta los valores de las componentes de las velocidades, resulta

$$y(x) = (\operatorname{tg}\theta_0)x - \left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}\right)x^2 \qquad 3.17$$

TRAYECTORIA DE UN PROYECTIL

para la trayectoria de un proyectil. Esta ecuación es de la forma $y = ax + bx^2$, que es la ecuación de una parábola que pasa por el origen. La figura 3.13 muestra la trayectoria de un proyectil con el vector velocidad y sus componentes indicadas en diversos puntos. Esta trayectoria se refiere a un proyectil que choca con el suelo en el punto P. La distancia horizontal $|\Delta x|$ entre el punto de lanzamiento y el de impacto es el alcance R.

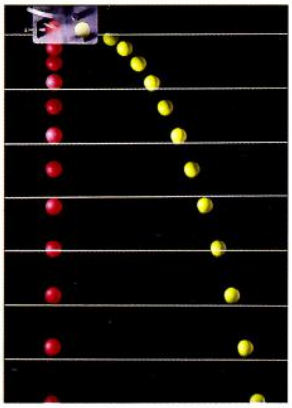


FIGURA 3.12 La bola roja parte del reposo en el instante en que la bola amarilla sale rodando por la parte superior de la mesa. Las posiciones de las dos bolas se muestran en intervalos de tiempo idénticos. El movimiento vertical de la bola amarilla es idéntico al de la bola roja. De esta manera se comprueba que los movimientos horizontal y vertical de la bola amarilla son independientes entre sí. *(Richard Megna/Fundamental Photographs.)*

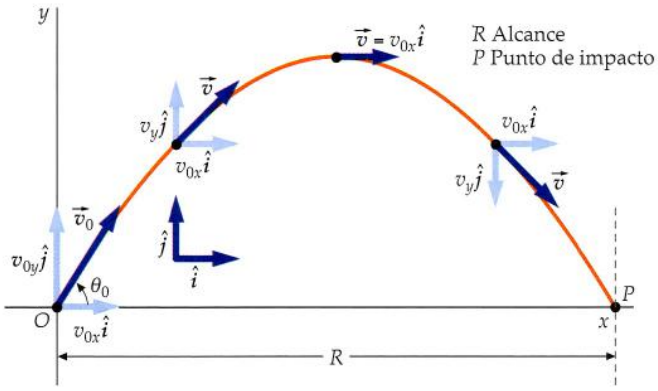


FIGURA 3.13 Trayectoria de un proyectil, en donde se indican los vectores velocidad en diferentes instantes de tiempo.

> ! No es correcto afirmar que la velocidad (en sentido vectorial) de un proyectil es cero cuando éste alcanza el punto más alto de su trayectoria. En el punto más alto v_y es cero, pero el proyectil puede seguir en movimiento horizontal.

Ejemplo 3.6 Un birrete en el aire

Un estudiante de física lanza un birrete al aire con una velocidad inicial de 24,5 m/s, formando un ángulo de 36,9° con la horizontal. Posteriormente, otro estudiante lo coge. Determinar (*a*) el tiempo total que el birrete está en el aire y (*b*) la distancia total horizontal recorrida.

PLANTEAMIENTO Elegimos la posición inicial del birrete como origen, de modo que $x_0 = y_0 = 0$. Suponemos que el otro estudiante lo coge a la misma altura. El tiempo total que el birrete está en el aire se determina considerando $y(t) = 0$ en $y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$ (ecuación 3.16*b*). Este resultado puede utilizarse en $x(t) = x_0 + v_{0x}t$ (ecuación 3.16*a*) para determinar la distancia total recorrida.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Sustituimos $y = 0$ en la ecuación 3.16*b*:

$$y = v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2$$
$$0 = t(v_{0y} - \tfrac{1}{2}gt)$$

2. Existen dos soluciones para t:

$$t_1 = 0 \text{ (instante inicial)}$$
$$t_2 = \frac{2v_{0y}}{g}$$

3. Utilizamos la trigonometría para relacionar v_{0y} con v_0 y θ_0 (ver figura 3.11):

$$v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\theta_0$$

4. Sustituimos este resultado en v_{0y} del paso 2 para determinar el tiempo total t_2:

$$t_2 = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \operatorname{sen}\theta_0}{g} = \frac{2(24{,}5 \text{ m/s}) \operatorname{sen} 36{,}9°}{9{,}81 \text{ m/s}^2} = \boxed{3{,}00 \text{ s}}$$

(*b*) Utilizamos este valor del tiempo para calcular la distancia total horizontal recorrida:

$$x = v_{0x}t_2 = (v_0 \cos\theta_0)t_2 = (24{,}5 \text{ m/s}) \cos 36{,}9°(3{,}00 \text{ s}) = \boxed{58{,}8 \text{ m}}$$

COMPROBACIÓN Si el birrete viajara con velocidad horizontal constante de 24,5 m/s durante 3 segundos habría recorrido una distancia de 73,5 m. Como fue lanzado con un ángulo, la componente horizontal de su velocidad sería inferior a 24,5 m/s de forma que cabría esperar que la distancia horizontal recorrida fuese menor que 73,5 m. El resultado de 58,8 m del apartado (*b*) confirma este razonamiento.

OBSERVACIÓN El tiempo que el birrete está en el aire es el mismo que obtuvimos en el ejemplo 2.13, en donde el birrete fue lanzado verticalmente hacia arriba con $v_0 = 14{,}7$ m/s. La figura 3.14 muestra la altura y en función de t para el birrete. Esta curva es idéntica a la representada en la figura 2.20*a* (ejemplo 2.13) porque ambos birretes están sometidos a la misma aceleración y velocidad vertical. La figura 3.14 puede reinterpretarse como un gráfico de y en función de x si su escala de tiempo se convierte en una escala de longitud. Para ello basta multiplicar los valores del tiempo por 19,6 m/s, ya que el birrete se desplaza horizontalmente a (24,5 m/s) cos 36,9° = 19,6 m/s. La curva y en función de x es una parábola.

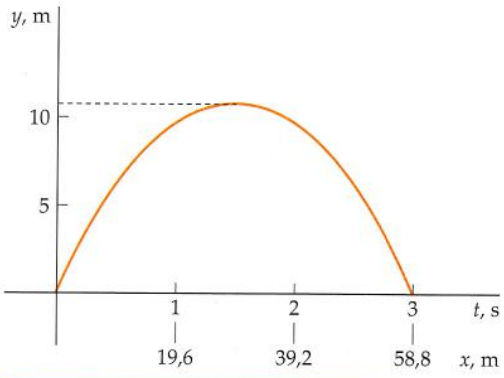


FIGURA 3.14 Gráfico de y en función de t y de y en función de x.

Ejemplo 3.7 La caída de un paquete de aprovisionamiento

Un helicóptero deja caer un paquete con suministros a las víctimas de una inundación que se hallan en una balsa. Cuando el paquete se lanza, el helicóptero se encuentra a 100 m por encima de la balsa, volando a 25 m/s y formando un ángulo de 36,9° sobre la horizontal. (*a*) ¿Durante cuánto tiempo estará el paquete en el aire? (*b*) ¿Dónde caerá el paquete? (*c*) Si el helicóptero vuela a velocidad constante, ¿cuál será su posición en el instante en que el paquete llega al suelo?

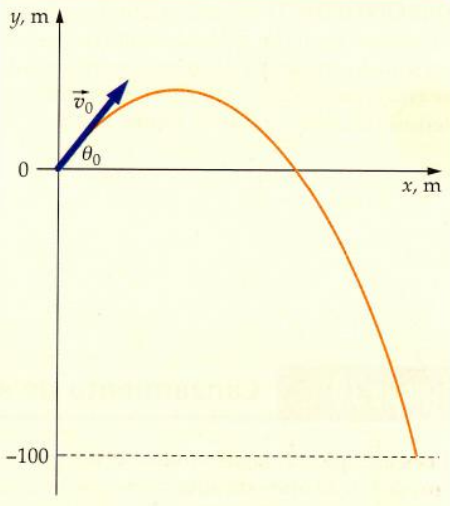


FIGURA 3.15 La parábola se cruza con la recta $y = -100$ m dos veces, pero sólo en una de ellas el tiempo es positivo.

PLANTEAMIENTO La distancia horizontal recorrida por el paquete viene dada por la ecuación 3.16*a*, en donde t es el tiempo que el paquete se encuentra en el aire. El valor de t puede determinarse a partir de la ecuación 3.16*b*. Escoger el origen directamente por debajo del helicóptero cuando el paquete se lanza. La velocidad inicial del paquete es la velocidad inicial del helicóptero.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. La trayectoria del paquete durante el tiempo que está en el aire se muestra en la figura 3.15:

2. Para determinar el tiempo que el paquete está en el aire escribimos la ecuación $y(t)$, y luego sustituimos por $y_0 = 0$ y $a_y = -g$:

$$y = y_0 + v_{0y}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2$$
$$y = 0 + v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2 = v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

3. La solución de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ viene dada por la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Utilizando esta expresión, resuelve la ecuación del apartado 2 para determinar t:

$$y = v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

por lo tanto,

$$0 = \tfrac{1}{2}gt^2 - v_{0y}t + y$$

y

$$t = \frac{v_{0y} \pm \sqrt{v_{0y}^2 - 2gy}}{g}$$

4. Calculamos t cuando $y(t) = -100$ m. Para ello, primero se calcula v_{0y} $= -100$ m, y luego usamos el valor de v_{0y} para calcular t.

$$v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\theta_0 = (25{,}0 \text{ m/s}) \operatorname{sen} 36{,}9° = 15{,}0 \text{ m/s}$$

por lo tanto,

$$t = \frac{15{,}0 \text{ m/s} \pm \sqrt{(15{,}0 \text{ m/s})^2 - 2(9{,}81 \text{ m/s}^2)(-100 \text{ m})}}{9{,}81 \text{ m/s}^2}$$

por lo tanto,

$$t = -3{,}24 \text{ s} \quad \text{o} \quad t = 6{,}30 \text{ s}$$

Dado que el paquete se suelta cuando $t = 0$, el tiempo que transcurre hasta el impacto no puede ser negativo. Por lo tanto:

$$t = \boxed{6{,}30 \text{ s}}$$

(*b*) 1. En el momento del impacto, el paquete ha recorrido una distancia horizontal x, donde x es la velocidad horizontal por el tiempo de vuelo. Primero hallamos la velocidad horizontal:

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta_0 = (25{,}0 \text{ m/s}) \cos 36{,}9° = 20{,}0 \text{ m/s}$$

2. Luego sustituimos v_{0x} en $x = x_0 + v_{0x}t$ (ecuación 3.16*a*) y hallamos x.

$$x = v_{0x}t = (20{,}0 \text{ m/s})(6{,}30 \text{ s}) = \boxed{126 \text{ m}}$$

(*c*) Las coordenadas de la posición del helicóptero en el momento del impacto del paquete con el agua son:

$$x_h = v_{0x}t = (20{,}0 \text{ m/s})(6{,}30 \text{ s}) = 126 \text{ m}$$
$$y_h = y_{h0} + v_{h0}t = 0 + (15{,}0 \text{ m/s})(6{,}30 \text{ s}) = 94{,}4 \text{ m}$$

En el momento del impacto el helicóptero está

$$\boxed{194 \text{ m exactamente encima del paquete}}.$$

COMPROBACIÓN El helicóptero se encuentra exactamente encima del paquete cuando éste llega al agua. Esto es debido a que la componente horizontal de las velocidades del paquete y el helicóptero son iguales en el momento del lanzamiento del paquete y, además, permanecen constantes durante sus respectivos vuelos.

OBSERVACIÓN El tiempo positivo es el apropiado, ya que corresponde a un tiempo posterior al lanzamiento del paquete (que tiene lugar para $t = 0$). La solución negativa del tiempo corresponde al instante en que el paquete se encontraría a $y = -100$ m si su movimiento hubiera comenzado con anterioridad, como indica la figura 3.16.

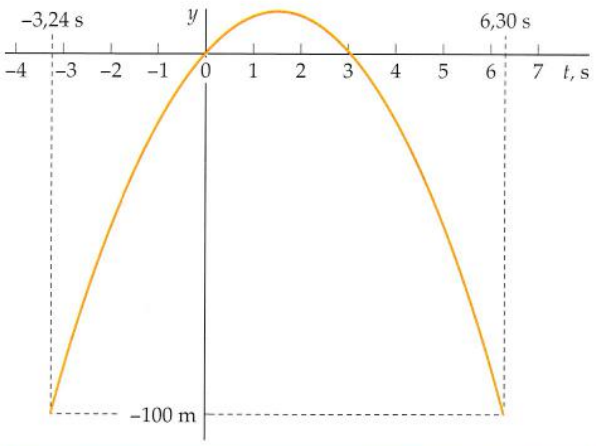


FIGURA 3.16

Ejemplo 3.8 Lanzamiento de suministros

Inténtelo usted mismo

En el ejemplo 3.7, (*a*) determinar el tiempo t_1 que tarda el paquete en alcanzar su máxima altura h, (*b*) calcular esta altura máxima h y (*c*) determinar el tiempo t_2 transcurrido desde que el paquete alcanza su altura máxima hasta que llega al suelo.

PLANTEAMIENTO El tiempo t_1 es el tiempo en el cual la componente vertical de la velocidad es cero. Utilizando $v_y(t) = v_{0y} - gt$ (ecuación 3.15*b*) hallamos t_1.

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	Respuestas
(*a*) 1. Expresar $v_y(t)$ para el paquete.	$v_y(t) = v_{0y} - gt$
2. Hacer $v_y(t_1) = 0$ y despejar t_1.	$t_1 =$ 1,53 s
(*b*) 1. Determinar $v_{y\,\mathrm{m}}$ durante el tiempo en que el paquete se mueve hacia arriba.	$v_{y\,\mathrm{m}} = 7{,}505$ m/s
2. Utilizar $v_{y\,\mathrm{m}}$ para determinar la distancia recorrida hacia arriba. A continuación, calcular h.	$\Delta y = 11{,}48$ m, por lo tanto, $h =$ 111 m
(*c*) Hallar el tiempo transcurrido mientras el paquete cae la distancia h.	$t_2 =$ 4,77 s

COMPROBACIÓN De acuerdo con el ejemplo 3.7, $t_1 + t_2 = 6{,}30$ s. Así mismo, observe que t_1 es menor que t_2. Esto era de esperar pues el paquete asciende una distancia de 12 m mientras que cae a una distancia de 111 m.

PROBLEMA PRÁCTICO 3.2 Resolver el apartado (*b*) del ejemplo 3.8 usando la expresión para $y(t)$ de la ecuación 3.21*b* en vez de calcular $v_{y\,\mathrm{m}}$.

ALCANCE HORIZONTAL DE UN PROYECTIL

El alcance R de un proyectil se puede expresar en función de su velocidad inicial y del ángulo de lanzamiento con respecto al eje horizontal. Como en los ejemplos anteriores, el alcance se obtiene multiplicando la componente x de la velocidad por el tiempo total que el proyectil está en el aire. El tiempo total de vuelo T se obtiene haciendo $y = 0$ y $t = T$ en $y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ (ecuación 3.16*b*).

$$0 = v_{0y}T - \tfrac{1}{2}gT^2 \qquad T > 0$$

Dividiendo por T, nos da

$$v_{0y} - \tfrac{1}{2}gT = 0$$

El tiempo de vuelo del proyectil es entonces

$$T = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0}{g}\operatorname{sen}\theta_0$$

Para calcular el alcance horizontal R, sustituimos T en lugar de t en $x(t) = v_{0x}t$ (ecuación 3.16*a*) para obtener

$$R = v_{0x}T = (v_0\cos\theta_0)\left(\frac{2v_0}{g}\operatorname{sen}\theta_0\right) = \frac{2v_0^2}{g}\operatorname{sen}\theta_0\cos\theta_0$$

Esta expresión puede simplificarse si consideramos la relación trigonométrica:

$$\operatorname{sen}2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

Entonces,

$$R = \frac{v_0^2}{g}\operatorname{sen}2\theta_0 \qquad 3.18$$

ALCANCE HORIZONTAL DE UN PROYECTIL

PROBLEMA PRÁCTICO 3.3

Utilizar la ecuación 3.18 para verificar la respuesta del apartado (*b*) del ejemplo 3.6.

La ecuación 3.18 es útil para determinar el alcance de proyectiles con elevaciones inicial y final iguales. Es importante destacar que esta ecuación muestra cómo el alcance depende de θ. Como el valor máximo de sen 2θ es 1, cuando $2\theta = 90°$, o sea, $\theta = 45°$, el alcance del proyectil es máximo cuando $\theta = 45°$. La figura 3.17 muestra una serie de gráficos de las distancias verticales en función de las distancias horizontales para proyectiles de velocidad inicial 24,5 m/s y varios ángulos iniciales distintos. Los ángulos representados son 45°, que es el de alcance máximo, y pares de ángulos que difieren el mismo número de grados por encima y por debajo de 45°. Obsérvese que estos pares de ángulos tienen el mismo alcance. La curva verde tiene un ángulo inicial de 36,9° (0,64 rad), como en el ejemplo 3.6.

En muchas aplicaciones prácticas, las cotas de altura inicial y final pueden no ser iguales y son importantes otras consideraciones. Por ejemplo, en el lanzamiento de peso, la bola termina su recorrido cuando choca contra el suelo, pero ha sido proyectada desde una altura inicial de unos 2 m sobre el suelo. Esto hace que el alcance sea máximo para un ángulo algo inferior a 45°, como se indica en la figura 3.18. Los estudios realizados de los mejores lanzadores de peso muestran que el alcance máximo tiene lugar para un ángulo inicial de unos 42°.

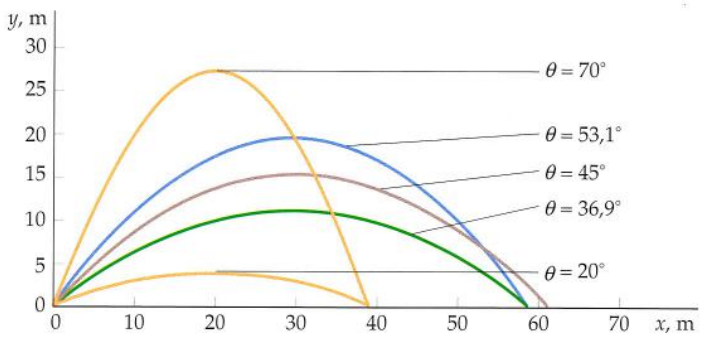


FIGURA 3.17 El módulo de la velocidad inicial es el mismo en cada trayectoria.

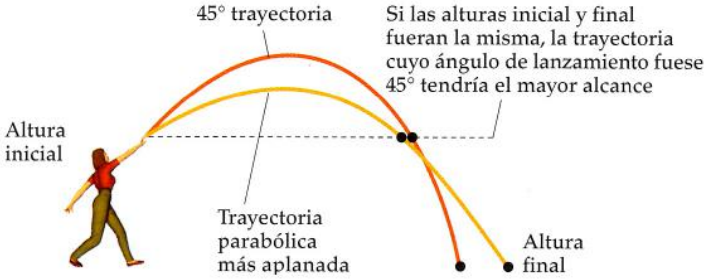


FIGURA 3.18 Si un proyectil cae al suelo a una altura inferior a la de lanzamiento, el alcance máximo se logra bajo un ángulo de tiro algo menor de 45°.

Ejemplo 3.9 A la caza del ladrón

Un policía persigue a un consumado ladrón de joyas a través de los tejados de la ciudad. Ambos están corriendo a la velocidad de 5 m/s cuando llegan a un espacio vacío entre dos edificios que tiene 4 m de anchura y un desnivel de 3 m, tal como muestra la figura 3.19. El ladrón, que tiene algunos conocimientos de física, salta a 5 m/s con una inclinación de 45° y salva el hueco con facilidad. El policía nunca estudió física y piensa que lo mejor sería saltar con el máximo de velocidad horizontal, de modo que salta a 5 m/s horizontalmente. (*a*) ¿Conseguirá salvar el obstáculo? (*b*) ¿A qué distancia del borde del segundo edificio llegó el ladrón?

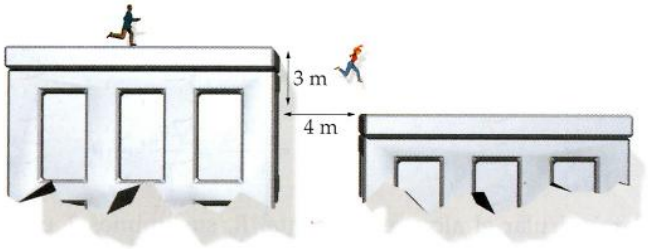


FIGURA 3.19

PLANTEAMIENTO El tiempo en el aire durante el salto depende sólo del movimiento vertical. Elegir como origen el punto de lanzamiento con la dirección positiva hacia arriba, para poder aplicar las ecuaciones 3.16. Utilizar la ecuación 3.16*b* para $y(t)$ y deducir de ella el tiempo para $y = -3$ m para $\theta_0 = 0$ y de nuevo para $\theta_0 = 45{,}0°$. El valor de x correspondiente a este tiempo es la distancia horizontal recorrida.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Escribir $y(t)$ para el policía y calcular t cuando $y = -3$ m:

$$y = y_0 + v_{y0}t - \tfrac{1}{2}gt^2 - 3{,}00\text{ m} = 0 + 0 - \tfrac{1}{2}(9{,}81\text{ m/s}^2)t^2$$

$$t = 0{,}782\text{ s}$$

2. Determinar la distancia horizontal recorrida durante este tiempo:

$$x = x_0 + v_{x0}t$$

$$x = 0 + (5{,}00\text{ m/s})(0{,}782\text{ s})$$

$$x = \boxed{3{,}91\text{ m}}$$

Como esta distancia es menor de 4 m, el policía no puede cruzar el espacio vacío entre los edificios.

(*b*) 1. Escribir $y(t)$ para el ladrón y sustituir $y = -3\text{m}$. $y(t)$ es una ecuación de segundo grado con dos soluciones, pero sólo una es aceptable:

$$y = y_0 + v_{y0}t - \tfrac{1}{2}gt^2 - 3{,}00\text{ m} = 0 + (5{,}00\text{ m/s})\,\text{sen}\,45{,}0° - \tfrac{1}{2}(9{,}81\text{ m/s}^2)t^2$$

$t = -0{,}500$ s o $t = 1{,}22$ s

Obviamente, el ladrón alcanza el techo después de saltar, de modo que $t = 1{,}22$ s

2. Calcular la distancia horizontal correspondiente al valor positivo de t:

$$x = x_0 + v_{0x}t = 0 + (5{,}00\text{ m/s})\cos 45°\,(1{,}22\text{ s}) = 4{,}31\text{ m}$$

3. Restar 4 m de esta distancia:

$$4{,}31\text{ m} - 4{,}00\text{ m} = \boxed{0{,}31\text{ m}}$$

COMPROBACIÓN La componente horizontal de la velocidad del policía se mantiene en los 5 m/s durante el salto. De esta forma, el policía recorre los 4 m de distancia hasta el próximo edificio en 4 m/(5 m/s) = 0,8 s. Como en el apartado (*a*), el resultado es inferior a 0,8 s, sabemos que el policía cae en el hueco antes de llegar el segundo edificio, lo que está de acuerdo con el resultado del paso 2 del apartado (*a*).

OBSERVACIÓN Considerando al policía como una partícula, hemos encontrado que se hallaba ligeramente por debajo de la azotea en el momento del impacto. Sin embargo, no podemos concluir que no completó el salto porque el policía no es una partícula. Posiblemente lo lograra, estirando el pie.

MOVIMIENTO DE PROYECTILES EN FORMA VECTORIAL

Sabemos que en el movimiento de proyectiles $a_x = 0$ y $a_y = -g$ (ecuaciones 3.14*a* y 3.14*b*), donde la dirección $+y$ se dirige hacia arriba. Para expresar esas ecuaciones en forma vectorial, multiplicamos ambos lados de la ecuación por los vectores unitarios apropiados y luego sumamos las ecuaciones resultantes. Esto es, $a_x\hat{\imath} = 0\hat{\imath}$ más $a_y\hat{\jmath} = -g\hat{\jmath}$ dan

$$a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} = -g\hat{\jmath} \quad \text{o} \quad \vec{a} = \vec{g} \qquad 3.14c$$

donde $\vec{g}$ es el vector aceleración correspondiente a la caída libre. En la superficie de la Tierra el valor de $\vec{g}$ es $g = 9{,}81\text{ m/s}^2$.

Combinando las ecuaciones $v_x = v_{0x}$ y $v_y = v_{0y} - gt$ de forma análoga, tenemos

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t \;(\text{o } \Delta\vec{v} = \vec{g}\,t) \qquad 3.15c$$

donde $\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath}$, $\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{\imath} + v_{0y}\hat{\jmath}$, y $\vec{g} = -g\hat{\jmath}$. Repitiendo el proceso para las ecuaciones $x(t) = x_0 + v_{0x}t$ e $y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$, se obtiene

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0t + \tfrac{1}{2}\vec{g}t^2 \quad (\text{o } \Delta\vec{r} = \vec{v}_0t + \tfrac{1}{2}\vec{g}t^2) \qquad 3.16c$$

donde $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$ y $\vec{r}_0 = x_0\hat{\imath} + y_0\hat{\jmath}$. Para determinados problemas conviene utilizar las formas vectoriales de las ecuaciones cinemáticas (ecuaciones 3.15*c* y 3.16*c*). Éste es el caso del ejemplo que sigue.

Ejemplo 3.10 El guardabosques y el mono

Un guardabosques con una cerbatana intenta disparar un dardo tranquilizante a un mono que cuelga de una rama (figura 3.20). El guardabosques apunta directamente al mono sin tener en cuenta que el dardo seguirá una trayectoria parabólica y pasará, por lo tanto, por debajo del mono. Sin embargo, éste, viendo salir el dardo de la cerbatana, se suelta de la rama y cae del árbol, esperando evitar el dardo. (*a*) Demostrar que el mono será alcanzado independientemente de cuál sea la velocidad inicial del dardo, con tal de que ésta sea lo suficientemente grande para que el dardo recorra la distancia horizontal que hay hasta el árbol antes de dar contra el suelo. Suponer que el tiempo de reacción del mono es despreciable. (*b*) Sea $\vec{v}_{d0}$ la velocidad del dardo al salir de la cerbatana. Determine la velocidad del dardo relativa al mono para un tiempo arbitrario t durante el vuelo del dardo.

PLANTEAMIENTO En este ejemplo tanto el mono como el dardo describen un movimiento de proyectil. Para mostrar que el dardo alcanza al mono, debemos demostrar que en un cierto tiempo t, el dardo y el mono tiene las mismas coordenadas, independientemente de la

velocidad inicial del dardo. Para ello tendremos que aplicar las ecuaciones 3.16*c* al mono y al dardo. Para la parte (*b*), podemos emplear la ecuación 3.15*c*, sin olvidarnos de los sistemas de referencia relativos.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Se aplica la ecuación 3.16*c* al mono en el tiempo t: $\Delta\vec{r}_m = \frac{1}{2}\vec{g}t^2$
(La velocidad inicial del mono es nula.)

2. Se aplica la ecuación 3.16*c* al dardo en el tiempo t: $\Delta\vec{r}_d = \vec{v}_{d0}t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$
donde $\vec{v}_{d0}$ es la velocidad inicial del dardo cuando sale de la cerbatana.

3. La figura 3.20 refleja un esquema del mono, el dardo y la cerbatana. Se muestra el dardo y el mono en sus posiciones en el instante inicial y en el tiempo t. Los vectores muestran los diferentes términos de los pasos 1 y 2:

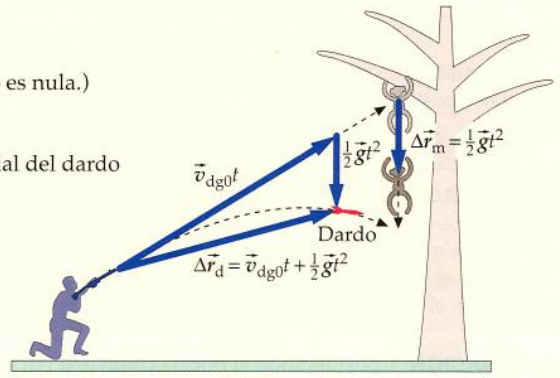


FIGURA 3.20

4. Obsérvese que en el tiempo t el dardo y el mono están a una distancia $\frac{1}{2}gt^2$ por debajo de la línea de mira de la cerbatana: El dardo impactará con el mono cuando el dardo alcance la línea de caída del mono.

(*b*) 1. La velocidad del dardo relativa al mono iguala la velocidad del dardo relativa a la cerbatana más la velocidad del arma relativa al animal: $\vec{v}_{dm} = \vec{v}_{dg} + \vec{v}_{gm}$

2. La velocidad de la cerbatana relativa al mono es igual a la velocidad del animal relativa al arma cambiada de signo: $\vec{v}_{dm} = \vec{v}_{dg} - \vec{v}_{mg}$

3. Con el uso de la ecuación 3.15*c* $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$ se consigue expresar la velocidad del dardo relativa a la cerbatana y la velocidad del animal relativa al arma: $\vec{v}_{dg} = \vec{v}_{dg0} + \vec{g}t$, $\vec{v}_{mg} = \vec{g}t$

4. La sustitución de estas expresiones en el paso 2 del apartado *b* lleva a: $\vec{v}_{dm} = (\vec{v}_{dg0} + \vec{g}t) - (\vec{g}t) = \boxed{\vec{v}_{dg0}}$

COMPROBACIÓN Los pasos 4 de los apartados (*a*) y (*b*) concuerdan entre sí. Concuerdan con el hecho de que el dardo impactará sobre el mono siempre y cuando el dardo alcance la línea de caída del mono antes que éste llegue al suelo.

OBSERVACIÓN Con respecto al mono, el dardo se mueve con velocidad constante $\vec{v}_{d0}$ siguiendo una línea recta. El dardo impacta en el animal en el instante de tiempo $t = L/v_{d0}$, donde L es la distancia desde la boca del arma hasta la posición inicial del mono.

En una experiencia magistral, un blanco se cuelga de un electroimán. Cuando el dardo sale del arma, el circuito que controla el electroimán se interrumpe y el blanco cae. La velocidad inicial del dardo se puede variar de modo que para valores de v_{dg0} grandes el dardo alcanza al blanco muy cerca de su posición inicial, mientras que si v_{dg0} tiene un valor pequeño, el dardo impacta con el blanco poco antes de que éste alcance el suelo.

PROBLEMA PRÁCTICO 3.4 Un jugador de hockey sobre hielo golpea el disco de forma que éste no impacta en la red sino que impacta sobre la parte superior de la portería en la valla de Plexiglass de 2,80 m de altura que limita la pista. El tiempo de vuelo del disco cuando alcanza la valla es $t_1 = 0{,}650$ s, siendo $x_1 = 12{,}0$ m la distancia horizontal desde el punto donde el jugador golpea el disco. (*a*) Calcular la velocidad y la dirección inicial del disco. (*b*) ¿Cuándo alcanza el disco su altura máxima? (*c*) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el disco?

3.3 CASO PARTICULAR 2: MOVIMIENTO CIRCULAR

La figura 3.21 muestra una masa sujeta a una cuerda, de modo que forma un péndulo que oscila en el plano vertical. La trayectoria que sigue la masa en su continua oscilación corresponde a una fracción de una trayectoria circular. El movimiento a lo largo de una trayectoria circular, o de una parte de ella, se denomina **movimiento circular**.

FIGURA 3.21 La lenteja de un péndulo oscila describiendo un arco circular centrado en el punto de soporte de la cuerda.

Ejemplo 3.11 El péndulo que oscila — *Conceptual*

Consideremos el movimiento de la masa del péndulo de la figura 3.21. Usando el diagrama del movimiento de la figura 3.21, determinar la dirección del vector aceleración cuando la masa está oscilando de izquierda a derecha, (*a*) en la porción descendente de su movimiento, (*b*) cuando pasa por el punto más bajo de su recorrido, y (*c*) en la porción ascendente de su recorrido.

PLANTEAMIENTO Cuando la masa desciende aumenta la velocidad y cambia su dirección. La aceleración está relacionada con el cambio de la velocidad mediante $\vec{a} \approx \Delta\vec{v}/\Delta t$. La dirección de la aceleración en un punto puede estimarse dibujando el diagrama de adición de vectores para la relación $\vec{v}_i + \Delta\vec{v} = \vec{v}_f$ para determinar la dirección de $\Delta\vec{v}$ y, por lo tanto, la dirección del vector aceleración.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. La figura 3.22*a* muestra la representación de una oscilación completa de izquierda a derecha de la masa del péndulo. La distancia entre los puntos es mayor en los puntos más bajos de la trayectoria, ya que en ellos la velocidad es mayor:

2. Para el punto en t_2, se determina la diferencia entre la velocidad en el punto inmediatamente anterior y en el punto inmediatamente posterior (los puntos en t_1 y t_3). Obsérvese que los vectores velocidad se dibujan tangentes a la trayectoria y que su longitud es proporcional a la velocidad (figura 3.22*a*):

3. Se representa la expresión gráfica de la relación $\vec{v}_i + \Delta\vec{v} = \vec{v}_f$ y el vector aceleración, ya que dado que $\vec{a} \approx \Delta\vec{v}/\Delta t$, $\vec{a}$ va en la misma dirección que $\Delta\vec{v}$:

(*b*) Se repiten los pasos 2 y 3 (figura 3.22*c*) para el punto en t_4:

(*c*) Se repiten los pasos 2 y 3 (figura 3.22*d*) para un punto en la porción ascendente de la trayectoria:

COMPROBACIÓN En el punto más bajo (en t_4) la componente horizontal de $\vec{v}$ es máxima, de forma que cabe esperar que la componente horizontal de $\vec{a}$ sea cero. En las proximidades del punto más bajo, la componente vertical de $\vec{v}$ es negativa justo antes de t_4 y es positiva justo después de t_4; así pues, la componente vertical de $\vec{v}$ es creciente en t_4. Esto implica que la componente vertical de $\vec{a}$ debería ser positiva en t_4. El vector aceleración de la figura 3.22*c* concuerda con estos razonamientos.

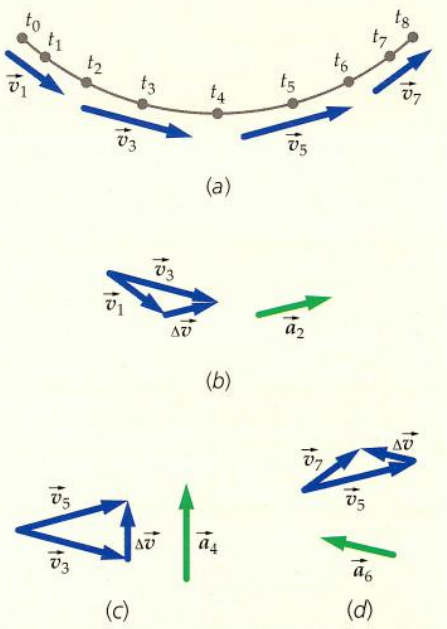


FIGURA 3.22

En el ejemplo 3.11 vimos que el vector aceleración se dirigía hacia arriba en el punto más bajo de la oscilación del péndulo (figura 3.23) apuntando hacia el punto P del centro del círculo. Allí donde el módulo de la velocidad sea creciente (parte descendente) el vector aceleración tendrá una componente a lo largo de la dirección del vector velocidad y otra componente en dirección a P. Allí donde el módulo de la velocidad sea decreciente, el vector aceleración tendrá una componente en la dirección opuesta al vector velocidad e igualmente otra componente en dirección al punto P.

Si una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria circular, la dirección que desde la partícula señala el centro de la trayectoria se denomina **dirección centrípeta** y la dirección del vector velocidad se llama **dirección tangencial**. En la figura 3.23 se ha visto que la aceleración en el punto más bajo de la trayectoria de la masa del péndulo va en la dirección centrípeta. En los restantes puntos de la trayectoria, la aceleración tiene una componente centrípeta y una componente tangencial.

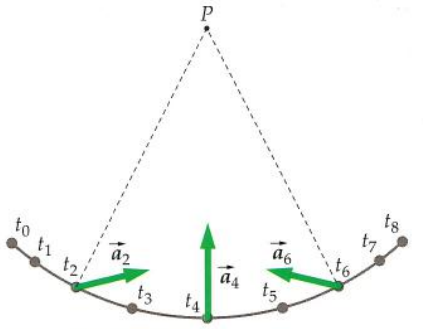


FIGURA 3.23

MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

El movimiento en un círculo a velocidad escalar constante se denomina **movimiento circular uniforme**. El movimiento de una partícula es acelerado incluso cuando el módulo la velocidad en movimiento circular es constante. Usaremos el método del ejemplo 3.11 para determinar la dirección de la aceleración a fin de encontrar la expresión de la aceleración de una partícula que se mueve en un círculo a velocidad constante. Los vectores posición y velocidad de una partícula que se está moviendo en un círculo a velocidad constante se muestran en la figura 3.24. El ángulo $\Delta\theta$ entre $\vec{v}(t)$ y $\vec{v}(t + \Delta t)$ es el mismo que entre $\vec{r}(t)$ y $\vec{r}(t + \Delta t)$, ya que los vectores posición y velo-

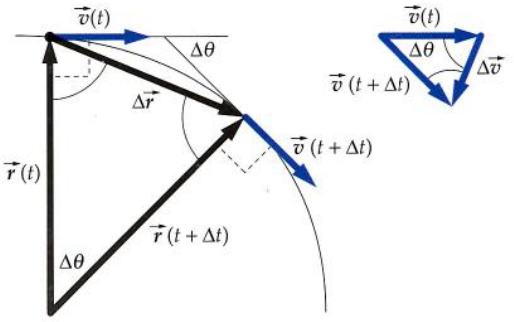


FIGURA 3.24

cidad deben girar el mismo ángulo para conservar su perpendicularidad mutua. Con los dos vectores velocidad y con $\Delta\vec{v}$ se forma un primer triángulo isósceles. El segundo triángulo isósceles se forma con los dos vectores posición y con $\Delta\vec{r}$.

Para encontrar la dirección del vector aceleración, examinamos el triángulo formado por los dos vectores velocidad y $\Delta\vec{v}$. La suma de los ángulos de un triángulo es 180° y los ángulos de la base de cualquier triángulo isósceles son iguales. En el límite en que Δt es muy pequeño, $\Delta\theta$ también es muy pequeño por lo que en este límite los dos ángulos de la base se aproximan a 90°. Esto significa que $\Delta\vec{v}$ es perpendicular a la velocidad. Si $\Delta\vec{v}$ se dibuja en la posición de la partícula señala en la dirección centrípeta.

Los dos triángulos son semejantes y las correspondientes longitues de figuras geométricamente similares son proporcionales. Entonces

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{|\Delta\vec{r}|} = \frac{v}{r}$$

Multiplicando ambos lados por $|\Delta\vec{r}|\ /\Delta t$, se obtiene

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v}{r}\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} \qquad 3.19$$

En el límite cuando Δt es muy pequeño, el término $|\Delta\vec{r}|/\Delta t$ se parece cada vez más al módulo de la aceleración instantánea a, y el término $|\Delta\vec{r}|/\Delta t$ se parece a v, el módulo de la velocidad instantánea. Entonces, en el límite $\Delta t \to 0$, la ecuación 3.19 se transforma en $a = v^2/r$. El vector aceleración está en la dirección centrípeta, así $a_c = a$, donde a_c es la componente del vector aceleración en la dirección centrípeta.

$$a_c = \frac{v^2}{r} \qquad 3.20$$

ACELERACIÓN CENTRÍPETA

La **aceleración centrípeta** es la componente del vector aceleración en la dirección centrípeta. Habitualmente, se describe el movimiento de una partícula en un círculo con velocidad constante a partir del tiempo T requerido para realizar una vuelta completa, magnitud que se denomina **periodo**. Durante un periodo, la partícula se mueve una distancia $2\pi r$ (donde r es el radio del círculo), por lo que su velocidad está relacionada con r y con T mediante la expresión

$$v = \frac{2\pi r}{T} \qquad 3.21$$

Ejemplo 3.12 Movimiento de un satélite

Un satélite se mueve con velocidad constante en una órbita circular alrededor del centro de la Tierra y cerca de la superficie de la Tierra. Si su aceleración es $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$, determinar (*a*) su velocidad escalar y (*b*) el tiempo que invierte en una revolución completa.

PLANTEAMIENTO Como el satélite tiene su órbita cerca de la superficie de la Tierra, consideraremos que el radio de la órbita es el radio de la Tierra, $r = 6370$ km. Así, podremos utilizar las ecuaciones 3.20 y 3.21 para hallar la velocidad del satélite y el tiempo que emplea en dar una vuelta completa alrededor de la Tierra.

SOLUCIÓN

(*a*) Se hace un dibujo de la órbita del satélite cerca de la superficie terrestre (figura 3.25). Se incluye los vectores velocidad y aceleración:

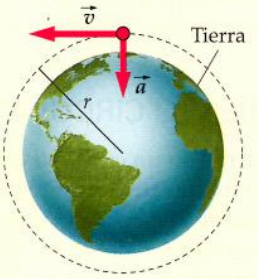


FIGURA 3.25 Satélite en órbita circular cercana a la Tierra.

La aceleración centrípeta v^2/r se iguala a g, y se despeja v:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = g, \quad \text{luego}$$

$$v = \sqrt{rg} = \sqrt{(6370\ \text{km})(9{,}81\ \text{m/s}^2)}$$

$$= \boxed{7{,}91\ \text{km/s} = 17\,700\ \text{mi/h} = 4{,}91\ \text{mi/s}}$$

(*b*) Para calcular el valor del periodo T se usa la ecuación 3.21:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(6370\ \text{km})}{7{,}91\ \text{km/s}} = \boxed{5060\ \text{s} = 84{,}3\ \text{min}}$$

COMPROBACIÓN Se sabe que el período orbital de los satélites que orbitan justo por encima de la atmósfera de la Tierra es de unos 90 min, lo que concuerda bastante bien con el resultado de 84,3 min del apartado (*b*).

OBSERVACIÓN La órbita real de los satélites se sitúa unos pocos centenares de kilómetros por encima de la superficie terrestre, es decir, r excede ligeramente el radio terrestre (6370 km). En consecuencia, la aceleración centrípeta es algo inferior a 9,81 m/s² a causa del descenso de la fuerza gravitatoria con respecto a la distancia del centro de la Tierra. Las órbitas que están justamente por encima de la atmósfera terrestre se denominan *órbitas terrestres bajas*. Muchos satélites, incluyendo el telescopio *Hubble* y la Estación Espacial Internacional se hallan en órbitas terrestres bajas. En la web www.nasa.org se puede encontrar información sobre estos y otros satélites.

PROBLEMA PRÁCTICO 3.5 Un coche va a 48 km/h y sigue una curva de 40 m de radio. ¿Cuál es su aceleración centrípeta?

ACELERACIÓN TANGENCIAL

Una partícula que se mueve en un círculo con velocidad variable tiene una componente de la aceleración tangente a la trayectoria, a_t, y una componente en la dirección del radio, la aceleración centrípeta, v^2/r. Al analizar, en general, el movimiento de una partícula a lo largo de una curva, la trayectoria se puede dividir en arcos de circunferencia (figura 3.26). La partícula en cada uno de estos arcos de circunferencia tiene una aceleración centrípeta v^2/r dirigida hacia el centro de curvatura y, si varía la velocidad, tiene además una aceleración tangencial dada por

$$a_t = \frac{dv}{dt} \qquad 3.22$$

ACELERACIÓN TANGENCIAL

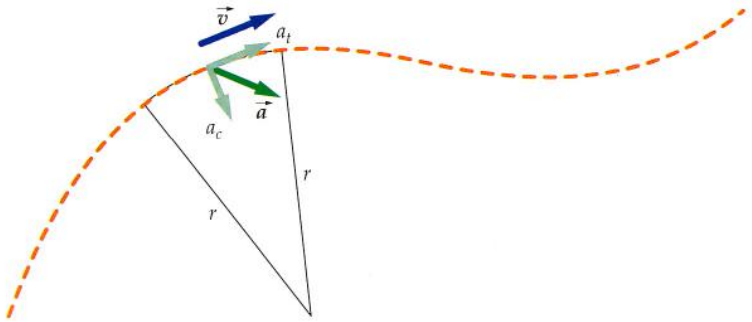


FIGURA 3.26 Componentes centrípeta y tangencial de la aceleración de una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria curvilínea.

PROBLEMA PRÁCTICO 3.6

Imagínese que está en una vagoneta que se desplaza por el raíl de una montaña rusa y empieza a entrar en un bucle. En el instante en que ha recorrido una cuarta parte del bucle, la vagoneta va en dirección vertical a 20 m/s perdiendo velocidad a un ritmo de 5 m/s². El radio de curvatura del bucle es de 25 m. ¿Cuánto valen las componentes tangencial y centrípeta de la aceleración en ese instante?

Temas de actualidad en Física

GPS: cálculo de vectores mientras se desplaza

Si se desplaza en avión a otra ciudad y alquila un automóvil para llegar a su destino, usted podría alquilar, junto con su automóvil, un Sistema de Posicionamiento Global (GPS). Muchas personas utilizan navegadores GPS, pero no todas saben que esos ordenadores están constantemente calculando vectores.

Veinticuatro satélites GPS giran alrededor de la Tierra a una altitud de 17 700 m.[1] En la mayoría de los lugares son visibles por lo menos tres satélites (por encima del horizonte). En muchos casos son visibles incluso hasta cuatro satélites o más. Cada satélite emite una señal continua que incluye su identificación, información acerca de su órbita y un marcador temporal que tiene una precisión de una billonésima de segundo.[2] Los relojes internos de los satélites y las órbitas se verifican desde una estación terrestre que puede enviar la información corregida.

Los sistemas de navegación que utilizan los automóviles obtienen la información de los satélites GPS y la utilizan para calcular los vectores posición y velocidad del coche. A veces, calculan a ojo el vector desplazamiento del coche. *(Andrew Fox/Corbis.)*

Un receptor de GPS detecta las señales procedentes de los satélites. Cuando puede conseguir señales de tres o más satélites, el receptor es capaz de calcular a qué distancia está cada satélite mediante la diferencia entre los marcadores temporales de los satélites y el tiempo que registra el reloj interno del receptor en el momento en que el marcador es detectado. Como se conocen de antemano las órbitas de cada satélite, una vez conocida la distancia a cada satélite el receptor puede triangular su propia posición. Si se dispone de tres satélites, el cálculo puede proporcionar longitud y latitud. Si se dispone de cuatro satélites, se puede calcular también la altitud.

¿Pero dónde entran los vectores? El receptor no triangula su posición una sola vez; la posición resultante se reduciría a un solo punto. El receptor está constantemente detectando los satélites y calcula sus cambios de posición a partir de los cambios en los resultados de las triangulaciones. De esta forma, se calcula cualquier cambio en la distancia y dirección a partir de la posición anterior. Durante un breve intervalo de tiempo, el receptor toma diferentes lecturas, suficientes como para poder calcular la velocidad del trayecto. En definitiva, los cálculos del receptor proporcionan una velocidad en una dirección particular, es decir, un vector velocidad.

Pero este vector no se calcula para hacer bonito en la pantalla. A menudo no es posible una buena conexión entre el receptor y el satélite, como sucede cuando pasamos bajo un puente o a través de un túnel. Si el receptor no detecta una señal mínimamente intensa, trabajará a partir de la última posición conocida. Utilizará entonces la última velocidad y dirección para calcular a ojo. Hasta que no consiga una señal apropiada, el receptor supondrá que el movimiento continúa en la misma dirección y con la misma velocidad. Una vez consiga buena señal hará las correcciones oportunas.

Cuando comenzó a funcionar el GPS, la señal temporal de los satélites estaba codificada con ruido o *disponibilidad selectiva* que podía eliminarse únicamente con decodificadores fabricados con fines militares. Los receptores militares podían determinar rastros con una precisión de seis metros mientras que los civiles lo hacían con sólo 45 metros de precisión.[3] La codificación fue eliminada en el año 2000. En teoría, un GPS con buenas señales debería ser capaz de darnos una posición con una precisión inferior al grosor de un dedo[4] e igualmente darnos la dirección y velocidad con la misma precisión; y todo esto a una distancia de 17 700 metros.

[1] El número real de satélites operativos va cambiando. Hay más de 24 satélites, por si acaso falla alguno. "Block II Satellite Information." *ftp://tycho.usno.navy.mil/pub/gps/gpsb2.txt* United States Naval Observatory. March 2006.

[2] "GPS: The Role of Atomic Clocks—It Started with Basic Research." *http://www.beyonddiscovery.org/content/view.page.asp?I=464* Beyond Discovery. The National Academy of Sciences. March 2006.

[3] "Comparison of Positions With and Without Selective Availability: Full 24 Hour Data Sets." *http://www.ngs.noaa.gov/FGCS/info/sans_SA/compare/ERLA.htm* National Geodetic Survey. March, 2006.

Resumen

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES
1. Vectores cinemáticos	
Vector posición	El vector posición $\vec{r}$ apunta desde el origen del sistema de coordenadas a la posición de la partícula.
Vector velocidad instantánea	El vector velocidad $\vec{v}$ es la variación del vector posición respecto al tiempo. Su módulo es la velocidad y su dirección es la del movimiento. $\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ 3.5
Vector aceleración instantánea	$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ 3.11
2. Velocidad relativa	Si una partícula se mueve con velocidad $\vec{v}_{pA}$ respecto a un sistema de coordenadas A, el cual a su vez se mueve con velocidad $\vec{v}_{AB}$ respecto a otro sistema de coordenadas B, la velocidad de la partícula respecto a B es $\vec{v}_{pB} = \vec{v}_{pA} + \vec{v}_{AB}$ 3.9
3. Movimientos de proyectiles sin rozamiento con el aire	En las ecuaciones de esta sección se considera que la dirección positiva del eje x es horizontal y que la dirección positiva del eje y es vertical dirigida hacia arriba.
Independencia del movimiento	En el movimiento de proyectiles, los movimientos horizontal y vertical son independientes.
Aceleración	$a_x = 0$ y $a_y = -g$
Dependencia con el tiempo	$v_x(t) = v_{0x} + a_x t$ y $v_y(t) = v_{0y} + a_y t$ 2-12 $\Delta x = v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$ y $\Delta y = v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2$ 2-14 donde $v_{x0} = v_0 \cos\theta_0$ y $v_{y0} = v_0 \operatorname{sen}\theta_0$. Alternativamente, $\Delta \vec{v} = \vec{g} t$ y $\Delta \vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2$ 3.15c, 3.16c
Alcance	El alcance se obtiene multiplicando v_x por el tiempo total del proyectil en el aire.
4. Movimiento circular	
Aceleración centrípeta	$a_c = \frac{v^2}{r}$ 3.20
Aceleración tangencial	$a_t = \frac{dv}{dt}$ 3.22 donde v es el módulo de la velocidad instantánea.
Periodo	$v = \frac{2\pi r}{T}$ 3.21

Respuestas a las comprobaciones conceptuales

3.1 (*a*) Hacia arriba, (*b*) hacia arriba.

3.2 Vertical y hacia abajo.

Respuestas a los problemas prácticos

3.1 $a_m = 4{,}7\ \text{m/s}^2$ a 45° noroeste

3.2 $y(t) = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$
$= 0 + (25{,}0\ \text{m/s}) \operatorname{sen} 36{,}9° (1{,}43\ \text{s}) + \frac{1}{2}(9{,}81\ \text{m/s}^2)(1{,}43\ \text{s})^2$
$= 11{,}48\ \text{m}$
$\therefore h = 111\ \text{m}$

3.3 $R = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\theta_0 = \frac{(24{,}5\ \text{m/s})^2}{9{,}81\ \text{m/s}^2} \operatorname{sen}(2 \times 36{,}9°) = 58{,}8°$

3.4 (*a*) $\vec{v}_0 = 20{,}0\ \text{m/s}$ a $\theta_0 = 22{,}0°$, (*b*) $t = 0{,}764\ \text{s}$, (*c*) $v_{ym} t = 2{,}86\ \text{m}$

3.5 $4{,}44\ \text{m/s}^2$

3.6 $a_c = 16\ \text{m/s}^2$ y $a_t = -5{,}0\ \text{m/s}^2$

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben aportarse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

En los datos numéricos sin coma decimal se deben considerar significativos todos los dígitos, incluidos los ceros a la derecha del último diferente de cero.

- • Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil
- •• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
- ••• Desafiante, para alumnos avanzados
- SSM La solución se encuentra en el *Manual de soluciones*

Los problemas consecutivos que están sombreados son problemas relacionados.

PROBLEMAS CONCEPTUALES

1 • ¿Puede el módulo del desplazamiento de una partícula ser menor que la distancia recorrida por la partícula a lo largo de su trayectoria? ¿Puede su módulo ser mayor que la distancia recorrida? Razonar la respuesta. SSM

2 • Dar un ejemplo en el que la distancia recorrida sea una magnitud significativa, mientras que el correspondiente desplazamiento sea nulo. ¿Es posible lo contrario? En caso afirmativo, dar un ejemplo.

3 • En un partido de béisbol, ¿cuál es la velocidad media aproximada de un bateador que consigue una carrera (desde el momento en que golpea la pelota hasta que llega a la meta pasando por todas las bases)?

4 • Una pelota de béisbol golpeada con un bate sale formando un ángulo de 30° con el eje horizontal. Sale del bate a una altura de 1 m sobre el suelo y cae golpeando una vez sobre el suelo. Describa cómo cambia el ángulo entre los vectores aceleración y velocidad durante el vuelo, es decir, desde que la pelota sale del bate hasta que llega al suelo.

5 • Si un objeto se mueve hacia el oeste, ¿en qué dirección acelera? (*a*) Norte, (*b*) Este, (*c*) Oeste, (*d*) Sur, (*e*) puede ser cualquier dirección.

6 • Dos astronautas están instalando un telescopio sobre la superficie lunar. La aceleración de la gravedad en la Luna es sólo de 1,64 m/s^2. Uno de los astronautas le lanza una llave inglesa a otro, pero la velocidad del lanzamiento es excesiva, de forma que la llave se dirige a la cabeza del compañero. Cuando la llave está en el punto más alto de su trayectoria, (*a*) su velocidad y aceleración son cero, (*b*) su velocidad es cero pero la aceleración no, (*c*) su aceleración es cero pero su velocidad no, (*d*) ninguna es cero, (*e*) falta información para elegir alguna de las respuestas anteriores.

7 • La velocidad de una partícula se dirige hacia el este mientras que su aceleración se dirige hacia el noroeste, como muestra la figura 3.27. La partícula (*a*) está acelerando y girando hacia el norte, (*b*) está acelerando y girando hacia el sur, (*c*) está frenando y girando hacia el norte, (*d*) está frenando y girando hacia el sur, (*e*) mantiene constante su velocidad y gira hacia el sur.

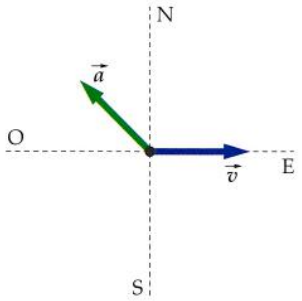


FIGURA 3.27
Problema 7

8 • Si se conocen los vectores posición de una partícula en dos puntos de su trayectoria y el tiempo que tarda en moverse de un punto a otro, se puede calcular (*a*) la velocidad media de la partícula, (*b*) la aceleración media de la partícula, (*c*) la velocidad instantánea de la partícula, (*d*) la aceleración instantánea de la partícula.

9 • Considere la trayectoria de una partícula en su movimiento por el espacio. (*a*) ¿Cómo se relaciona geométricamente el vector velocidad con la trayectoria de la partícula? (*b*) Esquematice una trayectoria y dibuje el vector velocidad de la partícula para distintas posiciones a lo largo de la trayectoria.

10 • La aceleración de un vehículo es nula cuando (*a*) gira hacia la derecha a velocidad constante, (*b*) sube por una carretera pendiente y recta a velocidad constante, (*c*) corona la cima de una colina a velocidad constante, (*d*) llega a la parte más baja de un valle a velocidad constante, (*e*) aumenta su velocidad cuando baja a lo largo de una pendiente recta.

11 • Dar algunos ejemplos de movimiento en los cuales las direcciones de los vectores velocidad y aceleración sean (*a*) opuestas, (*b*) las mismas y (*c*) mutuamente perpendiculares. SSM

12 • ¿Cómo es posible que una partícula que se mueva a velocidad escalar constante tenga una aceleración constante? ¿Puede una partícula con velocidad constante estar, a la vez, acelerando?

13 •• Un dardo se lanza verticalmente hacia arriba. Cuando sale de la mano del lanzador, pierde velocidad uniformemente a medida que gana altura hasta que se clava en el techo de la habitación. (*a*) Dibujar el vector velocidad en los tiempos t_1 y t_2 considerando que $\Delta t = t_2 - t_1$ es un intervalo pequeño. A partir del dibujo, determinar la dirección del cambio de velocidad $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ y, con ello, la dirección del vector aceleración. (*b*) Poco después de chocar con el techo, el dardo cae y acelera hasta que llega al suelo. Repita el apartado (*a*) para encontrar la dirección del vector aceleración durante la caída. (*c*) Ahora imagine que tira el dardo horizontalmente. ¿Cuál es la dirección del vector aceleración después que haya dejado su mano pero antes que golpee el suelo? SSM

14 • Una saltadora de bungee salta sobre una plataforma elástica y cuando se aproxima al punto más bajo de su caída pierde velocidad. Suponiendo que cae verticalmente, haga un diagrama del movimiento para encontrar la dirección de su vector aceleración, dibujando los vectores velocidad de la saltadora en los tiempos t_1 y t_2, siendo pequeño el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$. Deducir del dibujo la dirección del cambio de velocidad $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ y, con ello, la dirección del vector aceleración.

15 • La saltadora de bungee del problema 14, después de alcanzar el punto más bajo de su salto en el tiempo t_{bajo}, comienza a moverse hacia arriba aumentando su velocidad durante un corto tiempo hasta que la gravedad domina de nuevo su movimiento. Dibujar los vectores velocidad en los tiempos t_1 y t_2, siendo $\Delta t = t_2 - t_1$ un pequeño intervalo y $t_1 < t_{bajo} < t_2$. Deducir del dibujo la dirección del cambio de velocidad $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ y con ello, la dirección del vector aceleración en el tiempo t_{bajo}.

16 • Un río de orillas rectas y paralelas tiene una anchura de 0,76 km (véase la figura 3.28). La corriente del río baja a 4,0 km/h y es paralela a los márgenes. El barquero, que conduce una barcaza que puede alcanzar una velocidad máxima de 4,0 km/h en aguas quietas, desea ir de A a B,

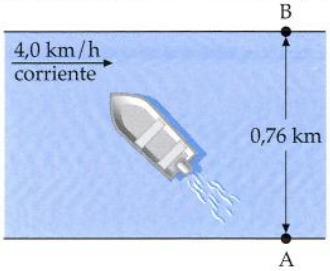


FIGURA 3.28
Problema 16

donde AB es perpendicular a la orilla. El barquero debe (*a*) dirigir la barca directamente a través del río, perpendicular a la orilla siguiendo AB, (*b*) poner un rumbo aguas arriba de 53° respecto a la dirección AB, (*c*) poner un rumbo aguas arriba de 37° respecto a la dirección AB, (*d*) renunciar, ya que es imposible ir de A hasta B con una nave de estas características, (*e*) ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

17 • Durante una intensa lluvia, las gotas caen a velocidad constante, y formando un ángulo de 10° oeste respecto al eje vertical. Usted va caminado bajo la lluvia y nota que sólo la parte superior de su ropa se está mojando ¿En qué dirección está andando? Razone la respuesta. SSM

18 • En el problema 17, ¿con qué velocidad está andando si la velocidad de las gotas respecto al suelo es 5,2 m/s?

19 • Verdadero o falso (ignore los efectos de la resistencia del aire):

(*a*) Cuando un proyectil se dispara horizontalmente, invierte el mismo tiempo en caer que un proyectil en reposo que se deja caer desde la misma altura.
(*b*) Cuando se dispara un proyectil desde una cierta altura y con un cierto ángulo vertical, tarda más tiempo en llegar al suelo que lo que tardaría el mismo proyectil si se dejara caer desde la misma altura.
(*c*) Cuando se dispara horizontalmente un proyectil desde una cierta altura, éste impacta sobre el suelo con una velocidad mayor que si se dejara caer desde la misma altura.

20 • Un proyectil se lanza con un ángulo de tiro de 35° por encima de la horizontal. En el punto más alto de la trayectoria, su velocidad es de 20 m/s. La velocidad inicial tenía una componente horizontal de (*a*) 0, (*b*) 20 cos (35°) m/s, (*c*) 20 sen (53°) m/s, (*d*) (20 m/s)/cos 35°, (*e*) 20 m/s.

21 • Un proyectil se lanza con un ángulo de tiro de 35° por encima de la horizontal. No considere los efectos de la resistencia del aire. La velocidad inicial del proyectil del problema anterior tiene una componente vertical (*a*) inferior a 20 m/s, (*b*) mayor que 20 m/s, (*c*) igual a 20 m/s, (*d*) no se puede saber con los datos que se dan. SSM

22 • Un proyectil se lanza con un ángulo de tiro 35° por encima de la horizontal. No considere los efectos de la resistencia del aire. El proyectil alcanza su objetivo a la misma altura desde la que se lanzó. En consecuencia, la velocidad final del proyectil tiene una componente vertical (*a*) igual que su componente vertical inicial en módulo y signo, (*b*) igual que su componente vertical inicial en módulo, pero con signo opuesto, (*c*) inferior que su componente vertical inicial, pero con el mismo signo, (*d*) inferior que su componente vertical inicial, pero con signo opuesto.

23 • La figura 3.29 representa la trayectoria parabólica de una bola que va de A a E. ¿Cuál es la dirección de la aceleración en el punto B? (*a*) Hacia arriba y hacia la derecha. (*b*) Hacia abajo y hacia la izquierda. (*c*) Verticalmente hacia arriba. (*d*) Verticalmente hacia abajo. (*e*) La aceleración de la bola es cero.

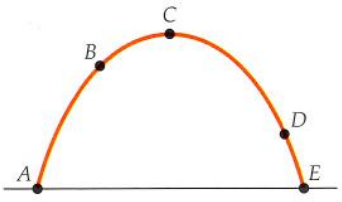


FIGURA 3.29 Problemas 23 y 24

24 • (*a*) ¿En qué punto(s) de la figura 3.29 el módulo de la velocidad es el mayor de todos? (*b*) ¿En qué punto(s) el módulo de la velocidad es el menor de todos? (*c*) ¿En qué dos puntos el módulo de la velocidad es el mismo? ¿Es el vector velocidad el mismo en esos puntos?

25 • Verdadero o falso:

(*a*) Si el módulo de la velocidad es constante, la aceleración debe ser cero.
(*b*) Si la aceleración es cero, el módulo de la velocidad debe ser constante.
(*c*) Si la aceleración es cero, la velocidad debe ser constante.
(*d*) Si el módulo de la velocidad es constante, la velocidad debe ser constante.
(*e*) Si la velocidad es constante, el módulo de la velocidad debe ser constante. SSM

26 • Las velocidades inicial y final de un objeto son las indicadas en la figura 3.30. Indicar la dirección de la velocidad media.

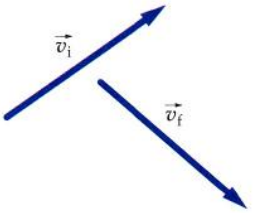


FIGURA 3.30 Problema 26

27 •• La figura 3.31 muestra la trayectoria de un automóvil, formada por segmentos rectilíneos y arcos de circunferencias. El coche parte del reposo en el punto A. Después de alcanzar el punto B marcha con velocidad constante hasta que alcanza el punto E. Acaba en reposo en el punto F. (*a*) En el medio de cada segmento (AB, BC, CD, DE, y EF), ¿cuál es la dirección del vector velocidad? (*b*) ¿En qué puntos el automóvil tiene aceleración? En estos casos, ¿cuál es la dirección de la aceleración? (*c*) ¿Qué relación tienen los módulos de la aceleración en los tramos BC y DE?

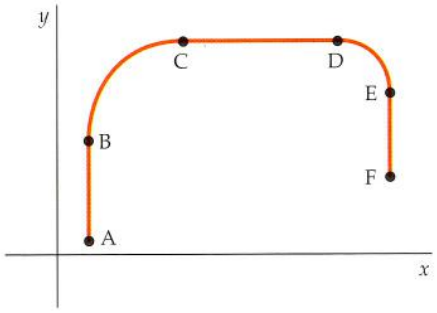


FIGURA 3.31 Problema 27

28 •• Dos cañones están situados uno frente a otro, como muestra la figura 3.32. Cuando disparen, las balas seguirán las trayectorias que se muestran, siendo P el punto donde las trayectorias se cruzan. Si se quiere que las balas choquen, ¿hay que disparar primero el cañón A, el cañón B o bien hay que disparar los dos cañones simultáneamente? Ignórense los efectos de la resistencia del aire.

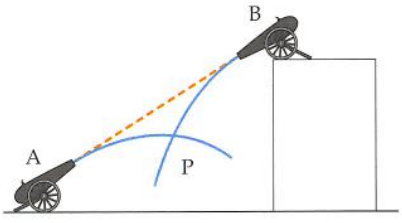


FIGURA 3.32 Problema 28

29 •• Galileo en su obra "*Diálogo respecto los dos sistemas del mundo*" escribió: " Enciérrese ... en el camarote principal situado bajo la cubierta de un barco grande y ... cuelgue una botella que se vacíe, gota a gota, en un recipiente situado debajo. Después de observar cuidadosamente el fenómeno ... y de que el barco haya seguido cualquier velocidad, siempre y cuando el movimiento haya sido uniforme y no fluctuante, las gotas siempre caen como antes sin que, en ningún caso, se dirijan hacia la dirección de la popa del buque, aunque el barco recorra un gran trecho mientras las gotas están en el aire". Explique esta cita.

30 •• Una persona mueve una piedra atada a una cuerda en un círculo horizontal a velocidad constante. La figura 3.33 representa la trayectoria del objeto visto desde arriba. (*a*) ¿Cuál de los vectores representa la velocidad de la piedra? (*b*) ¿Cuál representa la aceleración?

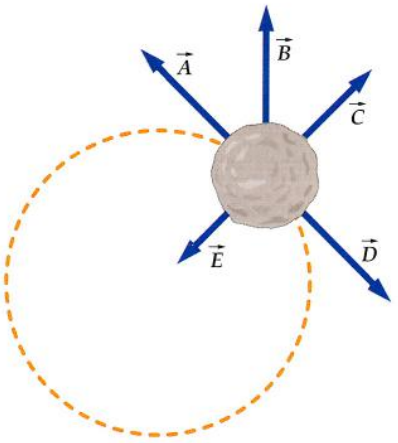


FIGURA 3.33 Problema 30

31 •• Verdadero o falso:

(*a*) Un cuerpo no puede moverse en una trayectoria circular a menos que tenga una aceleración centrípeta.
(*b*) Un cuerpo no puede moverse en una trayectoria circular a menos que tenga una aceleración tangencial.
(*c*) Un cuerpo que se mueva siguiendo una trayectoria circular no puede tener un módulo de la velocidad variable.
(*d*) Un cuerpo que se mueva siguiendo una trayectoria circular no puede tener un vector velocidad constante.

32 •• Usando un diagrama del movimiento, determinar la dirección de la aceleración de la masa de un péndulo cuando la masa está en el punto donde cambia el sentido de su movimiento.

33 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Su amigo le está filmando con una videocámara mientras imita el salto de una patinadora. Analizando fotograma a fotograma, su amigo encuentra que la componente y de su velocidad es (registrado cada 1/20 segundos):

t (s)	12,05	12,10	12,15	12,20	12,25	12,30	12,35	12,40	12,45
v_y (m/s)	−0,78	−0,69	−0,55	−0,35	−0,10	0,15	0,35	0,49	0,53

(*a*) Dibujar el diagrama de movimiento. Utilízelo para determinar la dirección y magnitud relativa de su aceleración media durante cada uno de los intervalos temporales de la tabla. (*b*) Analice cómo la componente vertical de su aceleración cambia de signo y de módulo cuando invierte la dirección de su movimiento. SSM

APROXIMACIONES Y ESTIMACIONES

34 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Realice una estimación, en metros por hora, de la velocidad con la que sale el agua por el extremo de una manguera de jardín a partir de observaciones previas y de los conocimientos del movimiento de proyectiles.

35 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Imagínese que ganó un concurso cuyo premio era entrenarse con un equipo de béisbol. Uno de los ejercicios consiste en que debe intentar golpear la pelota que le lanza el *pitcher*. Estime la aceleración de la pelota al golpearla si ésta es lanzada por un *pitcher* de primera división y usted la golpea de lleno en dirección al *pitcher*. Haga estimaciones razonables sobre la velocidad antes y después del golpe y sobre el tiempo de contacto entre la pelota y el bate.

36 •• Estimar qué distancia alcanza una pelota si se lanza (*a*) horizontalmente desde el suelo, (*b*) con un ángulo de 45° desde el suelo, (*c*) horizontalmente desde la azotea de un edificio situada 12 m por encima del nivel de la calle, (*d*) con un ángulo de 45° desde la azotea de un edificio situada 12 m por encima del nivel del suelo. Ignore los efectos de la resistencia del aire.

37 •• En 1978, el británico Geoff Capes lanzó un ladrillo pesado una distancia horizontal de 44,5 m. Determinar la velocidad aproximada del ladrillo en el punto más alto de su trayectoria, sin considerar los efectos de la resistencia del aire. Supóngase que el ladrillo cae al suelo a la misma altura con que se lanzó.

POSICIÓN, DESPLAZAMIENTO, VELOCIDAD Y VECTORES ACELERACIÓN

38 • La aguja de los minutos de un reloj de pared tiene 0,5 m de longitud y la de las horas tiene 0,25 m. Considerando el centro del reloj como origen, elija un sistema de coordenadas cartesiano con el eje x apuntando a la 3 en punto y el eje y apuntando a las 12 en punto. Utilizando los vectores unitarios $\hat{i}$ y $\hat{j}$, escriba los vectores posición de la aguja de las horas ($\vec{A}$) y la de los minutos ($\vec{B}$) cuando el reloj señala (*a*) 12:00, (*b*) 3:00, (*c*) 6:00, (*d*) 9:00.

39 • Hallar los desplazamientos de cada aguja del problema anterior ($\Delta\vec{A}$ y $\Delta\vec{B}$) cuando el tiempo ha pasado de las 15:00 a las 18:00. SSM

40 • En base al problema 38, escriba el vector del desplazamiento de una mosca que va rápidamente del extremo de la aguja de los minutos al extremo de la aguja de las horas cuando el reloj señala las 15:00 h.

41 • **APROXIMACIÓN, CONCEPTUAL** Un oso se mueve 12 m hacia el nordeste y 12 m hacia el este. Muestre gráficamente cada desplazamiento y determine gráficamente el desplazamiento que deberá realizar de forma directa para volver al punto de partida.

42 • Un muchacho explorador pasea 2,4 km hacia el este del campamento, luego se desvía hacia su izquierda y recorre 2,4 km a lo largo de un arco de círculo centrado en el campamento y, finalmente, recorre 15 km en línea recta hacia el campamento. (*a*) ¿A qué distancia del campamento se encuentra finalmente el muchacho? (*b*) ¿Cuál es la dirección de la posición del muchacho medida desde el campamento? (*c*) ¿Cuál es el cociente entre el desplazamiento final y la distancia total recorrida?

43 • Un cubo de arista 3 m tiene sus caras paralelas a los planos coordenados y un vértice en el origen. Una mosca situada en el origen se mueve a lo largo de tres aristas hasta llegar al vértice opuesto. Escribir el vector desplazamiento de la mosca utilizando los vectores $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$ y hallar el módulo de su desplazamiento. SSM

44 • **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Un barco en alta mar recibe señales de radio emitidas desde dos transmisores A y B que están separados 100 km, uno al sur del otro. El localizador de direcciones detecta que la transmisión desde A está 30° al sudeste, mientras que la transmisión de B procede del este. Calcular la distancia entre el barco y el transmisor B.

45 • Un operador de radar fijo determina que un barco está a 10 km al sur de su posición. Una hora más tarde el mismo barco está a 20 km al sudeste. Si el barco se movió con velocidad constante siempre en la misma dirección, ¿cuál era su velocidad durante ese tiempo?

46 • Las coordenadas de posición de una partícula (x, y) son (2 m, 3 m) cuando $t = 0$; (6 m, 7 m) cuando $t = 2$ s; y (13 m, 14 m) cuando $t = 5$ s. (*a*) Hallar la velocidad media v_m desde $t = 0$ hasta $t = 2$ s. (*b*) Hallar v_m desde $t = 0$ hasta $t = 5$ s.

47 • Una partícula que se mueve a 4,0 m/s en la dirección x positiva experimenta una aceleración de 3,0 m/s^2 en la dirección y positiva durante 2,0 s. Calcule la velocidad final de la partícula. SSM

48 • Inicialmente, un halcón se mueve hacia el oeste con una velocidad de 40 m/s y 5 s después se mueve hacia el norte a 20 m/s. (*a*) ¿Cuál ha sido el módulo y la dirección de $\Delta\vec{v}_m$ durante este intervalo de 5 s? (*b*) ¿Cuáles son el módulo y dirección de $\vec{a}_m$ en este intervalo?

49 • Cuando $t = 0$, una partícula situada en el origen tiene una velocidad de 40 m/s con $\theta = 45°$. Para $t = 3$ s, la partícula está en $x = 100$ m, $y = 80$ m con velocidad de 30 m/s y $\theta = 50°$. Calcular (*a*) la velocidad media y (*b*) la aceleración media de la partícula durante este intervalo.

50 •• Una partícula se mueve en un plano xy con aceleración constante. Para $t = 0$, la partícula se encuentra en la posición $x = 4$ m, $y = 3$ m y posee la velocidad $\vec{v} = (2{,}0\text{ m/s})\hat{i} + (-9{,}0\text{ m/s})\hat{j}$. La aceleración viene dada por el valor $\vec{a} = (4\text{ m/s}^2)\hat{i} + (3\text{ m/s}^2)\hat{j}$. (*a*) Determinar el vector velocidad en el instante $t = 2$ s. (*b*) Expresar el vector posición para $t = 4$ s en términos de $\hat{i}$ y $\hat{j}$. Calcular también su módulo y dirección.

51 •• El vector posición de una partícula viene dado por la expresión $\vec{r} = (30t)\hat{i} + (40t - 5t^2)\hat{j}$, en donde r se expresa en metros y t en segundos. Determinar los vectores velocidad instantánea y aceleración instantánea en función del tiempo t. SSM

52 •• Una partícula tiene una aceleración constante $\vec{a} = (6{,}0\text{ m/s}^2)\hat{i} + (4{,}0\text{ m/s}^2)\hat{j}$. En el instante $t = 0$, la velocidad es cero y el vector de posición es $\vec{r}_0 = (10\text{ m})\hat{i}$. (*a*) Hallar los vectores posición y velocidad en un instante cualquiera t. (*b*) Hallar la ecuación de la trayectoria en el plano xy y hacer un esquema de la misma.

53 •• Cuando sale del muelle, una barca fuera borda pone rumbo hacia el norte durante 20 s con una aceleración de 3 m/s^2. Posteriormente, la barca vira hacia el oeste y se mueve durante 10 s con la velocidad adquirida durante los 20 s anteriores. (*a*) ¿Cuál es la velocidad media de la barca durante los 30 segundos de movimiento? (*b*) ¿Cuál es la aceleración media en el mismo intervalo de tiempo? (*c*) ¿Cuál es el desplazamiento de la barca en el mismo intervalo de tiempo? SSM

54 •• Partiendo del reposo en el punto A, un muchacho conduce una motocicleta en dirección norte hasta un punto B que se halla 75 m más allá, aumentando la velocidad a ritmo constante de 2 m/s^2. Entonces, de forma gradual gira hacia el este describiendo un movimiento circular de 50 m de radio a velocidad constante hasta llegar a un punto C donde el movimiento va en la dirección este. Luego, continúa en dirección este reduciendo la velocidad a ritmo de 1 m/s^2 hasta que se detiene en el punto D. (*a*) ¿Cuánto vale el módulo de la velocidad media y el de la aceleración media desde A hasta D? (*b*) ¿Cuánto vale el desplazamiento desde A hasta C? (*c*) ¿Cuánto vale la distancia total recorrida?

VELOCIDAD RELATIVA

55 •• Un avión vuela a la velocidad de 250 km/h respecto al aire en reposo. Un viento sopla a 80 km/h en dirección noreste (es decir, en dirección 60° al este del norte). (*a*) ¿En qué dirección debe volar el avión para que su rumbo sea norte? (*b*) ¿Cuál es la velocidad del avión respecto al suelo?

56 •• Una nadadora intenta cruzar perpendicularmente un río nadando con una velocidad de 1,6 m/s respecto al agua en reposo. Sin embargo, llega a la otra orilla en un punto que está 40 m más lejos en la dirección de la corriente. Sabiendo que el río tiene una anchura de 80 m, (*a*) ¿cuál es la velocidad de la corriente del río? (*b*) ¿Cuál es la velocidad de la nadadora respecto a la orilla? (*c*) ¿En qué dirección debería nadar para llegar al punto directamente opuesto al punto de partida?

57 •• Un pequeño avión sale del punto A y se dirige a un aeropuerto en el punto B, a 520 km en dirección norte. La velocidad del avión respecto al aire es de 240 km/h y existe un viento uniforme de 50 km/h que sopla del noroeste al sureste. Determinar el rumbo que debe tomar el avión y el tiempo de vuelo. SSM

58 •• Dos embarcaderos están separados 2,0 km uno del otro sobre la misma orilla de un río, cuyas aguas fluyen a 1,4 km/h. Una lancha a motor hace el recorrido de ida y vuelta entre los dos embarcaderos en 50 min. ¿Cuál es la velocidad de la lancha respecto al agua?

59 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Un concurso de aeromodelismo tiene las siguientes normas: cada avión debe volar hasta un punto situado a 1 km de la salida y regresar de nuevo; el vencedor será el avión que realice el circuito completo en el tiempo más corto; los competidores tienen la libertad de escoger el recorrido que desean, siempre que el avión se aleje 1 km de la salida y después regrese. El día del concurso, un viento uniforme sopla del norte a 5 m/s. Uno de los modelos puede mantener una velocidad respecto al aire de 15 m/s y se considera que los tiempos de arranque, parada y giro son despreciables. Se plantea la cuestión siguiente: ¿debe planearse el vuelo a favor del viento y contra el viento en el circuito o con viento cruzado este y oeste? Analícese el plan sobre estas dos alternativas: (1) el avión vuela 1 km al norte y después regresa; (2) el avión recorre 1 km hacia el este al arrancar y después regresa.

60 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** El piloto de un pequeño avión mantiene una velocidad con respecto al aire de 150 nudos (un nudo corresponde a la velocidad de una milla náutica por hora) y quiere volar hacia el norte (acimut = 000°) con respecto a la Tierra. (*a*) Si sopla un viento de 30 nudos del este (acimut = 090°), calcular qué rumbo (acimut) debe tomar el piloto. (*b*) En esa dirección, ¿cuál será la velocidad relativa al suelo?

61 •• El coche A se mueve hacia el este a 20 m/s y se dirige a un cruce. Cuando A cruza la intersección, el coche B parte del reposo 40 m al norte del cruce y se mueve hacia el sur con una aceleración constante de 2 m/s^2. (*a*) ¿Qué posición ocupa B respecto a A transcurridos 6 segundos desde que A ha cruzado la intersección? (*b*) ¿Cuál es la velocidad de B respecto a A cuando $t = 6$ s? (*c*) ¿Cuál es la aceleración de B respecto a A para $t = 6$ s? *Ayuda: exprese sus respuestas en términos de los vectores $\hat{i}$ y $\hat{j}$ que van en dirección este y norte, respectivamente.* SSM

62 •• Mientras va caminado entre las puertas de un aeropuerto ve a un niño corriendo por encima de una pasarela mecánica. El niño corre a 2,5 m/s respecto a la pasarela y usted decide determinar la velocidad de la pasarela. Observa que el niño recorre los 21 m de pasarela hasta llegar al final y luego los recorre en dirección opuesta hasta el principio. El niño tarda 22 s en total. Con esta información, ¿cuál es la velocidad de la pasarela respecto a la terminal del aeropuerto?

63 •• Ben y Jack están comprando en unos grandes almacenes. Ben deja a Jack en el acceso a las escaleras mecánicas y se dirige al este andando a una velocidad de 2,4 m/s. Jack sube a las escaleras mecánicas que se mueven a 2 m/s en dirección este y hacia arriba con una inclinación de 37° respecto al suelo. (*a*) ¿Cuál es la velocidad de Ben respecto a Jack? (*b*) ¿A qué velocidad debería andar Jack para que Ben estuviese siempre sobre su misma vertical? SSM

64 ••• Un malabarista viaja en un tren y lanza verticalmente una bola a 4,9 m/s. El tren va rumbo este a una velocidad de 20 m/s. Según el malabarista: (*a*) ¿Cuánto tiempo está la bola en el aire? (*b*) ¿Cuál es el desplazamiento de la bola en su ascenso? Según un observador exterior (fuera del tren, a la misma altura que el malabarista y en reposo sobre el suelo): (*c*) ¿Cuál es la velocidad inicial de la bola? (*d*) ¿Cuál es el ángulo de lanzamiento? (*e*) ¿Cuál es el desplazamiento de la bola en su ascenso?

MOVIMIENTO CIRCULAR Y ACELERACIÓN CENTRÍPETA

65 • ¿Cuál es el módulo de la aceleración del extremo de la aguja que señala los minutos en el reloj del problema 38? Expresarlo como una fracción del módulo de la aceleración de la caída libre g.

66 • **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Usted diseña una centrifugadora que ha de girar a 15 000 rev/min. (*a*) Calcular la aceleración centrípeta máxima que debe soportar un tubo de muestra situado a 15 cm del eje de rotación. (*b*) Para conseguir la velocidad máxima de rotación, la centrifugadora acelera durante 1 min y 15 s. Calcular el *módulo* de la aceleración tangencial mientras acelera, suponiendo que ésta sea constante.

67 ••• La Tierra rota una vez respecto a su propio eje cada 24 horas, de forma que los cuerpos que se hallan en su superficie describen un movimiento circular uniforme respecto a su eje cuyo periodo es de 24 horas. Considere únicamente el efecto de esta rotación sobre una persona en la superficie (ignorar el movimiento orbital de la Tierra alrededor del Sol). (*a*) ¿Cuáles son el módulo de la velocidad y el módulo de la aceleración de una persona que está sobre el ecuador? (Expresar el módulo de la aceleración en términos de g.) (*b*) ¿Cuál es la dirección del vector aceleración? (*c*) ¿Y si la persona está a 35° de latitud norte? (*d*) ¿Cuál es el ángulo que forman los vectores aceleración de la persona en los apartados (*b*) y (*c*)? SSM

68 •• Determine la aceleración que experimenta la Luna debida a la Tierra, usando para ello los valores de la distancia media y del periodo orbital que aparecen en la tabla de datos físicos al final del libro. Suponga que la órbita es circular. Exprese esta aceleración como una fracción de g.

69 •• (*a*) ¿Cuánto valen el periodo y el módulo de la velocidad de una persona en un carrusel si el módulo de su aceleración es de 0,8 m/s^2 cuando se encuentra a una distancia de 4 m del eje? (*b*) Si la persona se coloca a 2 m del eje y el carrusel sigue girando con el mismo periodo, ¿cuánto valen los módulos de la velocidad y de la aceleración?

70 ••• Los púlsars son estrellas de neutrones que emiten rayos X y otros tipos de radiación. En la Tierra se reciben pulsos de radiación en intervalos regulares que coinciden con el período de rotación del púlsar. Algunos púlsars rotan con periodos tan cortos como de 1 ms. El púlsar de Cangrejo, situado en el centro de la Nebulosa del Cangrejo en la constelación de Orion, tiene un periodo actual de 33,085 ms. Su radio ecuatorial se estima en unos 15 km, el radio medio de una estrella de neutrones. (*a*) ¿Cuál es el valor de la aceleración centrípeta de un cuerpo situado sobre la superficie del ecuador de un púlsar? (*b*) Se han observado numerosos púlsars con períodos que se alargan con el tiempo, un fenómeno denominado "*spin down*". En el caso del púlsar de Cangrejo el ritmo es de $3{,}5 \times 10^{-13}$ s por segundo, lo que implica que este púlsar dejaría de rotar en $9{,}5 \times 10^{10}$ s (unos 3000 años a contar a partir de hoy). ¿Cuál es la aceleración tangencial de un objeto en el ecuador de este púlsar?

71 ••• **APLICACIÓN BIOLÓGICA** La sangre humana contiene plasma, plaquetas y glóbulos rojos. Para separar el plasma del resto de componentes se utiliza la centrifugación. Para una centrifugación efectiva es necesario aplicar una aceleración de 2000 g o más a la sangre. Supongamos que la sangre se coloca en tubos de ensayo de 15 cm de largo hasta llenarlos. Esos tubos se colocan en una centrifugadora formando un ángulo de 45° con respecto a la vertical (figura 3.34). (*a*) ¿Cuál es la distancia entre una muestra de sangre y el eje de rotación si la centrifugadora gira a 3500 rpm y la sangre tiene una aceleración de 2000 g? (*b*) Si la sangre del centro del tubo gira con el radio anterior, calcular las aceleraciones experimentadas por la sangre que se halla en cada uno de los extremos del tubo. Expresar las aceleraciones en términos de g.

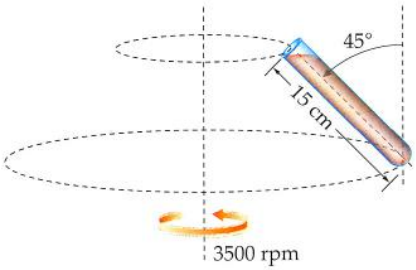


FIGURA 3.34 Problema 71

MOVIMIENTO DE PROYECTILES Y ALCANCE DE PROYECTILES

72 • Un lanzador de béisbol lanza una pelota a 140 km/h hacia la base, que está a 18,4 m de distancia. Despreciando la resistencia del aire (no sería una buena cosa para el bateador), determinar cuánto ha descendido la pelota por causa de la gravedad en el momento en que alcanza la base.

73 • Se lanza un proyectil con velocidad de módulo v_0 y ángulo θ_0 respecto a la horizontal. Hallar una expresión que dé la altura máxima que alcanza por encima de su punto de partida en función de v_0, θ_0 y g. (Despreciar la resistencia del aire.)

74 •• Un proyectil se dispara con una velocidad inicial v_0 bajo un ángulo de tiro de 30° sobre la horizontal desde una altura de 40 m por encima del suelo. El proyectil choca contra el suelo a una velocidad de $1{,}2\ v_0$. Determinar v_0. (Despreciar la resistencia del aire.)

75 •• En la figura 3.35, si x es 50 m y h = 10 m, ¿cuál es la velocidad mínima inicial del dardo para que choque contra el mono antes de llegar éste al suelo que está a 11,2 m por debajo de la posición inicial del mono? (Despreciar la resistencia del aire.)

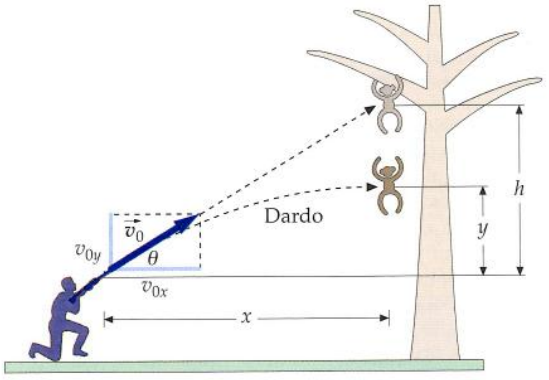


FIGURA 3.35 Problema 75

76 •• Un proyectil se dispara con una velocidad inicial de 53 m/s. Determinar el ángulo de proyección necesario para que la altura máxima del proyectil sea igual a su alcance horizontal. (Despreciar la resistencia del aire.)

77 •• Una bola lanzada al aire llega al suelo a 40 m de distancia al cabo de 2,44 s. Determinar el módulo y la dirección de la velocidad inicial. (Despreciar la resistencia del aire.) SSM

78 •• Demostrar que si un objeto se lanza con velocidad v_0 bajo un ángulo de tiro θ por encima de la horizontal, el módulo de la velocidad a cierta altura h, $v(h)$, es independiente de θ. (Despreciar la resistencia del aire.)

79 ••• A la mitad de su altura máxima, la velocidad de un proyectil es 3/4 de su velocidad inicial. ¿Qué ángulo forma el vector velocidad inicial con la horizontal? (Despreciar la resistencia del aire.)

80 •• Un avión de transporte vuela horizontalmente a una altura de 12 km con una velocidad de 900 km/h cuando un carro de combate se desprende de la rampa trasera de carga. (Despreciar la resistencia del aire.) (*a*) ¿Cuánto tiempo tarda el tanque en chocar contra el suelo? (*b*) ¿A qué distancia horizontal del punto donde cayó se encuentra el tanque cuando choca contra el suelo? (*c*) ¿A qué distancia está el tanque respecto al avión cuando choca contra el suelo, suponiendo que el avión sigue volando con velocidad constante?

81 •• Dos personajes de dibujos animados responden a su argumento habitual y uno persigue al otro. El coyote Wiley (*Carnivorous hungribilous*) intenta cazar de nuevo al Correcaminos (*Speedibus cantcatchmi*). Ambos, en su frenética carrera llegan al borde de un profundo barranco de 15 m de ancho y 100 m de profundidad. El Correcaminos salta con un ángulo de 15° por encima de la horizontal y aterriza al otro lado del barranco sobrándole 1,5 m. (*a*) ¿Cuál era la velocidad del Correcaminos antes de iniciar el salto? (Ignore la resistencia del aire.) (*b*) El Coyote, con el mismo objetivo de superar el obstáculo, salta también con la misma velocidad inicial, pero con distinto ángulo de salida. Para su desgracia, le faltan 0,5 m para poder alcanzar el otro lado del barranco. ¿Con qué ángulo saltó? (Supóngase que éste fue inferior a 15°.) SSM

82 •• Un cañón se ajusta con un ángulo de tiro de 45°. Dispara una bala con una velocidad de 300 m/s. (*a*) ¿A qué altura llegará la bala? (*b*) ¿Cuánto tiempo estará en el aire? (*c*) ¿Cuál es el alcance horizontal del cañón? (Despreciar la resistencia del aire.)

83 •• Una piedra lanzada horizontalmente desde lo alto de una torre choca contra el suelo a una distancia de 18 m de su base. (*a*) Sabiendo que la altura de la torre es de 24 m, calcular la velocidad con que fue lanzada la piedra. (*b*) Calcular la velocidad de la piedra justo antes de que ésta golpee el suelo. SSM

84 •• Se dispara un proyectil al aire desde la cima de una montaña situada a 200 m por encima de un valle (figura 3.36). Su velocidad inicial es de 60 m/s a 60° respecto a la horizontal. ¿Dónde caerá el proyectil? (Despreciar la resistencia del aire.)

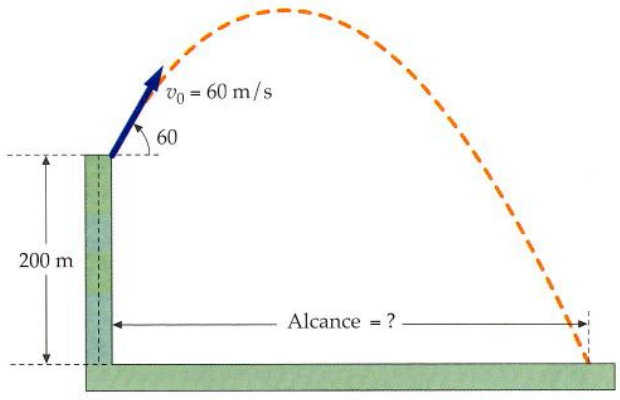


FIGURA 3.36 Problema 84

85 •• El alcance de un proyectil disparado horizontalmente desde lo alto de un monte es igual a su altura. ¿Cuál es la dirección del vector velocidad cuando el proyectil choca contra el suelo? (Despreciar la resistencia del aire.)

86 •• Un pez arquero lanza un chorro de agua desde la superficie de un pequeño lago con un ángulo de 60° respecto a la superficie. El pez está intentando impactar sobre una jugosa araña que se encuentra sobre la hoja de un árbol. La hoja se halla 50 cm al este del pez y 25 cm por encima de la superficie del lago. Si el pez consigue hacer caer a la araña al lago se la podrá comer. (*a*) ¿Cuál debería ser el módulo de la velocidad para que surta efecto? (*b*) En el momento del impacto, ¿el chorro asciende o desciende?

87 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Considere un jugador de fútbol americano que se encarga de chutar el balón cuando está plantado sobre el campo. El balón se planta a 50 m de la portería cuya barra horizontal se encuentra a 3,05 m del suelo. El jugador chuta el balón y éste sale a 25 m/s con un ángulo de 30° sobre el campo. (*a*) ¿Acertará? (*b*) En caso afirmativo, ¿a qué distancia sobre la barra horizontal? En caso negativo, ¿a qué distancia por debajo de la barra horizontal? (*c*) ¿A qué distancia respecto del plano de la portería cae el balón al suelo? SSM

88 •• Un arco lanza flechas con una velocidad del orden de 45 m/s. (*a*) Un arquero tártaro sentado a horcajadas en su caballo dispara una flecha elevando el arco 10° por encima de la horizontal. Si el arco está 2,25 m por encima del suelo, ¿cuál es el alcance de la flecha? Supóngase que el suelo está nivelado y no considere la resistencia del aire. (*b*) Supóngase ahora que el caballo se mueve a galope tendido en la misma dirección en que se dispara la flecha y que el arquero coloca el arco de la misma forma que en el apartado anterior. Si la velocidad del caballo es de 12 m/s, ¿cuál es ahora el alcance de la flecha?

89 El tejado de una casa forma un ángulo de 30° con la horizontal. Una pelota cae rodando sobre el tejado y lo abandona con una velocidad de 5 m/s. La distancia vertical entre el extremo del tejado y el suelo es de 7 m. (*a*) ¿Durante cuánto tiempo la pelota está en el aire? (*b*) ¿A qué distancia de la base de la casa cae al suelo? (*c*) ¿Cuál es la dirección y el módulo de la velocidad justo en el momento que llega al suelo?

90 •• Calcular $dR/d\theta_0$ a partir de $R = (v_0^2/g)\text{sen}(2\theta_0)$ y mostrar que poniendo $dR/d\theta_0 = 0$ nos da que para el ángulo $\theta_0 = 45°$ se obtiene el máximo alcance.

91 •• En un corto relato de ciencia ficción escrito durante los años 70, Ben Bova describió un conflicto entre dos hipotéticas colonias en la Luna —una fundada por los Estados Unidos y la otra fundada por la Unión Soviética. En la historia, los colonos de cada colonia empiezan a dispararse entre ellos hasta que se dan cuenta, con horror, que sus armas dan suficiente velocidad inicial a las balas para que éstas se sitúen en órbita. (*a*) Si el módulo de la aceleración de la gravedad en la Luna es 1,67 m/s^2, ¿cuál es el alcance máximo de una bala cuya velocidad inicial es de 900 m/s? (Supóngase que la curvatura de la superficie de la Luna es despreciable.) (*b*) ¿Cuál debería ser la velocidad inicial de una bala disparada en la superficie de la Luna para que ésta pudiera situarse en órbita alrededor del satélite? (Hay que considerar el radio de la Luna.)

92 ••• Una pelota es lanzada a nivel del suelo a 22 m/s con un ángulo de salida de 55° sobre la horizontal. La pelota cae al suelo (rígido) y rebota alcanzando una altura máxima del 75% de la altura máxima alcanzada en el primer arco. Despreciar los efectos de la resistencia del aire. (*a*) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada en el pimer arco parabólico? (*b*) ¿A qué distancia del punto de lanzamiento se produce el rebote? (*c*) ¿A qué distancia del punto de lanzamiento cae al suelo de nuevo después del rebote? Supóngase que la componente horizontal de la velocidad se mantiene constante durante la colisión con el suelo. *Ayuda: no se puede suponer que el ángulo con el que se lanza la pelota sea el mismo que el ángulo con el que sale justo después de la colisión.*

93 ••• En el texto, se ha calculado que el alcance de un proyectil cuando cae a la misma altura desde la que ha sido disparado es $R = (v_0^2/g)\,\text{sen}\,2\theta_0$. Una pelota de golf sale disparada desde un punto elevado a 45 m/s con un ángulo de 35° cayendo sobre el campo 20 m por debajo de la elevación (figura 3.37). Ignórese cualquier efecto de resistencia del aire. (*a*) Calcular el alcance utilizando $R = (v_0^2/g)\,\text{sen}\,2\theta_0$ aunque la pelota haya salido de un punto elevado. (*b*) Demostrar que el alcance para un problema más general como el que se muestra en la figura 3.37 viene dado por $R = \left(1 + \sqrt{1 - \dfrac{2gy}{v_0^2\,\text{sen}^2\theta_0}}\right)\dfrac{v_0^2}{2g}\,\text{sen}\,2\theta_0$, donde y es la altura del punto de salida, es decir, $y = -h$. (*c*) Calcular el alcance utilizando la fórmula anterior. ¿Cuál es el porcentaje de error al despreciar la altura del punto de salida?

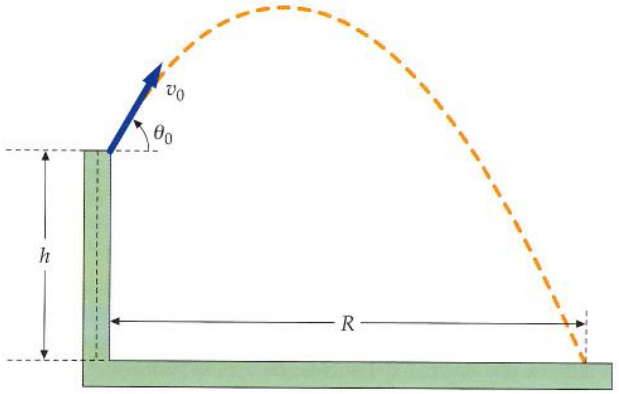


FIGURA 3.37 Problema 93

94 ••• **MÚLTIPLES PASOS** En el texto, se ha calculado que el alcance de un proyectil cuando cae a la misma altura desde la que ha sido disparado es $R = (v_0^2/g)\,\text{sen}\,2\theta_0$ si los efectos de la resistencia del aire son despreciables. (*a*) Demostrar que el cambio en el alcance causado por una pequeña variación de la aceleración de la gravedad viene dado por $\Delta R/R = -\Delta g/g$. (*b*) ¿Cuál sería el alcance de un cuadrangular a una altitud en que g fuera un 0,5% menor que a nivel del mar si el cuadrangular a nivel del mar recorre 400 pies?

95 ••• **MÚLTIPLES PASOS, APROXIMACIÓN** En el texto, se ha calculado que el alcance de un proyectil cuando cae a la misma altura desde la que ha sido disparado es $R = (v_0^2/g)\,\text{sen}\,2\theta_0$ si los efectos de la resistencia del aire son despreciables. (*a*) Demuestre que el cambio en el alcance causado por una pequeña variación de la velocidad inicial viene dado por $\Delta R/R = 2\Delta v_0/v_0$. (*b*) Suponga que el alcance de un proyectil fuera de 200 m. Utilice la fórmula del apartado (*a*) para calcular el aumento en el alcance si el módulo de la velocidad aumenta en un 20% (*c*) Compare su respuesta en (*b*) con el aumento calculado directamente de $R = (v_0^2/g)\,\text{sen}\,2\theta_0$. Si los resultados de los apartados (*b*) y (*c*) son distintos, explique esa diferencia. SSM

96 ••• Un proyectil se dispara con una velocidad inicial desconocida y aterriza, 20 s más tarde, en la ladera de una colina situada a una distancia horizontal de 3000 m y a 450 m por encima del punto desde donde se ha realizado el disparo. Ignórese cualquier efecto de resistencia del aire. (*a*) ¿Cuál es la componente vertical de su velocidad inicial? (*b*) ¿Cuál es la componente horizontal de su velocidad inicial? (*c*) ¿Cuál es la máxima altura alcanzada respecto del punto de lanzamiento? (*d*) Cuando el proyectil alcanza la colina, ¿con qué velocidad impacta y qué ángulo forma ésta con la vertical?

97 ••• Un proyectil se dispara con un ángulo de elevación θ. Un observador situado junto a la rampa de lanzamiento sitúa la posición del proyectil midiendo el ángulo de elevación ϕ que se muestra en la figura 3.38 cuando éste está en su máxima elevación. Demostrar que $\text{tg}\,\phi = \frac{1}{2}\,\text{tg}\,\theta$. (Despreciar la resistencia del aire.) SSM

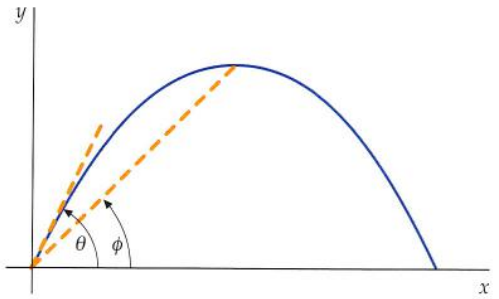


FIGURA 3.38 Problema 97

98 ••• Un cañón de juguete se coloca en una rampa que tiene una pendiente con un ángulo ϕ. (*a*) Si la bala se proyecta hacia arriba por una colina con un ángulo de θ_0 por encima de la horizontal (figura 3.39) y tiene una velocidad inicial v_0, demostrar que el alcance R (medido a lo largo de la rampa) viene dado por

$$R = \frac{2v_0^2\cos^2\theta_0(\text{tg}\,\theta_0 - \text{tg}\,\phi)}{g\cos\phi}$$

Ignorar la resistencia del aire.

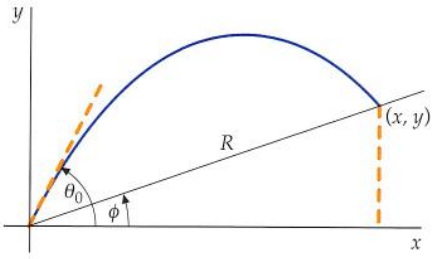


FIGURA 3.39 Problema 98

99 ••• Desde el tejado de un edificio de 20 m de altura se lanza una piedra con un ángulo de tiro de 53° sobre la horizontal. (*a*) Si el alcance horizontal de la piedra es igual a la altura del edificio, ¿con qué velocidad se lanzó la roca? (*b*) ¿Cuánto tiempo estuvo en el aire? (*c*) ¿Cuál es su velocidad justo antes de chocar contra el suelo? (Despreciar la resistencia del aire.)

100 ••• Una muchacha que está a 4 m de una pared vertical lanza contra ella una pelota (figura 3.40). La pelota sale de su mano a 2,0 m por encima del suelo con una velocidad inicial $v_0 = 14$ m/s a 45°. Cuando la pelota choca en la pared, se invierte la componente horizontal de su velocidad mientras que permanece sin variar su componente vertical. (*a*) ¿Dónde caerá la pelota al suelo? (*b*) ¿Durante cuánto tiempo estuvo la pelota en el aire antes de golpear contra la pared? (*c*) ¿A qué altura la pelota golpeó la pared? (*d*) ¿Durante cuánto tiempo estuvo la pelota en el aire después de golpear contra la pared? Ignórense los efectos del rozamiento con el aire.

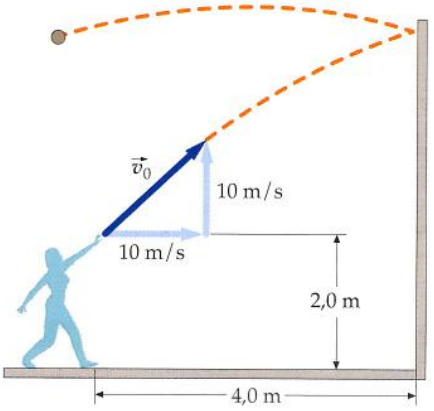


FIGURA 3.40 Problema 100

101 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Las catapultas fueron utilizadas hace miles de años para lanzar cualquier cosa, desde piedras hasta caballos. Durante una batalla en la actual Baviera, los artilleros de las tribus germanas lanzaban fideos gigantes a las fortificaciones romanas cuyas paredes median 8,5 m de altura. Las catapultas lanzaban los fideos desde una altura de 4 m sobre el suelo a una distancia de 38 m desde las paredes de la fortificación con un ángulo 60° por encima del eje horizontal (figura 3.41). Si los proyectiles debían salpicar a los soldados romanos que se hallaban en lo alto de las paredes de la fortificación con pasta pulverizada, (*a*) ¿cuál debía ser el módulo de la velocidad de lanzamiento? (*b*) ¿Cuánto tiempo estaban los fideos en el aire? (*c*) ¿Con qué velocidad impactaban los fideos en los soldados? Ignórense los efectos del rozamiento con el aire.

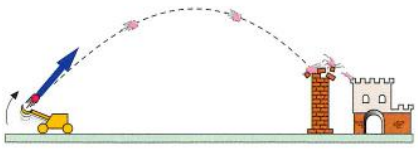


FIGURA 3.41 Problema 101

102 ••• La distancia del puesto del lanzador de béisbol a la base es de 18,4 m. El terraplén donde se sitúa el lanzador está 0,20 m sobre el nivel del campo. Al lanzar una pelota con una velocidad inicial de 37,5 m/s, sale de la mano del lanzador a una altura de 2,3 m sobre el terraplén. (*a*) ¿Qué ángulo debe formar $\vec{v}_0$ y la horizontal para que la pelota cruce la base a 0,7 m por encima del suelo? (Despreciar la interacción con el aire.) (*b*) ¿Con qué velocidad la pelota cruza la meta? SSM

103 ••• Supongamos que un disco de hockey se lanza de tal modo que justamente sobrepasa la pared de plexiglás, situada a 12 m, cuando se encuentra a su altura máxima de 2,80 m. Determinar la componente vertical de la velocidad inicial, (*b*) el tiempo que tarda en llegar a la pared y (*c*) la componente horizontal de la velocidad inicial, su módulo y el ángulo de lanzamiento. Ignórense los efectos del rozamiento con el aire.

104 ••• Un muchacho se aproxima con su motocicleta al lecho de un riachuelo de 7 m de anchura. Se ha construido una rampa con una inclinación de 10° para la gente atrevida que quiera saltar la zanja. El muchacho circula a su máxima velocidad, 40 km/h. (*a*) ¿Debería intentar el salto o pisar los frenos con energía? (*b*) ¿Cuál es la velocidad mínima que debe llevar la motocicleta para dar este salto? (Suponer la misma elevación en los dos lados del obstáculo.) (Despreciar la resistencia del aire.)

105 ••• Si una bala que sale por la boca del arma a 250 m/s ha de chocar contra un blanco situado a 100 m de distancia a la misma altura que el arma (1,7 m sobre el nivel del mar), ésta debe apuntar a un punto por encima del blanco. (*a*) ¿Qué distancia debe haber entre el blanco y este punto? (*b*) ¿A qué distancia por detrás del blanco caerá la bala al suelo? (Despreciar la resistencia del aire.) SSM

PROBLEMAS GENERALES

106 •• Un albañil situado en el tejado de una casa deja caer involuntariamente su martillo, y éste resbala por el tejado con una velocidad constante de 4 m/s. El tejado forma un ángulo de 30° con la horizontal y su punto más bajo está a 10 m de altura sobre el suelo. (*a*) ¿Cuánto tarda el martillo desde que deja el tejado hasta que cae al suelo? (*b*) ¿Qué distancia horizontal recorrerá el martillo después de abandonar el tejado de la casa y antes de que choque contra el suelo? (Despreciar la resistencia del aire.)

107 •• Cuando una pelota de squash rebota sobre la pared sale con un módulo de la velocidad que representa el 25% del módulo de la velocidad con que impactó. Supongamos que la pelota se sirve a 45 cm sobre el suelo con un ángulo de 6° sobre la superficie y a una distancia de 12 m de la pared. (*a*) Si impacta sobre la pared justo en el punto más alto de su trayectoria, determinar la altura de impacto. (*b*) ¿A qué distancia de la pared cae la pelota después del rebote? (Ignórense los efectos del rozamiento con el aire).

108 •• El *quarterback* de un equipo de fútbol americano lanza un pase con un ángulo de 36,5°. El pase se realiza hacia atrás desde la línea de inicio de la jugada. Su receptor salió de la línea de inicio de la jugada 2,5 s antes del lanzamiento corriendo campo a través a 7,5 m/s. ¿Con qué velocidad debió lanzar el *quarterback* el balón para que el receptor lo interceptara en condiciones óptimas? Suponer que el balón se intercepta a la misma altura desde la que se lanzó y que el receptor corrió en la misma dirección en que fue lanzado el balón. (Despreciar la resistencia del aire.)

109 •• Supóngase que para las pruebas de piloto es necesario soportar una aceleración de hasta cinco veces la de la gravedad (es decir, se debe estar consciente y alerta como para poder pilotar). Durante el curso de unas maniobras se le pide que pilote el avión describiendo un círculo horizontal a una velocidad de 1900 millas/h. (*a*) ¿Cuál es el radio más pequeño del círculo que puede describir de forma segura? (*b*) ¿Cuánto tiempo tardará en recorrer la mitad del círculo?

110 •• Una partícula se mueve en el plano xy con aceleración constante. Para $t = 0$, la partícula se encuentra en la posición $\vec{r}_1 = (4{,}0\text{ m})\hat{i} + (3{,}0\text{ m})\hat{j}$ con velocidad $\vec{v}_1$. Para $t = 2$ s, la partícula se ha desplazado a la posición $\vec{r}_2 = (10\text{ m})\hat{i} - (2{,}0\text{ m})\hat{j}$ y su velocidad ha cambiado a $\vec{v}_2 = (5{,}0\text{ m/s})\hat{i} - (6{,}0\text{ m/s})\hat{j}$. (*a*) Determinar $\vec{v}_1$. (*b*) ¿Cuál es la aceleración de la partícula? (*c*) ¿Cuál es la velocidad de la partícula en función del tiempo? (*d*) ¿Cuál es el vector posición de la partícula en función del tiempo?

111 •• Un avión A vuela hacia el este con una velocidad de 400 millas por hora. Directamente por debajo, a una distancia de 4000 pies, un avión B vuela hacia el norte a 700 millas por hora. Calcular la velocidad relativa del avión B respecto al A. SSM

112 •• Un buceador se tira al mar desde un acantilado en Acapulco, Méjico, situado a 30 m sobre el nivel del mar. El buceador activa su mochila de propulsión que le proporciona una aceleración horizontal constante de 5 m/s² sin afectar a su componente vertical. (*a*) ¿Cuánto tiempo tarda en caer al mar? (*b*) Suponiendo que el acantilado es vertical, ¿a qué distancia del acantilado cae al mar? (*c*) Demuestre que la trayectoria es una línea recta. (Ignórense los efectos del rozamiento con el aire.)

113 •• Una pequeña bola de acero se proyecta horizontalmente desde la parte superior de una escalera de escalones rectangulares. La velocidad inicial de la bola es de 3 m/s. Cada escalón tiene 0,18 m de altura y 0,3 m de ancho. ¿Con qué escalón chocará la bola en primer lugar? SSM

114 •• Una persona lanza una pelota a la distancia x_0 cuando está de pie sobre un terreno nivelado. ¿A qué distancia lanzará la misma pelota desde lo alto de un edificio de altura h si lo hace con ángulos de inclinación (*a*) 0°, (*b*) 30°, (*c*) 45°? (Despreciar la resistencia del aire.)

115 ••• Darlen es una motorista acróbata de un circo ambulante. Para dar más emoción a su actuación, salta desde una rampa que posee una inclinación θ y sobrepasa una zanja con llamas de anchura x y alcanza el otro extremo sobre una plataforma elevada (altura h respecto del lado inicial) (figura 3.42). (*a*) Para una determinada altura h, encuentre la velocidad de despegue mínima v_{min} para realizar el salto con éxito.

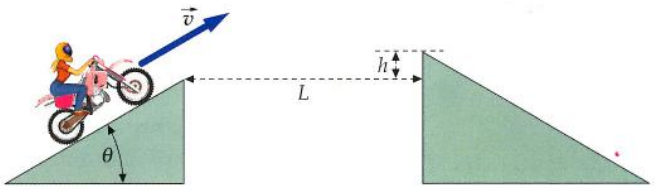


FIGURA 3.42 Problema 115

(*b*) ¿Cuál es v_{min} para un ángulo de lanzamiento $\theta = 30°$ si la profundidad del pozo es de $L = 8$ m y la altura de la plataforma $h = 4$ m? (*c*) Muestre que, independientemente del módulo de la velocidad de despegue, la altura máxima de la plataforma es $h < L \operatorname{tg} \theta_0$. Interprete el resultado físicamente. (Desprecie los efectos de la resistencia del aire y trate la motocicleta como una partícula.)

116 ••• Una pequeña lancha pone rumbo hacia un puerto situado a 32 km hacia el noroeste de su posición inicial cuando, súbitamente, se ve envuelta en una densa niebla. El capitán mantiene el rumbo al noroeste y una velocidad de 10 km/h relativa al agua. Tres horas más tarde, la niebla se levanta y el capitán observa que se encuentra exactamente a 4,0 km al sur del puerto. (*a*) ¿Cuál fue la velocidad media de la corriente durante aquellas tres horas? (*b*) ¿En qué dirección debería haber puesto su rumbo la lancha para alcanzar su destino en una trayectoria lineal? (*c*) Si hubiera seguido esta trayectoria lineal, ¿qué tiempo habría necesitado para realizar el viaje?

117 •• Galileo indicó que, si se despreciaba la resistencia del aire, los alcances de los proyectiles lanzados con ángulos de tiro mayores de 45° en una determinada cantidad eran iguales a los alcances de proyectiles lanzados con ángulos de tiro menores de 45° en la misma cantidad. Demostrarlo. SSM

118 •• Desde la parte superior de un acantilado de altura h se lanzan dos pelotas con idéntica velocidad. Una de ellas se lanza hacia arriba con un ángulo α respecto a la horizontal. La otra pelota se lanza hacia abajo con un ángulo β respecto a la horizontal. Demostrar que ambas pelotas chocan contra el suelo con la misma velocidad y calcular el valor de esta velocidad en función de h y de la velocidad inicial v_0. (Despreciar la resistencia del aire.)

119 •• Desde el interior de su coche, un conductor lanza un huevo verticalmente hacia arriba. El lanzamiento se inicia a la altura del pecho y la altura máxima que alcanza es justamente la altura del techo, es decir, 65 cm por encima de la altura de lanzamiento. El conductor atrapa el huevo a la misma altura que lo lanzó. Usted es un peatón que mide la distancia entre los puntos de captura y lanzamiento obteniendo 19 m. (*a*) ¿A qué velocidad se mueve el coche? (*b*) Con respecto a su sistema de referencia ¿con qué ángulo respecto al eje horizontal fue lanzado el huevo?

120 ••• Se traza una línea recta desde el centro hasta el borde de un plato de 16 cm de radio. Una pulga se desplaza lentamente sobre la línea desde el centro hacia el borde al tiempo que el plato gira en sentido contrario a las agujas del reloj a 45 rpm. La velocidad de la pulga relativa al plato es de 3,5 cm/s. Si la dirección inicial de movimiento es la dirección positiva del eje x, calcúlense las componentes de la velocidad de la pulga cuando llega al borde del plato.

121 ••• Un piloto acrobático pilota un antiguo *Sopwith Camel* de la Primera Guerra Mundial desde Dubuque (Iowa) hasta Chicago (Illinois) para una exhibición aérea. No se da cuenta de que la antigua brújula magnética del avión no funciona correctamente y marca como dirección norte lo que en realidad corresponde a 16,5° al este del norte. En un momento del vuelo, el aeropuerto de Chicago le informa de que se encuentra a 150 km al oeste del aeropuerto. Entonces, el piloto pone rumbo al este, de acuerdo con la dirección que marca la brújula del avión y vuela a 150 km/h durante 45 minutos. En ese momento, el piloto espera ver el aeropuerto e iniciar el descenso. ¿A qué distancia real se encuentra en ese momento de Chicago y cuál debería ser el cambio de rumbo para poder ir a Chicago en línea recta?

122 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Un avión de transporte pierde un equipaje mientras asciende. La maniobra de ascenso se realiza a 275 millas por hora con un ángulo de 37° sobre la horizontal. Durante el ascenso cae el equipaje deslizándose por la rampa a velocidad despreciable. El equipaje cae sobre un campo situado a 7,5 km del punto de salida. Calcular el tiempo que ha tardado en salir el equipaje del avión. (Ignórense los efectos del rozamiento con el aire.)

CAPÍTULO 4

ESTE AVIÓN ESTÁ ACELERANDO ANTES DEL DESPEGUE. LAS LEYES DE NEWTON RELACIONAN LA ACELERACIÓN DE UN OBJETO CON SU MASA Y CON LAS FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE ÉL. *(John Neubauer/FPG/Getty.)*

Leyes de Newton

4.1 Primera ley de Newton: ley de la inercia
4.2 Fuerza y masa
4.3 Segunda ley de Newton
4.4 Fuerza debida a la gravedad: el peso
4.5 Fuerza de contacto: sólidos, muelles y cuerdas
4.6 Resolución de problemas: diagramas de fuerzas de sistemas aislados
4.7 Tercera ley de Newton
4.8 Problemas con dos o más objetos

? Si usted fuera un pasajero, ¿cómo usaría las leyes de Newton para determinar la aceleración del avión? (Véase el ejemplo 4.9.)

Ahora que ya hemos estudiado cómo se mueven los cuerpos en una, dos y tres dimensiones, podemos plantearnos estas preguntas: "¿Por qué los objetos se ponen en movimiento?" y "¿Cuáles son las causas que hacen que un cuerpo en movimiento cambie su velocidad o cambie de dirección?" Esas cuestiones ocuparon la mente de Sir Isaac Newton, que nació en 1642, el año que murió Galileo. Como estudiante en Cambridge, donde fue más tarde profesor de matemáticas, Newton estudió los trabajos de Galileo y Kepler. Quería entender por qué los planetas se movían elípticamente a velocidades que dependían de la distancia al Sol e incluso por qué el sistema solar permanecía siempre unido. Durante su vida desarrolló su ley de la gravitación, que examinaremos en el capítulo 12 y sus tres leyes básicas del movimiento que constituyen la base de la mecánica clásica.

Las leyes de Newton relacionan las fuerzas que se ejercen los cuerpos entre sí, así como los cambios en el movimiento de un objeto con las fuerzas que actúan sobre él. Aunque ya tenemos una idea intuitiva de algunas fuerzas, como las de empuje o de tracción ejercidas por nuestros músculos o por muelles o gomas elásticas, las leyes de Newton nos permiten refinar nuestra comprensión sobre las fuerzas en general.

En este capítulo, describiremos las tres leyes del movimiento de Newton y empezaremos a utilizarlas para resolver problemas que impliquen objetos en movimiento y en reposo.

4.1 PRIMERA LEY DE NEWTON: LEY DE LA INERCIA

Empujemos un trozo de hielo sobre una mesa: se desliza y luego se para. Si la mesa está húmeda, el hielo recorre un espacio mayor antes de pararse. Si se trata de un trozo de hielo seco (dióxido de carbono congelado) sobre un colchón de vapor de dióxido de carbono, el deslizamiento es mucho mayor y el cambio de velocidad es muy pequeño. Antes de Galileo se creía que siempre era necesaria una fuerza, tal como un empuje o un tirón, para mantener un cuerpo en movimiento con velocidad constante. Pero Galileo, y posteriormente Newton, se dio cuenta de que si los cuerpos se detenían en su movimiento en las experiencias diarias era debido al rozamiento (o fricción). Si éste se reduce, el cambio de velocidad se reduce. Una capa de agua o un colchón de gas son especialmente efectivos para reducir el rozamiento, permitiendo que el objeto se deslice a gran distancia con un pequeño cambio en su velocidad. Si se eliminan todas las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo —razonaba Galileo— su velocidad no cambiará, una propiedad de la materia que él describía como **inercia**. Esta conclusión restablecida por Newton como su primera ley, se llama también **ley de la inercia**.

Una versión moderna de las leyes de Newton es la siguiente:

Primera ley. Todo cuerpo en reposo sigue en reposo *a menos que* sobre él actúe una fuerza externa. Un cuerpo en movimiento continúa moviéndose con velocidad constante *a menos que* sobre él actúe una fuerza externa.

PRIMERA LEY DE NEWTON

SISTEMAS DE REFERENCIA INERCIALES

La primera ley de Newton no distingue entre un objeto en reposo y un objeto que se mueve con velocidad constante distinta de cero. El hecho de que un objeto esté en reposo o en movimiento con velocidad constante depende del sistema de referencia en el cual se observa el objeto. Consideremos una pelota situada en la bandeja de su asiento de un avión que vuela en una trayectoria horizontal. En un sistema de coordenadas fijo al avión (es decir, en el sistema de referencia del avión) la pelota está en reposo, y permanecerá en reposo relativo al avión siempre que éste vuele con velocidad constante (figura 4.1*a*).

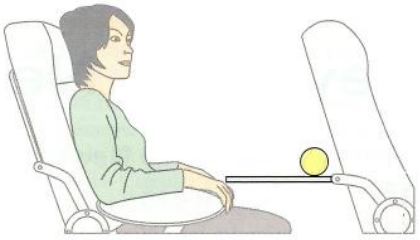
Supongamos ahora que el piloto aumenta la potencia de los motores y el avión, de forma brusca, acelera (con respecto al suelo). Usted observará que la pelota, de repente, retrocede hacia la parte trasera del avión acelerando con respecto al avión incluso cuando no actúa ninguna fuerza sobre ella (figura 4.1*b*). En el sistema de referencia del avión, la primera ley de Newton no se puede aplicar, pues es un sistema de referencia acelerado. La primera ley de Newton sólo puede aplicarse a sistemas de referencia denominados inerciales. De hecho, la primera ley de Newton nos proporciona un criterio para determinar si un sistema de referencia es inercial o no.

Si sobre un objeto no actúa ninguna fuerza, cualquier sistema de referencia con respecto al cual la aceleración del objeto es cero es un **sistema de referencia inercial**.

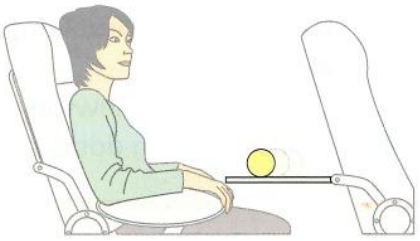
DEFINICIÓN DE SISTEMA DE REFERENCIA INERCIAL

Tanto el avión, cuando se mueve a velocidad constante, como el suelo, son una buena aproximación de sistemas de referencia inerciales. Cualquier sistema de referencia que se mueve a velocidad constante con respecto a un sistema de referencia inercial también es un sistema de referencia inercial.

El rozamiento se reduce enormemente gracias a un colchón de aire que soporta el aerodeslizador. *(Jose Dupont/Explorer/Photo Researchers.)*



(*a*)



(*b*)

FIGURA 4.1 El avión vuela horizontalmente en línea recta a velocidad constante cuando usted coloca una pelota de tenis encima de la mesa. (*a*) El avión continúa volando a velocidad constante respecto al suelo y la pelota permanece en reposo sobre la mesa. (*b*) El piloto, de repente, presiona el acelerador y el avión aumenta su velocidad respecto al suelo. La pelota no aumenta su velocidad al ritmo que el avión de forma que se acelera hacia la parte trasera.

! La primera ley de Newton es válida *sólo* para sistemas de referencia inerciales.

Un sistema de referencia fijo al suelo no es totalmente un sistema de referencia inercial por la pequeña aceleración del suelo debida a la rotación terrestre y a la pequeña aceleración de la propia Tierra debida a su revolución alrededor del Sol. Sin embargo, como estas aceleraciones son del orden de 0,01 m/s^2 (o menos), podemos considerar que, aproximadamente, un sistema de referencia fijo a la superficie de la Tierra es un sistema de referencia inercial.

4.2 FUERZA Y MASA

Si utilizamos la primera ley de Newton y el concepto de sistema de referencia inercial, podemos definir una **fuerza** como una influencia externa o acción sobre un objeto que produce un cambio en su velocidad, es decir, una aceleración respecto a un sistema de referencia inercial (suponemos que no hay otras fuerzas que actúen sobre el cuerpo). La fuerza es una cantidad vectorial. Tiene un módulo (tamaño o intensidad de la fuerza) y una dirección.

Las fuerzas son ejercidas por unos cuerpos sobre otros y las fuerzas que se generan al estar dos cuerpos en contacto físico se llaman **fuerzas de contacto**. Golpear una pelota con un bate, tirar de un hilo de pescar, empujar el carrito de la compra o la fuerza de rozamiento entre las zapatillas y el suelo, son fuerzas de contacto. Obsérvese que en cada uno de los casos hay un contacto físico entre el cuerpo que aplica la fuerza y el cuerpo sobre el cual se aplica la fuerza. Otras fuerza actúan sin contacto directo entre los cuerpos. Estas fuerzas, conocidas como fuerzas de acción a distancia, incluyen la fuerza gravitacional, la fuerza magnética y la fuerza eléctrica.

LAS FUERZAS FUNDAMENTALES DE LA NATURALEZA

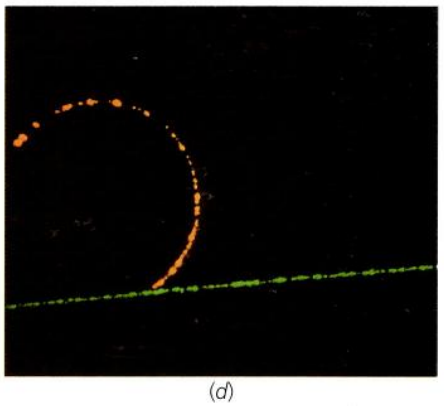
Las fuerzas son interacciones entre partículas. Los físicos tradicionalmente explican todas las interacciones observadas en la naturaleza en términos de cuatro interacciones básicas que ocurren entre partículas fundamentales (ver figura 4.2):

1. La interacción gravitacional. Interacción de largo alcance entre partículas debida a su masa. Se cree que la interacción gravitacional es debida al intercambio de unas partículas llamadas gravitones.
2. La interacción electromagnética. Interacción de largo alcance entre partículas cargadas eléctricamente incluyendo el intercambio de fotones.
3. La fuerza nuclear débil. Interacción a extremadamente corto alcance entre partículas subnucleares incluyendo el intercambio o producción de bosones W y Z. Las interacciones electromagnéticas y las interacciones débiles se han unificado recientemente bajo la denominación de interacción electrodébil.
4. La fuerza nuclear fuerte. Interacción de largo alcance entre hadrones, los cuales a su vez consisten en quarks, que une a los protones y neutrones para formar el núcleo atómico. Esta interacción incluye el intercambio de mesones entre los hadrones y de gluones entre los quarks.

(a)

(b)

(c)



(d)

FIGURA 4.2 (*a*) La fuerza gravitatoria ejercida entre la Tierra y un cuerpo próximo a la superficie terrestre es el peso del cuerpo. La interacción gravitacional entre el Sol y los demás planetas es la responsable de que éstos se mantengan en sus órbitas alrededor del Sol. De igual modo, la interacción gravitacional entre la Tierra y la Luna mantiene a ésta en una órbita casi circular alrededor de la Tierra. Las fuerzas gravitatorias ejercidas por la Luna y el Sol sobre los océanos de la Tierra son responsables de las mareas. El monte Saint-Michel (Francia) mostrado en esta foto se convierte en una isla cuando sube la marea. (*b*) La fuerza electromagnética incluye las fuerzas eléctrica y magnética. Un ejemplo familiar de fuerza eléctrica es la atracción entre pequeños trozos de papel y un peine que se ha electrificado al pasarlo por el cabello. Los relámpagos sobre el Observatorio Nacional Kitt Peak, que se muestran en la foto, son el resultado de la fuerza electromagnética. (*c*) La fuerza nuclear fuerte tiene lugar entre las partículas elementales llamadas hadrones, que incluyen los protones y neutrones, constituyentes de los núcleos atómicos. Esta interacción resulta de la interacción de los quarks, bloques constitutivos de los hadrones y es la responsable de mantener los núcleos estables. La explosión de la bomba de hidrógeno ilustrada en esta fotografía es un ejemplo de la potencia de esta fuerza. (*d*) La fuerza nuclear débil se produce entre los leptones (que incluyen electrones y muones) y entre los hadrones (protones y neutrones). Esta fotografía de la cámara de niebla (en falso color) ilustra la interacción débil entre un muón de la radiación cósmica (verde) y un electrón (rojo) arrancado de un átomo. *((a) Cotton Coulson/ Woodfin Camp and Assoc.; (b) Gary Ladd; (c) Los Alamos National Lab; (d) Science Photo Library/Photo Researchers.)*

Las fuerzas que observamos a diario entre cuerpos macroscópicos son debidas a interacciones gravitacionales o electromagnéticas. Las fuerzas de contacto, por ejemplo, son en esencia fuerzas de origen electromagnético. Son ejercidas por las moléculas de la superficie de los cuerpos en contacto. Las fuerzas de acción a distancia son debidas a interacciones gravitacionales y electromagnéticas. Esas dos fuerzas actúan entre partículas separadas en el espacio. Aunque Newton no fue capaz de explicar cómo las fuerzas pueden actuar a través del vacío, los científicos introdujeron posteriormente el concepto de campo, que actúa como un agente intermedio. Por ejemplo, la atracción de la Tierra por el Sol se considera en dos etapas. El Sol crea una condición en el espacio que llamamos campo gravitatorio. Este campo ejerce entonces una fuerza sobre la Tierra. Del mismo modo, la Tierra produce un campo gravitatorio que ejerce una fuerza sobre el Sol. Nuestro peso es la fuerza ejercida por el campo gravitatorio de la Tierra sobre nosotros mismos. Cuando estudiemos la electricidad y el magnetismo (capítulos 22–31) analizaremos los campos eléctricos, producidos por cargas eléctricas, y magnéticos, producidos por cargas eléctricas en movimiento. Las interacciones fuertes y débiles se discutirán en el capítulo 42.

COMBINACIÓN DE FUERZAS

Si dos o más fuerzas actúan simultáneamente sobre un cuerpo, el resultado es equivalente a que una sola fuerza, igual a la suma vectorial de las fuerzas individuales, actuara en lugar de las fuerzas individuales (que las fuerzas se puedan combinar de esta forma se denomina **principio de superposición**). El vector suma de las fuerzas individuales se llama **fuerza neta** o **fuerza resultante** $\vec{F}_{\text{neta}}$ sobre el cuerpo. Es decir,

$$\vec{F}_{\text{neta}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots$$

donde $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ... son las fuerzas individuales. La figura 4.3 muestra un objeto del que se tira en dos direcciones mediante dos cuerdas. El efecto es el mismo que si una sola fuerza igual a la fuerza neta tirara del cuerpo.

La unidad del fuerza en el SI es el newton (N). El newton se define en la siguiente sección. Un newton es igual al peso de una manzana de tamaño mediano.

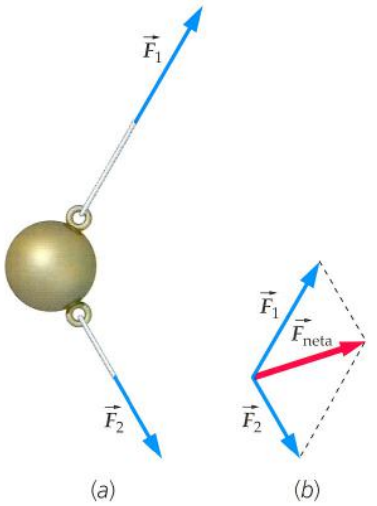


FIGURA 4.3 (*a*) Las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ tiran de la esfera. (*b*) El efecto de ambas fuerzas es equivalente al de una fuerza $\vec{F}_{\text{neta}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ que actúa sobre la esfera en lugar de las dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$.

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 4.1

¿La fuerza neta es una fuerza real?

MASA

Los objetos se resisten intrínsecamente a ser acelerados. Imaginemos que damos una patada a una pelota de fútbol o a una bola en la bolera. Ésta última se resiste mucho más a ser acelerada que la pelota de fútbol, lo cual se manifiesta inmediatamente en la diferente sensación que notan los dedos de nuestros pies al dar el golpe sobre ambos objetos. Esta propiedad intrínseca de un cuerpo es la **masa**. Es una medida de la inercia del cuerpo.

Como ya vimos en el capítulo 1, el cuerpo elegido como patrón internacional de masa es un cilindro de una aleación de platino-iridio que se conserva cuidadosamente en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas en Sèvres, Francia, al que se le asigna la masa de 1 **kilogramo**, la unidad de masa del SI.

Una unidad patrón conveniente de masa en la física atómica y nuclear es la **unidad de masa unificada** (u) que se define como la doceava parte de la masa del átomo de carbono-12 (^{12}C). La unidad de masa unificada está relacionada con el kilogramo por

$$1\ \text{u} = 1{,}660\,540 \times 10^{-27}\ \text{kg}$$

El concepto de masa se define como una constante de proporcionalidad en la segunda ley de Newton. Para medir la masa de un cuerpo la comparamos con una masa estándar, como el kilogramo patrón guardado en Sèvres. La comparación se cumple utilizando la segunda ley de Newton. En el ejemplo 4.1 se ilustra una forma de hacerlo.

4.3 SEGUNDA LEY DE NEWTON

La primera ley de Newton nos dice lo que sucede cuando sobre un cuerpo no actúan fuerzas. Pero, ¿qué sucede cuando hay fuerzas aplicadas sobre un cuerpo? Consideremos de nuevo un bloque de hielo que desliza con velocidad constante sobre una superficie suave, sin rozamiento. Si se empuja el hielo, se ejerce una fuerza $\vec{F}$ que produce un cambio en su velocidad. Cuanto más fuerte se empuje mayor será la aceleración resultante $\vec{a}$. La aceleración $\vec{a}$ de cualquier objeto es directamente proporcional a la fuerza neta $\vec{F}_{\text{neta}}$ ejercida sobre él, siendo el inverso de su masa la constante de proporcionalidad. Además, el vector aceleración y el vector fuerza neta tienen la misma dirección. Newton resumió estas observaciones en su segunda ley del movimiento:

Segunda ley. La aceleración de un cuerpo es proporcional a la fuerza neta que actúa sobre él, e inversamente proporcional a su masa. Así pues,

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{neta}}}{m}, \quad \text{donde} \quad \vec{F}_{\text{neta}} = \sum \vec{F} \qquad 4.1$$

SEGUNDA LEY DE NEWTON

Una fuerza neta que actúa sobre un cuerpo le produce una aceleración. Es una relación de causa y efecto. La fuerza neta es la causa y la aceleración es el efecto*.

Una fuerza neta de un newton le proporciona a un kilogramo de masa una aceleración de 1 m/s², así

$$1\ \text{N} = (1\ \text{kg})(1\ \text{m/s}^2) = 1\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2 \qquad 4.2$$

Entonces, una fuerza de 2 N da a una masa de 2 kg una aceleración de 1 m/s², y así sucesivamente.

En el sistema de unidades americano la unidad de fuerza es la *libra* (lb), donde 1 lb ≈ 4,45 N,† y la unidad de masa es el *slug*. La libra se define como la fuerza necesaria para producir una aceleración de 1 ft/s² a una masa de 1 slug:

$$1\ \text{lb} = 1\ \text{slug}\cdot\text{ft/s}^2$$

y se sigue que 1 slug ≈ 14,6 kg.

La ecuación 4.1 se expresa frecuentemente como:

$$\vec{F}_{\text{neta}} = m\vec{a}$$

y será la expresión que utilizaremos más a menudo.

> ! La segunda ley de Newton, al igual que la primera ley, es válida *sólo* para sistemas de referencia inerciales.

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 4.2

¿Es $m\vec{a}$ una fuerza?

Ejemplo 4.1 Un paquete de helado

La fuerza aplicada por una banda elástica produce una aceleración de 5 m/s² sobre un paquete de helado m_1 = 1 kg. Cuando la misma fuerza se aplica a un paquete de helado de masa m_2 a través de la misma goma le produce una aceleración de 11 m/s². (*a*) ¿Cuál es la masa del segundo paquete de helado? (*b*) ¿Cuál es el módulo de la fuerza?

PLANTEAMIENTO Aplicar la fórmula $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$, a cada objeto, y despejar la masa del paquete de helado y el módulo de la fuerza. Los módulos de las fuerzas ejercidas por las gomas son iguales.

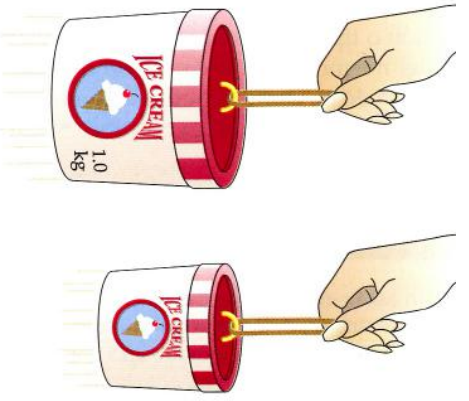


FIGURA 4.4

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Aplicar $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ a cada objeto. Únicamente hay una fuerza, por lo que necesitamos simplemente considerar el módulo de las variables vectoriales: $F_1 = m_1a_1$ y $F_2 = m_2a_2$

* La segunda ley de Newton relaciona fuerza neta con aceleración. No todo el mundo está de acuerdo en que la fuerza neta es la causa y la aceleración el efecto.

† La libra de la que estamos hablando es la libra de fuerza (una libra de fuerza es exactamente igual a 4,4482216152605 N). También existe la libra de masa que equivale exactamente a 0,45359237 kg.

2. La relación de las masas está en razón inversa con la relación de las aceleraciones producidas por la misma fuerza: $F_1 = F_2 \Rightarrow m_1a_1 = m_2a_2$ y $\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2}$

3. Despejar m_2 en función de m_1, que es 1 kg: $m_2 = \frac{a_1}{a_2}m_1 = \frac{5{,}0\ \text{m/s}^2}{11\ \text{m/s}^2}(1{,}0\ \text{kg}) = \boxed{0{,}45\ \text{kg}}$

(*b*) El módulo de la fuerza se obtiene multiplicando la masa por la aceleración de cualquiera de los cuerpos: $F_1 = m_1a_1 = (1{,}0\ \text{kg})(5{,}0\ \text{m/s}^2) = \boxed{5{,}0\ \text{N}}$

COMPROBACIÓN Considérese una masa de 0,45 kg de helado. Un kilogramo de helado pesa unas 2,2 libras, es decir, que el helado pesa una libra aproximadamente, que viene a ser el tamaño de un paquete de helado.

PROBLEMA PRÁCTICO 4.1 Una fuerza de 3 N produce una aceleración de 2 m/s² sobre un objeto de masa desconocida. (*a*) ¿Cuál es la masa del objeto? (b) Si la fuerza se incrementa a 4 N, ¿cuál es la aceleración?

Para describir cuantitativamente las masas podemos aplicar fuerzas idénticas a dos masas distintas y comparar sus aceleraciones. Si una fuerza de magnitud F produce una aceleración de módulo a_1 al aplicarse a una masa m_1 y la misma fuerza produce una aceleración de módulo a_2 cuando se aplica a un objeto de masa m_2, entonces $m_1a_1 = m_2a_2$ (o bien $m_2/m_1 = a_1/a_2$). Es decir,

Si $F_1 = F_2$ entonces

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2} \qquad 4.3$$

COMPARACIÓN DE MASAS

Esta definición está de acuerdo con nuestra idea intuitiva de masa. Si la misma fuerza se aplica a dos objetos, el objeto de más masa es el que acelera menos. Experimentalmente se deduce que la relación a_1/a_2, obtenida cuando fuerzas de idéntica magnitud actúan sobre dos objetos, es independiente del módulo, dirección o tipo de fuerza utilizada. La masa de un cuerpo es una propiedad intrínseca del mismo y, por lo tanto, no depende de la localización del cuerpo. Es decir, la masa de un cuerpo continúa siendo la misma si el cuerpo está sobre la Tierra, sobre la Luna o en el espacio exterior.

Ejemplo 4.2 Un paseo espacial

Póngalo en su contexto

Un astronauta se ha extraviado en el espacio lejos de su cápsula espacial. Afortunadamente, posee una unidad de propulsión que le proporciona una fuerza constante $\vec{F}$ durante 3 s. Al cabo de los 3 s se ha movido 2,25 m. Si su masa es 68 kg, determinar $\vec{F}$.

PLANTEAMIENTO La fuerza que actúa sobre el astronauta es constante, de modo que la aceleración $\vec{a}$ también es constante. Por lo tanto, utilizaremos las ecuaciones cinemáticas del capítulo 2 y 3 para determinar $\vec{a}$, y con ello obtener la fuerza, a partir de $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$. Escogeremos $\vec{F}$ en la dirección del eje x, de modo que $\vec{F} = F_x\hat{i}$ (figura 4.5) y $F_x = ma_x$.

SOLUCIÓN

1. Para determinar la aceleración, utilizamos la ecuación 2.14 con $v_0 = 0$:

$$\Delta x = v_0t + \tfrac{1}{2}a_xt^2 = 0 + \tfrac{1}{2}a_xt^2$$

$$a_x = \frac{2\Delta x}{t^2} = \frac{2(2{,}25\ \text{m})}{(3{,}0\ \text{s})^2} = 0{,}50\ \text{m/s}^2$$

$$\vec{a} = a_x\hat{i} = 0{,}50\ \text{m/s}^2\hat{i}$$

La unidad propulsora (que no se muestra en la fotografía) empuja al astronauta hacia la derecha. *(NASA/Science Source/Photo Researchers.)*

2. Como $\vec{F}$ es la fuerza *neta*, $\Sigma\vec{F}_i = \vec{F}$ sustituimos $\vec{a} = 0{,}50\ \text{m/s}^2\,\hat{i}$ y $m = 68\,\text{kg}$ en esta ecuación para encontrar la fuerza:

$$\vec{F} = ma_x\hat{i} = (68\ \text{kg})(0{,}50\ \text{m/s}^2)\hat{i} = \boxed{34\ \text{N}\,\hat{i}}$$

COMPROBACIÓN La aceleración es 0,5 m/s², que es un 5% de g. Este valor parece plausible. Si el módulo de la aceleración fuese g, el astronauta se desplazaría más allá de 2,25 m en 3 s.

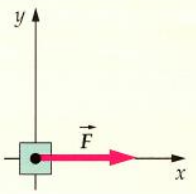


FIGURA 4.5

Ejemplo 4.3 Fuerzas que actúan sobre una partícula

Una partícula de masa 0,4 kg está sometida, simultáneamente, a dos fuerzas $\vec{F}_1 = -2{,}00\,\text{N}\,\hat{i} - 4{,}00\,\text{N}\,\hat{j}$ y $\vec{F}_2 = -2{,}60\,\text{N}\,\hat{i} + 5{,}00\,\text{N}\,\hat{j}$ (Figura 4.6). Si la partícula está en el origen y parte del reposo para $t = 0$, calcular (*a*) su vector posición $\vec{r}$ y (*b*) su velocidad $\vec{v}$ para $t = 1{,}6$ s.

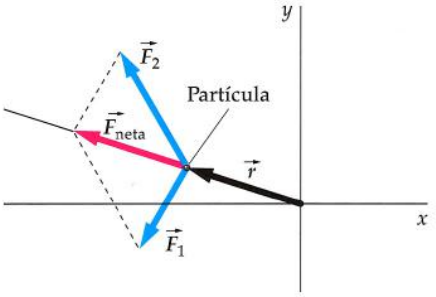


FIGURA 4.6 La aceleración tiene la misma dirección que la fuerza neta. La partícula parte del reposo desde el origen y se mueve en la dirección de la fuerza neta.

PLANTEAMIENTO Aplicar $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ para encontrar la aceleración. Después podemos utilizar las ecuaciones cinemáticas de los capítulos 2 y 3 para determinar la posición de la partícula y la velocidad en función del tiempo.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Escribir la ecuación general del vector posición $\vec{r}$ en función del tiempo t para una aceleración constante $\vec{a}$ en función de $\vec{r}_0$, $\vec{v}_0$, y $\vec{a}$, sustituyendo $\vec{r}_0 = \vec{v}_0 = 0$:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\vec{a}t^2 = 0 + 0 + \tfrac{1}{2}\vec{a}t^2 = \tfrac{1}{2}\vec{a}t^2$$

2. Utilizar $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ para expresar la aceleración $\vec{a}$ en función de la fuerza resultante $\Sigma\vec{F}$ y la masa m:

$$\vec{a} = \frac{\Sigma\vec{F}}{m}$$

3. Calcular $\Sigma\vec{F}$ a partir de las fuerzas dadas:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (-2{,}00\,\text{N}\,\hat{i} - 4{,}00\,\text{N}\,\hat{j}) + (-2{,}60\,\text{N}\,\hat{i} + 5{,}00\,\text{N}\,\hat{j}) = -4{,}60\,\text{N}\,\hat{i} + 1{,}00\,\text{N}\,\hat{j}$$

4. Determinar el vector aceleración $\vec{a}$:

$$\vec{a} = \frac{\Sigma\vec{F}}{m} = -11{,}5\ \text{m/s}^2\,\hat{i} + 2{,}50\ \text{m/s}^2\,\hat{j}$$

5. Determinar el vector posición $\vec{r}$ para un tiempo cualquiera t:

$$\vec{r} = \tfrac{1}{2}\vec{a}t^2 = \tfrac{1}{2}a_x t^2\hat{i} + \tfrac{1}{2}a_y t^2\hat{j} = (-5{,}75\ \text{m/s}^2\,\hat{i} + 1{,}25\ \text{m/s}^2\,\hat{j})t^2$$

6. Determinar $\vec{r}$ para $t = 1{,}60$ s:

$$\vec{r} = \boxed{-14{,}7\ \text{m}\,\hat{i} + 3{,}20\ \text{m}\,\hat{j}}$$

(*b*) Escribir el vector velocidad $\vec{v}$ en función de la aceleración y el tiempo y calcular sus componentes para $t = 1{,}6$ s.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2(-5{,}75\ \text{m/s}^2\,\hat{i} + 1{,}25\ \text{m/s}^2\,\hat{j})t$$

$$\vec{v}(1{,}6\ \text{s}) = \boxed{-18{,}4\ \text{m/s}\,\hat{i} + 4{,}00\ \text{m/s}\,\hat{j}}$$

COMPROBACIÓN Los vectores posición, velocidad y aceleración tienen todos las componentes x negativas y las componentes y positivas. Esto era previsible al tratarse de un movimiento que parte del reposo desde el origen con aceleración constante.

4.4 FUERZA DEBIDA A LA GRAVEDAD: EL PESO

Si dejamos caer un objeto cerca de la superficie terrestre, el objeto acelera hacia la Tierra. Si podemos despreciar la resistencia del aire, todos los objetos poseen la misma aceleración, llamada aceleración de la gravedad $\vec{g}$. La fuerza que causa esta aceleración es la **fuerza de la gravedad** ($\vec{F}_g$) ejercida por la Tierra sobre cada objeto. El peso de un objeto es el módulo de la fuerza de la gravedad que actúa sobre él. Si la fuerza de la gravedad es la única fuerza que actúa sobre un objeto, se dice

que éste se encuentra en caída libre. Podemos aplicar la segunda ley de Newton ($\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$) a un cuerpo de masa m que está en caída libre con aceleración $\vec{g}$ para obtener así la siguiente expresión para la fuerza gravitacional $\vec{F}_g$:

$$\vec{F}_g = m\vec{g} \qquad 4.4$$

PESO

Como $\vec{g}$ es idéntico para todos los cuerpos, llegamos a la conclusión de que el peso de un cuerpo es proporcional a su masa cerca de la Tierra. El vector $\vec{g}$ se denomina **campo gravitatorio** terrestre y es la fuerza por unidad de masa ejercida por la Tierra sobre cualquier objeto. Es igual a la aceleración en caída libre experimentada por un objeto. Cerca de la superficie terrestre $\vec{g}$ tiene el valor

$$g = 9{,}81\,\text{N/kg} = 9{,}81\,\text{m/s}^2 \qquad 4.5$$

Cuando trabajamos con el sistema de unidades americano, reemplazamos F_g/g por la masa m, donde F_g es el módulo de la fuerza de la gravedad en libras y g el módulo de la aceleración de la gravedad en pies por segundo al cuadrado. Dado que $9{,}81\ m = 32{,}2$ ft

$$g = 32{,}2\,\text{ft/s}^2 \qquad 4.6$$

Medidas cuidadosas muestran que cerca de la Tierra $\vec{g}$ varía con el lugar. En particular, en un punto por encima de la superficie terrestre, $\vec{g}$ apunta hacia el centro de la Tierra y varía en razón inversa con el cuadrado de la distancia a dicho centro. Así pues, un cuerpo pesa ligeramente menos cuando se encuentra en lugares muy elevados respecto al nivel del mar. El campo gravitatorio también varía ligeramente con la latitud debido a que la Tierra no es exactamente esférica, sino que está achatada en los polos. Por lo tanto, el peso, a diferencia de la masa no es una propiedad intrínseca del cuerpo. Aunque el peso de un cuerpo varía de un lugar a otro debido a las variaciones de g, esta variación es demasiado pequeña para ser apreciada en la mayor parte de las aplicaciones prácticas sobre la superficie terrestre o cerca de ella.

! El peso no es una propiedad intrínseca de los cuerpos.

Un ejemplo puede clarificar la diferencia entre masa y peso. Supongamos que en la Luna tenemos una bola pesada, como la de jugar a los bolos. Su peso es la fuerza gravitatoria que ejerce la Luna sobre ella, pero esta fuerza es sólo una sexta parte de la fuerza que se ejerce sobre la bola cuando está en la Tierra. En la Luna la bola pesa sólo una sexta parte de lo que pesa en la Tierra, por lo que para levantar la bola en ella se necesita una sexta parte de la fuerza. Sin embargo, lanzar la bola con cierta velocidad horizontal requiere la misma fuerza en la Luna que en la Tierra.

Aunque el peso de un objeto puede variar de un lugar a otro, en cualquier lugar su peso es proporcional a su masa. Así pues, podemos comparar fácilmente las masas de dos objetos en un lugar determinado comparando sus pesos.

La sensación que tenemos de la fuerza de la gravedad procede de las demás fuerzas que la equilibran. Por ejemplo, al estar sentados en una silla, apreciamos la fuerza ejercida por ella que equilibra nuestro peso y que, por tanto, evita que nos caigamos al suelo. Cuando estamos situados sobre una balanza de muelles, nuestros pies aprecian la fuerza ejercida sobre nosotros por la balanza. Esta balanza está calibrada de modo que registra la fuerza que debe ejercer (por compresión de su muelle) para equilibrar nuestro peso. La fuerza que equilibra nuestro peso se denomina **peso aparente**. Este peso aparente es el que viene dado por una balanza de muelle. Si no existiese ninguna fuerza para equilibrar nuestro peso, como sucede en la caída libre, el peso aparente sería cero. Esta condición, denominada **ingravidez**, es la que experimentan los astronautas en los satélites que giran alrededor de la Tierra. La única fuerza que actúa sobre el satélite es la gravedad (su peso). El astronauta está también en caída libre. La única fuerza que actúa sobre él es su peso, que produce la aceleración $\vec{g}$. Como no existe ninguna fuerza que equilibre la fuerza de la gravedad, el peso aparente del astronauta es cero.

que éste se encuentra en caída libre. Podemos aplicar la segunda ley de Newton ($\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$) a un cuerpo de masa m que está en caída libre con aceleración $\vec{g}$ para obtener así la siguiente expresión para la fuerza gravitacional $\vec{F}_g$:

$$\vec{F}_g = m\vec{g} \qquad 4.4$$

PESO

Como $\vec{g}$ es idéntico para todos los cuerpos, llegamos a la conclusión de que el peso de un cuerpo es proporcional a su masa cerca de la Tierra. El vector $\vec{g}$ se denomina **campo gravitatorio** terrestre y es la fuerza por unidad de masa ejercida por la Tierra sobre cualquier objeto. Es igual a la aceleración en caída libre experimentada por un objeto. Cerca de la superficie terrestre $\vec{g}$ tiene el valor

$$g = 9{,}81\,\text{N/kg} = 9{,}81\,\text{m/s}^2 \qquad 4.5$$

Cuando trabajamos con el sistema de unidades americano, reemplazamos F_g/g por la masa m, donde F_g es el módulo de la fuerza de la gravedad en libras y g el módulo de la aceleración de la gravedad en pies por segundo al cuadrado. Dado que $9{,}81\ m = 32{,}2$ ft

$$g = 32{,}2\,\text{ft/s}^2 \qquad 4.6$$

Medidas cuidadosas muestran que cerca de la Tierra $\vec{g}$ varía con el lugar. En particular, en un punto por encima de la superficie terrestre, $\vec{g}$ apunta hacia el centro de la Tierra y varía en razón inversa con el cuadrado de la distancia a dicho centro. Así pues, un cuerpo pesa ligeramente menos cuando se encuentra en lugares muy elevados respecto al nivel del mar. El campo gravitatorio también varía ligeramente con la latitud debido a que la Tierra no es exactamente esférica, sino que está achatada en los polos. Por lo tanto, el peso, a diferencia de la masa no es una propiedad intrínseca del cuerpo. Aunque el peso de un cuerpo varía de un lugar a otro debido a las variaciones de g, esta variación es demasiado pequeña para ser apreciada en la mayor parte de las aplicaciones prácticas sobre la superficie terrestre o cerca de ella.

! El peso no es una propiedad intrínseca de los cuerpos.

Un ejemplo puede clarificar la diferencia entre masa y peso. Supongamos que en la Luna tenemos una bola pesada, como la de jugar a los bolos. Su peso es la fuerza gravitatoria que ejerce la Luna sobre ella, pero esta fuerza es sólo una sexta parte de la fuerza que se ejerce sobre la bola cuando está en la Tierra. En la Luna la bola pesa sólo una sexta parte de lo que pesa en la Tierra, por lo que para levantar la bola en ella se necesita una sexta parte de la fuerza. Sin embargo, lanzar la bola con cierta velocidad horizontal requiere la misma fuerza en la Luna que en la Tierra.

Aunque el peso de un objeto puede variar de un lugar a otro, en cualquier lugar su peso es proporcional a su masa. Así pues, podemos comparar fácilmente las masas de dos objetos en un lugar determinado comparando sus pesos.

La sensación que tenemos de la fuerza de la gravedad procede de las demás fuerzas que la equilibran. Por ejemplo, al estar sentados en una silla, apreciamos la fuerza ejercida por ella que equilibra nuestro peso y que, por tanto, evita que nos caigamos al suelo. Cuando estamos situados sobre una balanza de muelles, nuestros pies aprecian la fuerza ejercida sobre nosotros por la balanza. Esta balanza está calibrada de modo que registra la fuerza que debe ejercer (por compresión de su muelle) para equilibrar nuestro peso. La fuerza que equilibra nuestro peso se denomina **peso aparente**. Este peso aparente es el que viene dado por una balanza de muelle. Si no existiese ninguna fuerza para equilibrar nuestro peso, como sucede en la caída libre, el peso aparente sería cero. Esta condición, denominada **ingravidez**, es la que experimentan los astronautas en los satélites que giran alrededor de la Tierra. La única fuerza que actúa sobre el satélite es la gravedad (su peso). El astronauta está también en caída libre. La única fuerza que actúa sobre él es su peso, que produce la aceleración $\vec{g}$. Como no existe ninguna fuerza que equilibre la fuerza de la gravedad, el peso aparente del astronauta es cero.

Ejemplo 4.4 Una estudiante acelerada

La fuerza neta que actúa sobre una estudiante de 130 lb es 25 lb fuerza. ¿Cuál es su aceleración?

PLANTEAMIENTO Aplicar la segunda ley de Newton y despejar la aceleración. La masa puede determinarse a partir del peso de la estudiante.

SOLUCIÓN

De acuerdo con la segunda ley de Newton, su aceleración es la fuerza dividida por su masa:

$$a = \frac{F_{\text{neta}}}{m} = \frac{F_{\text{neta}}}{F_g/g} = \frac{25{,}0 \text{ lb}}{(130 \text{ lb})/(32{,}2 \text{ ft/s}^2)} = \boxed{6{,}19 \text{ ft/s}^2}$$

COMPROBACIÓN La fuerza es ligeramente inferior a una quinta parte de su peso. Así, uno puede esperar que la aceleración fuese inferior a la quinta parte de g. $(32{,}2 \text{ ft/s}^2)/5 = 6{,}44 \text{ ft/s}^2$, y $6{,}19 \text{ ft/s}^2$ es ligeramente inferior a $6{,}44 \text{ ft/s}^2$, por lo que el resultado es plausible.

OBSERVACIÓN La ecuación de la solución puede reescribirse como

$$m = \frac{F_{\text{neta}}}{a} = \frac{F_g}{g}$$

Lo que demuestra que puede encontrarse la aceleración de la estudiante sin necesidad de calcular previamente su masa. Para cualquier cuerpo, el cociente entre F_{neta} y a es igual al cociente entre F_g y g.

PROBLEMA PRÁCTICO 4.2 ¿Qué fuerza es necesaria para suministrar una aceleración de 3 ft/s^2 a un bloque de 5 lb?

4.5 FUERZAS DE CONTACTO: SÓLIDOS, MUELLES Y CUERDAS

La mayor parte de las fuerzas ordinarias que observamos sobre los objetos se ejercen por contacto directo entre ellos. En esta sección examinaremos algunas de las más comunes.

SÓLIDOS

Si empujamos una superficie, ésta devuelve el empuje. Consideremos una escalera que se apoya contra una pared (figura 4.7). En la región de contacto, la escalera empuja la pared con una fuerza horizontal, comprimiendo la distancia entre las moléculas de la superficie de la pared. Como los muelles de un colchón, las moléculas comprimidas de la pared empujan la escalera con una fuerza horizontal. Tal fuerza, perpendicular a las superficies en contacto, se denomina **fuerza normal** (en este caso, normal significa perpendicular). La superficie soporte se deforma ligeramente en respuesta a la carga, si bien esta deformación se aprecia difícilmente a simple vista.

Las fuerzas normales pueden variar dentro de un amplio intervalo de valores. Una mesa horizontal, por ejemplo, ejerce una fuerza normal dirigida hacia arriba sobre cualquier bloque que esté colocado sobre ella. A menos que el bloque sea tan pesado que la mesa se rompa, esta fuerza normal equilibrará la fuerza del peso del bloque. Además, si presionamos el bloque hacia abajo, la mesa ejercerá una fuerza soporte cuyo módulo será mayor que el peso del bloque para evitar que acelere hacia abajo.

En ciertas circunstancias, los cuerpos en contacto ejercerán fuerzas entre sí que son paralelas a las superficies en contacto. Consideremos el bloque de la figura 4.8. Si se le empuja suavemente de lado no resbalará, ya que la fuerza ejercida por el suelo se opone a que el bloque se deslice. Si, en cambio, se empuja fuertemente, el bloque empezará a moverse en la dirección de la fuerza. Para mantener el movimiento, es necesario ejercer continuamente una fuerza. A partir del instante en que se deja de empujar el bloque ralentiza su movimiento hasta que se para. La componente para-

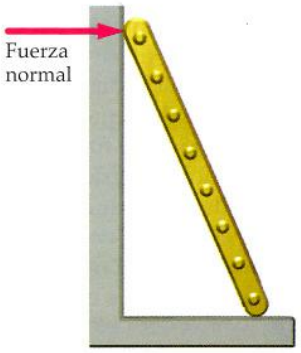


FIGURA 4.7 La pared sostiene la escalera ejerciendo sobre ella una fuerza normal a la pared.

FIGURA 4.8 La fuerza de rozamiento ejercida por el suelo sobre el bloque se opone a su desplazamiento o a su tendencia a deslizarse.

lela de la fuerza de contacto ejercida por un cuerpo sobre otro se llama **fuerza de rozamiento**. (Las fuerzas de rozamiento se tratan con más detalle en el capítulo 5.)

Un contenedor (figura 4.9*a*) descansa sobre un plano inclinado. La fuerza de la gravedad empuja al contenedor hacia abajo. En consecuencia, el plano ejerce una fuerza $\vec{F}$ de igual módulo sobre el contenedor a fin de impedir su movimiento (figura 4.9*b*). La fuerza $\vec{F}$ es la fuerza de contacto del plano sobre el contenedor. Una fuerza de contacto como ésta puede interpretarse como dos fuerzas distintas, una llamada fuerza normal $\vec{F}_n$, dirigida en dirección perpendicular a la superficie del plano, y otra llamada fuerza de rozamiento $\vec{f}$, que es paralela a la superficie del plano. La fuerza de rozamiento se opone a cualquier tendencia que tenga el contenedor a deslizarse.

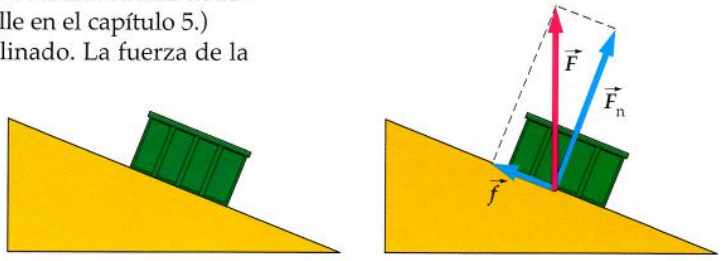


FIGURA 4.9 (*a*) Un contenedor descansa sobre un plano inclinado. (*b*) La fuerza de contacto del plano sobre el contenedor se representa o bien por la fuerza $\vec{F}$, o bien como superposición entre la fuerza normal $\vec{F}_n$ y la de fricción $\vec{f}$.

MUELLES

Cuando un muelle se comprime o se alarga una pequeña cantidad x, la fuerza que ejerce, según se demuestra experimentalmente, es

$$F_x = -kx \qquad 4.7$$

LEY DE HOOKE

donde k es la constante de fuerza, constante elástica o también llamada **constante recuperadora**, una medida de la rigidez del muelle (figura 4.10). Un valor negativo de x significa que el muelle ha sido comprimido una distancia $|x|$ desde su posición de equilibrio. El signo negativo en la ecuación 4.7 significa que la fuerza que ejerce el muelle que se estira o comprime adopta la dirección opuesta. Esta ecuación, conocida como **ley de Hooke**, es de gran interés. Un objeto en reposo bajo la influencia de fuerzas que se equilibran, se dice que está en *equilibrio estático*. Si un pequeño desplazamiento da lugar a una fuerza de restitución neta hacia la posición de equilibrio, se dice que el *equilibrio es estable*. Para pequeños desplazamientos, casi todas las fuerzas de restitución obedecen la ley de Hooke.

La fuerza molecular de atracción entre los átomos de una molécula o un sólido varía de modo muy parecido al de un muelle. Por ello, es frecuente representar el modelo de una molécula diatómica por dos masas conectadas por un muelle y el modelo de un sólido mediante una serie de masas conectadas por muelles como se muestra en la figura 4.11.

FIGURA 4.11 (*a*) Modelo de un sólido formado por átomos conectados entre sí por muelles elásticos. Los muelles son muy rígidos (constante de fuerza grande), de modo que cuando un peso actúa sobre el sólido, su deformación no es visible. Sin embargo, la compresión producida por la mordaza sobre un bloque de plástico en (*b*), da lugar a procesos elásticos que se hacen visibles mediante luz polarizada. *((b) Fundamental Photographs.)*

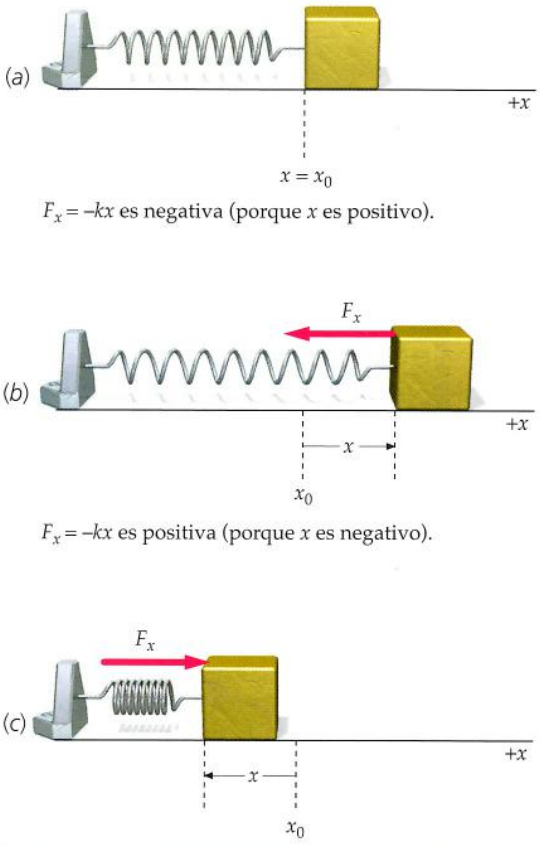


FIGURA 4.10 Muelle horizontal. (*a*) Cuando el muelle no está tenso, no ejerce ninguna fuerza sobre el bloque. (*b*) Cuando el muelle se estira, de modo que x es positivo, ejerce una fuerza de magnitud $k\,x$ en el sentido negativo de x. (*c*) Cuando el muelle se comprime, de modo que x es negativo, el muelle ejerce una fuerza de magnitud $k|x|$ en sentido positivo.

Ejemplo 4.5 El mate

Un jugador de baloncesto de 110 kg se cuelga del aro del cesto después de un mate espectacular (figura 4.12). Antes de dejarse caer, se queda colgando en reposo, con el anillo doblado hacia abajo una distancia de 15 cm. Suponiendo que el aro se comporta como un muelle elástico, calcular su constante de fuerza k.

PLANTEAMIENTO Como la aceleración del jugador es cero, la fuerza neta ejercida sobre él es nula. La fuerza hacia arriba ejercida por el aro equilibra su peso (figura 4.12). Sea $y = 0$ la posición original del aro, considerando y positiva hacia abajo. Por lo tanto, el desplazamiento del aro y_e es positivo, el peso $F_{gy} = mg$ es positivo y la fuerza ejercida por el aro $-ky_e$ es negativa.

SOLUCIÓN

1. Aplicar $\Sigma F_y = m\vec{a}_y$ al jugador. La aceleración del jugador es cero:
$$\Sigma F_y = ma_y$$
$$F_{gy} + F_y = 0$$

2. Utilizar la ley de Hooke (ecuación 4.7) para encontrar F_y:
$$F_y = -ky_e$$

3. Sustituir las expresiones y valores para las componentes de las fuerzas del paso 1 y despejar k:
$$F_{gy} + F_y = 0$$
$$mg + (-ky_e) = 0$$
$$k = \frac{mg}{y_e} = \frac{(110\text{ kg})(9{,}8\text{ N/kg})}{0{,}15\text{ m}}$$
$$= \boxed{7{,}2 \times 10^3\text{ N/m}}$$

COMPROBACIÓN El peso de un cuerpo en newtons es casi diez veces mayor que la masa del cuerpo en kilogramos. Así, el peso del jugador es mayor que 1000 N. Una flexión del aro de 0,1 m correspondería a una k de 10 000 N/m, por lo que parece correcto que k tenga un valor de 7200 N/m para una flexión de 0,15 m.

OBSERVACIÓN Aunque el aro del cesto no se parece mucho a un muelle, el aro está colgado por una bisagra con un muelle que se deforma cuando el aro se inclina. Como resultado, la fuerza hacia arriba que hace el aro sobre las manos del jugador es proporcional a la inclinación del aro y en sentido opuesto. Obsérvese que hemos utilizado para g las unidades N/kg, de modo que kg se cancela, y obtenemos para k las unidades N/m. Para g siempre puede usarse, a nuestra conveniencia, 9,81 N/kg o 9,81 m/s^2, ya que 1 N/kg = 1 m/s^2.

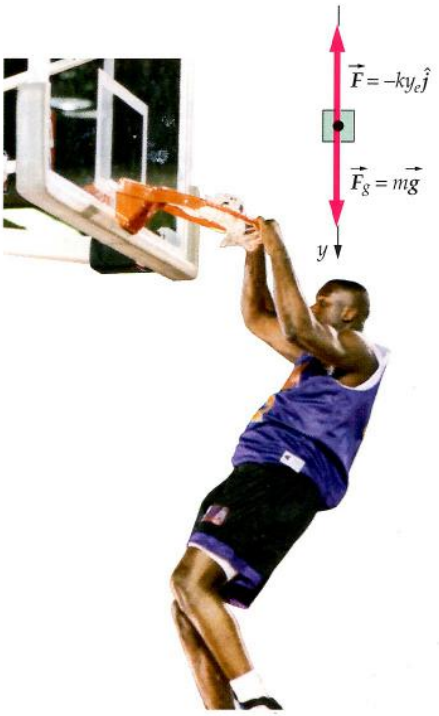


FIGURA 4.12 *(AFP-Getty Images.)*

PROBLEMA PRÁCTICO 4.3 Un racimo de plátanos de 4 kg está suspendido en reposo de una balanza de muelle, cuya constante de fuerza es $k = 300$ N/m. ¿Cuánto se ha estirado el muelle?

PROBLEMA PRÁCTICO 4.4 Un muelle, de constante de fuerza 400 N/m, está conectado a un bloque de 3 kg que descansa sobre una pista de aire horizontal, de modo que el rozamiento es despreciable. ¿Qué alargamiento debe experimentar el muelle para que al liberar el bloque éste posea una aceleración de 4 m/s^2?

PROBLEMA PRÁCTICO 4.5 Un objeto de masa m oscila en el extremo de un muelle de constante de fuerza k. El tiempo correspondiente a una oscilación completa es el periodo T. Suponiendo que T depende de m y k, utilizar el análisis dimensional para determinar la forma de la relación $T = f(m, k)$, prescindiendo de las constantes numéricas. El método más simple es considerar las unidades. Obsérvese que las unidades de k son N/m = (kg · m/s^2)/m = kg/s^2 y las unidades de m son kg.

CUERDAS

Un cuerpo se puede arrastrar y mover mediante una cuerda. Se puede suponer que una cuerda es como un muelle pero con una constante de fuerza muy grande, de forma que la deformación que adquiere al aplicar una fuerza es despreciable. Las cuerdas, sin embargo, no son rígidas, ya que que se flexionan y se tuercen y, por lo tanto, no pueden usarse para empujar objetos como lo hacen los muelles sino que úni-

camente pueden tirar de ellos. La magnitud de la fuerza que un trozo de una cuerda ejerce sobre otro adyacente se denomina **tensión**, T. Por lo tanto, si se tira de un objeto con una cuerda, la magnitud de la fuerza coincide con la tensión. En la sección 4.8 se desarrolla con más detalle el concepto de tensión en una cuerda o en una cadena.

4.6 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE

Imaginemos un trineo tirado por un perro que avanza por un terreno helado. El perro tira de una cuerda ligada al trineo (figura 4.13*a*) con una fuerza horizontal que hace que éste gane velocidad. Podemos pensar en el trineo y la cuerda como un único cuerpo. ¿Qué fuerzas actúan sobre el cuerpo trineo-cuerda? Tanto el perro como el hielo tocan el cuerpo, de modo que ambos ejercen fuerzas sobre él. También sabemos que la Tierra ejerce una fuerza gravitatoria sobre el trineo y la cuerda (el peso del cuerpo). Resumiendo, estas tres fuerzas actúan sobre el cuerpo (suponiendo el rozamiento despreciable):

1. El peso del cuerpo trineo-cuerda $\vec{F}_g$.
2. La fuerza de contacto $\vec{F}_n$ ejercida por el hielo (sin rozamiento, esta fuerza es perpendicular al hielo).
3. La fuerza de contacto $\vec{F}$ ejercida por el perro.

Un diagrama que muestra esquemáticamente todas las fuerzas que actúan sobre un sistema, tal como el de la figura 4.13*b*, se denomina diagrama de fuerzas. Se denomina **diagrama de cuerpo libre** porque el objeto (el cuerpo) se dibuja sin su entorno.

Para dibujar a escala los vectores fuerza en un diagrama de fuerzas de sistema aislado es necesario determinar primero, usando métodos cinemáticos, la dirección del vector aceleración. Sabemos que el objeto se mueve hacia la derecha con velocidad creciente y, por lo tanto, que el vector aceleración va en la dirección de su movimiento, hacia la derecha. Obsérvese que $\vec{F}_n$ y $\vec{F}_g$ en el diagrama tienen magnitudes iguales. Los módulos deben ser iguales, ya que el trineo no acelera verticalmente. Como prueba de la corrección del diagrama del sistema aislado que hemos realizado, dibujamos el diagrama de la adición vectorial (figura 4.14) verificando que la suma de los vectores fuerza coincide con la dirección del vector aceleración.

Ahora podemos aplicar la segunda ley de Newton para determinar las componentes x e y de la fuerza neta sobre la partícula trineo-cuerda. La componente x de la segunda ley de Newton da

$$\Sigma F_x = F_{nx} + F_{gx} + F_x = ma_x$$
$$0 + 0 + F = ma_x$$

o

$$a_x = \frac{F}{m}$$

La componente y de la segunda ley de Newton expresa:

$$\Sigma F_y = F_{ny} + F_{gy} + F_y = ma_y$$
$$F_n - F_g + 0 = 0$$

o sea,

$$F_n = F_g$$

En este simple ejemplo hemos determinado dos magnitudes: la aceleración horizontal F/m, y la fuerza vertical $\vec{F}_n$ ejercida por el hielo $F_n = F_g = mg$.

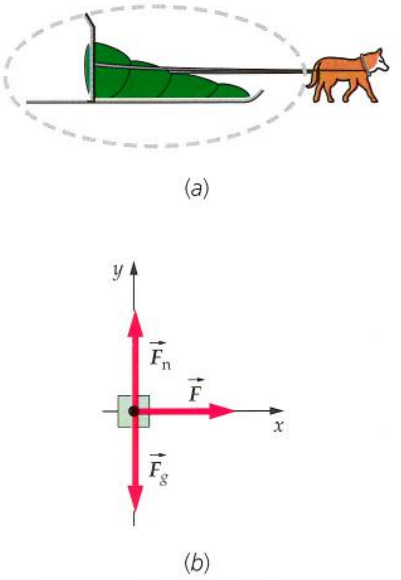


FIGURA 4.13 (*a*) Un perro tira de un trineo. El primer paso para resolver este problema es aislar el sistema que deseamos analizar. En este caso, la curva cerrada de puntos aísla el cuerpo trineo-cuerda de sus alrededores. (*b*) Las fuerzas que actúan sobre el trineo del dibujo (*a*).

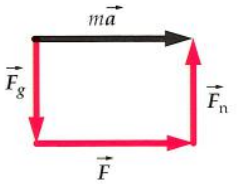


FIGURA 4.14 El vector suma de fuerzas del diagrama de fuerzas de un sistema aislado es igual a la masa por el vector aceleración.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Aplicación de la segunda ley de Newton

PLANTEAMIENTO Asegurarse de que se identifican todas las fuerzas que actúan sobre la partícula. Luego, determinar la dirección del vector aceleración de la partícula, si es posible. Saber esta dirección será útil para elegir el sistema de referencia más adecuado para resolver el problema.

SOLUCIÓN

1. Dibujar un diagrama claro que incluya las principales características del problema.
2. Aislar el cuerpo (partícula) de interés e identificar cada una de las fuerzas que actúan sobre él.
3. Dibujar el diagrama de fuerzas.
4. Elegir un sistema de coordenadas adecuado. Si se conoce la dirección de la aceleración escoger unos de los ejes que sea paralelo a ella. Para cuerpos que se deslizan sobre superficies, elegir los ejes de forma que uno sea paralelo y el otro perpendicular a la superficie.
5. Aplicar la segunda ley de Newton, $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$, en forma de componentes.
6. Despejar las incógnitas de las ecuaciones resultantes.

COMPROBACIÓN Comprobar si los resultados tienen las unidades correctas y parecen razonables. Sustituir valores extremos en la solución es un buen sistema para comprobar si se han cometido errores.

Ejemplo 4.6 Una carrera de trineos

Durante las vacaciones de invierno, un joven participa en una carrera de trineos donde los estudiantes sustituyen a los perros. El joven comienza la carrera tirando de una cuerda atada al trineo con una fuerza de 150 N que forma un ángulo de 25° con la horizontal. La masa del cuerpo trineo-cuerda-pasajero es de 80 kg y el rozamiento entre el trineo y el hielo es despreciable. Determinar: (*a*) la aceleración del trineo y (*b*) la fuerza normal ejercida por la superficie sobre el trineo.

PLANTEAMIENTO Tres fuerzas actúan sobre el cuerpo: su peso $\vec{F}_g$, que actúa hacia abajo; la fuerza normal $\vec{F}_n$, que actúa hacia arriba; y la fuerza con que el joven tira de la cuerda $\vec{F}$, en dirección 25° sobre la horizontal. Como las fuerzas no coinciden en la misma línea de dirección, estudiaremos el sistema aplicando la segunda ley de Newton a las direcciones x e y por separado.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Dibujamos un diagrama de fuerzas (figura 4.15*b*) del trineo. Incluye un sistema de coordenadas en el cual uno de los ejes de coordenadas apunta en la dirección de la aceleración del trineo. El objeto se mueve hacia la derecha con velocidad creciente, por lo que sabemos que la aceleración va en esa dirección:

2. *Nota:* se añaden los vectores fuerza en el diagrama (figura 4.16) para verificar que su suma va en la dirección de la aceleración:

3. Se aplica la segunda ley de Newton al objeto. Se escribe la ecuación tanto en forma vectorial como en sus componentes:

$$\vec{F}_n + \vec{F}_g + \vec{F} = m\vec{a} \quad \text{o}$$
$$F_{nx} + F_{gx} + F_x = ma_x$$
$$F_{ny} + F_{gy} + F_y = ma_y$$

4. Se escriben las componentes x de $\vec{F}_n$, $\vec{F}_g$, y $\vec{F}$:

$$F_{nx} = 0, \quad F_{gx} = 0, \quad \text{y} \quad F_x = F\cos\theta$$

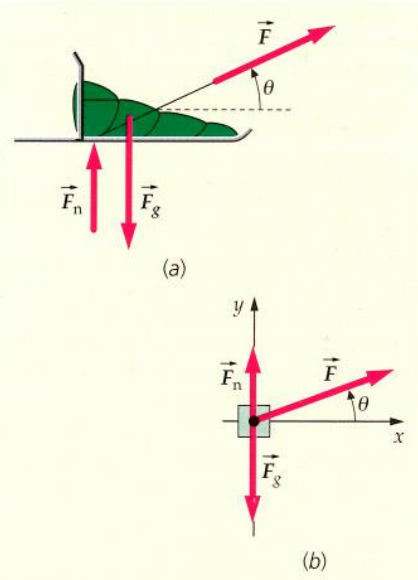


FIGURA 4.15

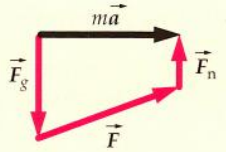


FIGURA 4.16 El vector suma de fuerzas del diagrama de fuerzas de un sistema aislado es igual a la masa por el vector aceleración.

5. Se sustituyen los resultados del paso 4 en la ecuación para la componente x del paso 3. Se despeja la aceleración a_x:

$$\Sigma \vec{F}_x = 0 + 0 + F\cos\theta = ma_x \quad \text{por lo tanto}$$
$$a_x = \frac{F\cos\theta}{m} = \frac{(150\text{ N})\cos 25°}{80\text{ kg}} = \boxed{1{,}7\text{ m/s}^2}$$

(b) 1. Se expresa la componente y de $\vec{a}$:

$$a_y = 0$$

2. Se escriben las componentes y de $\vec{F}_n$, $\vec{F}_g$, y $\vec{F}$:

$$F_{ny} = F_n, \quad F_{gy} = -mg, \quad \text{y} \quad F_y = F\,\text{sen}\,\theta$$

3. Se sustituyen los resultados de los pasos $b1$ y $b2$ en la ecuación para la componente y del paso a_3. Se despeja F_n:

$$\Sigma F_y = F_n - mg + F\,\text{sen}\,\theta = 0$$
$$F_n = mg - F\,\text{sen}\,\theta$$
$$= (80\text{ kg})(9{,}81\text{ N/kg}) - (150\text{ N})\,\text{sen}\,25° = \boxed{7{,}2 \times 10^2\text{ N}}$$

COMPROBACIÓN Sólo la componente x de $\vec{F}$, $F\cos\theta$, es la causa de la aceleración del cuerpo. Obsérvese también que el hielo soporta un peso inferior al peso total del cuerpo, pues la componente F sen θ es soportada por la cuerda.

PROBLEMA PRÁCTICO 4.6 Si $\theta = 25°$, ¿cuál es la mayor fuerza F que puede aplicarse a la cuerda sin levantar el trineo de la superficie?

Ejemplo 4.7 Descarga de un camión

Póngalo en su contexto

Suponga que trabaja para una gran compañía de transporte y que debe descargar de un camión una caja enorme y frágil usando una rampa como la que se muestra en la figura 4.17. Si la velocidad vertical con que llega la caja al final de la rampa es superior a 2,5 m/s (la velocidad que adquiere un objeto si cae desde una altura de 30,5 cm), su carga se daña. ¿Cuál es el mayor ángulo posible al que se puede instalar la rampa para conseguir una descarga segura? La rampa debe superar un metro de altura, está formada por rodillos (se puede suponer que no ejerce rozamiento) y está inclinada con la horizontal un ángulo θ.

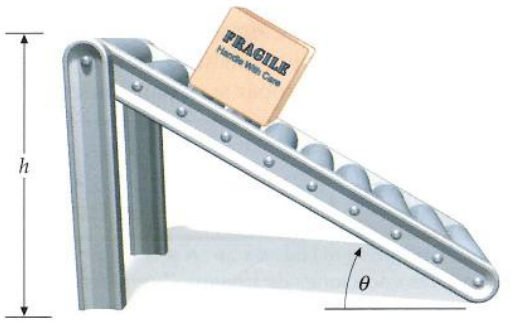


FIGURA 4.17

PLANTEAMIENTO Sobre la caja actúan dos fuerzas, la fuerza de la gravedad $\vec{F}_g$ y la fuerza normal $\vec{F}_n$. Como estas fuerzas no son paralelas no pueden sumar cero, con lo cual, hay una fuerza resultante sobre el objeto que lo acelera. La rampa hace que la caja se mueva paralela a su superficie, por lo que elegimos la dirección de la pendiente de la rampa como la dirección x. Para determinar la aceleración, aplicamos la segunda ley de Newton a la caja. Cuando sepamos el valor de la aceleración, podremos usar un cálculo cinemático para determinar el mayor ángulo de la pendiente para lograr una descarga segura.

SOLUCIÓN

1. Dibujamos el diagrama de la figura 4.18 donde vemos que actúan dos fuerzas, el peso y la normal. Elegimos la dirección de la aceleración, en la dirección de la rampa hacia abajo, como dirección $+x$: *Nota*: como se ve en el diagrama, el ángulo entre $\vec{F}_g$ y el sentido negativo del eje y es el mismo que el ángulo entre la pendiente de la rampa y la horizontal. También se puede ver que $F_{gx} = F_g$ sen θ.

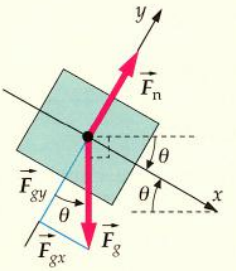


FIGURA 4.18

2. Para determinar a_x aplicamos a la caja la segunda ley de Newton ($\Sigma F_x = ma_x$). (*Nota:* $\vec{F}_n$ es perpendicular al eje x y $F_g = mg$):

$$F_{nx} + F_{gx} = ma_x \quad \text{donde}$$
$$F_{nx} = 0 \quad \text{y} \quad F_{gx} = F_g\,\text{sen}\,\theta = mg\,\text{sen}\,\theta$$

3. Se sustituye y despeja la aceleración, obteniendo:

$$0 + mg\,\text{sen}\,\theta = ma_x \quad \text{por lo que} \quad a_x = g\,\text{sen}\,\theta$$

4. Se establece una relación entre la componente vertical de la velocidad de la caja y la velocidad v_x a lo largo de la rampa:

$$v_v = v_x\,\text{sen}\,\theta$$

5. La velocidad v está relacionada con el desplazamiento Δx a lo largo de la rampa mediante la ecuación cinemática siguiente:

$$v_x^2 = v_{0,x}^2 + 2a_x\,\Delta x$$

6. Se sustituye a_x en la ecuación cinemática (paso 2), haciendo $v_0 = 0$, con lo cual:

$$v_x^2 = 2g\,\text{sen}\,\theta\,\Delta x$$

7. De la figura 4.17 se ve que cuando Δx es la longitud de la rampa, $\Delta x \operatorname{sen}\theta = h$, donde h es la altura de la rampa: $v_x^2 = 2gh$
8. Mediante el uso de $v_y = v \operatorname{sen}\theta$, se obtiene para v_y: $v_y = \sqrt{2gh}\,\operatorname{sen}\theta$
9. Se despeja el ángulo máximo y se obtiene: $2{,}50\ \text{m/s} = \sqrt{2(9{,}81\ \text{m/s}^2)(1{,}00\ \text{m})}\,\operatorname{sen}\theta_{\text{máx}}$
$\therefore\ \theta_{\text{máx}} = \boxed{34{,}4°}$

COMPROBACIÓN Con un ángulo de 34,4° la componente vertical hacia abajo de la velocidad será ligeramente mayor que la mitad de la velocidad que la caja tendría si fuese dejada caer desde una altura de 1 m.

OBSERVACIÓN La aceleración por la rampa hacia abajo es constante e igual a $g \operatorname{sen}\theta$. Asimismo, la velocidad v al final de la rampa no depende del ángulo θ.

PROBLEMA PRÁCTICO 4.7 Aplicar $\Sigma F_y = ma_y$ a la caja y demostrar que $F_n = mg\cos\theta$.

Ejemplo 4.8 Colgando un cuadro — *Inténtelo usted mismo*

Un cuadro que pesa 8 N se cuelga mediante dos cables que ejercen tensiones T_1 y T_2, tal como indica la figura 4.19. Determinar la tensión de los dos cables.

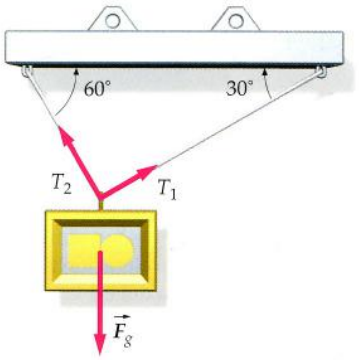


FIGURA 4.19

PLANTEAMIENTO Como el cuadro no posee aceleración, la fuerza neta que actúa sobre él debe ser nula. Las tres fuerzas que actúan sobre el cuadro, su peso $\vec{F}_g$, la tensión $\vec{T}_1$ y la tensión $\vec{T}_2$ deben dar una resultante nula.

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos:	Respuestas
1. Dibujar un diagrama de fuerzas para el cuadro (figura 4.20). Mostrar en el diagrama las componentes x e y de las tensiones.	
2. Aplicar $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ en forma vectorial al cuadro.	$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{F}_g = m\vec{a}$
3. Descomponer cada fuerza en sus componentes x e y. Así se obtienen dos ecuaciones para las incógnitas T_1 y T_2.	$T_{1x} + T_{2x} + F_{gx} = 0$ $T_1\cos 30° - T_2\cos 60° + 0 = 0$ y $T_{1y} + T_{2y} + F_{gy} = 0$ $T_1 \operatorname{sen} 30° + T_2 \operatorname{sen} 60° - F_g = 0$
4. Resolver la ecuación de la componente x para T_2 en función de T_1.	$T_2 = T_1 \dfrac{\cos 30°}{\cos 60°}$
5. Aplicar el valor de T_2 en la ecuación de la componente y del paso 3 y despejar T_1.	$T_1 \operatorname{sen} 30° + \left(T_1 \dfrac{\cos 30°}{\cos 60°}\right) \operatorname{sen} 60° - F_g = 0$ $T_1 = 0{,}50F_g = \boxed{4{,}0\ \text{N}}$
6. Utilizar el resultado de T_1 para obtener el valor de T_2.	$T_2 = T_1 \dfrac{\cos 30°}{\cos 60°} = \boxed{6{,}9\ \text{N}}$

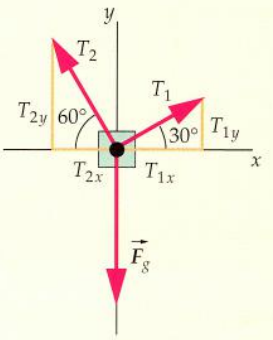


FIGURA 4.20

COMPROBACIÓN El cable más próximo a la vertical es el que soporta la mayor contribución del peso, como era de esperar. También vemos que $T_1 + T_2 > 8\text{N}$. La fuerza "extra" es debida a los cables que tiran a la derecha y a la izquierda.

Ejemplo 4.9 Un avión que acelera

Cuando un avión acelera en la pista del aeropuerto para despegar, un viajero decide determinar su aceleración mediante su yo-yo y comprueba que la cuerda del mismo forma un ángulo de 22° con la vertical (figura 4.21*a*). (*a*) ¿Cuál es la aceleración del avión? (*b*) Si la masa del yo-yo es de 40 g, ¿cuál es la tensión de la cuerda?

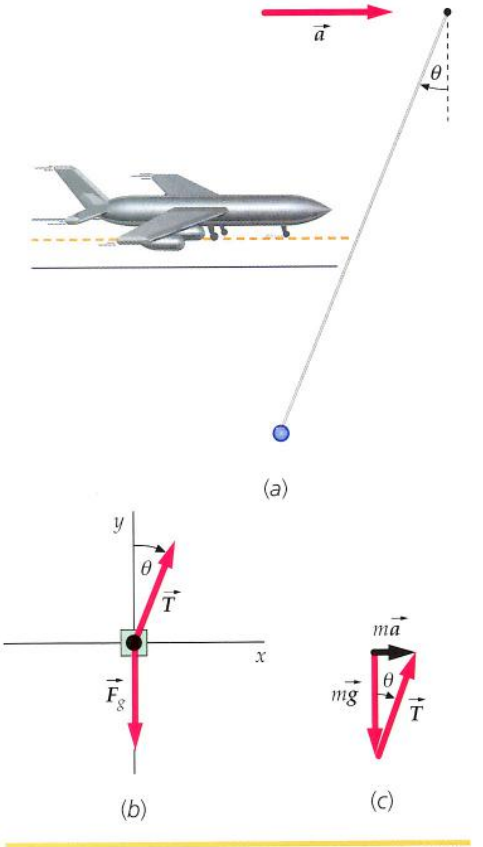


FIGURA 4.21

PLANTEAMIENTO El avión y el yo-yo tienen la misma aceleración hacia la derecha. La fuerza neta del yo-yo va en la misma dirección que su aceleración, hacia la derecha. Esta fuerza viene suministrada por la componente horizontal de la tensión $\vec{T}$. La componente vertical de $\vec{T}$ equilibra el peso del yo-yo. Elegimos un sistema de coordenadas en el cual la dirección x es paralela al vector aceleración $\vec{a}$ y la dirección y es vertical. Expresando la ley de Newton para ambas direcciones x e y, se obtienen dos ecuaciones que nos permiten calcular las dos incógnitas, a y T.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Dibujar un diagrama de fuerzas para el yo-yo (figura 4.21*b*). Elegir la dirección positiva del eje x en la dirección de la aceleración.

2. Aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ según el método de las componentes para el yo-yo:

$$T_x + F_{gx} = ma_x$$
$$T \operatorname{sen}\theta + 0 = ma_x$$
o
$$T \operatorname{sen}\theta = ma_x$$

3. Aplicar $\Sigma F_y = ma_y$ al yo-yo. Mediante la trigonometría y $F_g = mg$, simplificar (figura 4.21). La aceleración apunta en la dirección positiva del eje x; por lo tanto, $a_y = 0$:

$$T_y + F_{gy} = ma_y$$
$$T \cos\theta - mg = 0$$
o
$$T \cos\theta = mg$$

4. Dividir el resultado del paso 2 por el del paso 3 y despejar la aceleración. El vector aceleración señala en la dirección positiva del eje x, con lo que $a = a_x$:

$$\frac{T \operatorname{sen}\theta}{T \cos\theta} = \frac{ma_x}{mg} \quad \text{entonces} \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{a_x}{g} \text{ y}$$
$$a_x = g \operatorname{tg}\theta = (9{,}81 \text{ m/s}^2) \operatorname{tg} 22{,}0° = \boxed{3{,}96 \text{ m/s}^2}$$

(*b*) Despejar la tensión, usando el resultado del paso 3:

$$T = \frac{mg}{\cos\theta} = \frac{(0{,}040\,0 \text{ kg})(9{,}81 \text{ m/s}^2)}{\cos 22{,}0°} = \boxed{0{,}423 \text{ N}}$$

COMPROBACIÓN Para $\theta = 0$, $\cos\theta = 1$ y $\operatorname{tg}\theta = 0$ resulta $T = mg$, y $a_x = 0$.

OBSERVACIÓN T es mayor que el peso del yo-yo ($mg = 0{,}392$ N), ya que la cuerda no sólo evita que caiga el yo-yo, sino que también lo acelera en dirección horizontal. En este caso, utilizaremos para g las unidades m/s², ya que estamos calculando una aceleración.

PROBLEMA PRÁCTICO 4.8 ¿Para qué aceleración a la tensión de la cuerda sería igual a $3\,mg$? ¿Cuánto valdría θ en este caso?

El ejemplo siguiente aplica las leyes de Newton a objetos que están en reposo relativo respecto a un sistema de referencia acelerado.

Ejemplo 4.10 Su peso en un ascensor

Un hombre de 80 kg está de pie sobre una balanza de muelle sujeta al suelo de un ascensor. La balanza está calibrada en newtons. ¿Qué peso indicará la balanza cuando (*a*) el ascensor se mueve con aceleración a hacia arriba, (*b*) el ascensor se mueve con aceleración descendente a', (*c*) el ascensor se mueve hacia arriba a 20 m/s, mientras su velocidad decrece a razón de 8 m/s²?

PLANTEAMIENTO La lectura de la balanza es el módulo de la fuerza normal F_n ejercida por la balanza sobre el hombre (figura 4.22). Como el hombre está en reposo respecto al ascensor, tanto el uno como el otro poseen la misma aceleración. Sobre el hombre actúan dos fuerzas: la fuerza de la gravedad hacia abajo, mg, y la fuerza normal de la balanza, F_n, hacia arriba. La suma de ambas es la causa de la aceleración observada sobre el hombre. Elegiremos como positiva la dirección hacia arriba.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Dibujar un diagrama de fuerzas para el hombre (figura 4.23):

2. Aplica $\Sigma F_y = ma_y$: $F_{ny} + F_{gy} = ma_y$

$F_n - mg = ma_y$

3. Despejar F_n. Esta es la lectura de la balanza (el peso aparente del hombre): $F_n = mg + ma_y = m(g + a_y)$

4. $a_y = +a$: $F_n = \boxed{m(g + a)}$

(*b*) $a_y = -a'$. Sustituimos a_y en el resultado del apartado 3 del paso a: $F_n = m(g + a_y) = \boxed{m(g - a')}$

(*c*) La velocidad es positiva pero decreciente, de manera que la aceleración será negativa. Entonces $a_y = -8\ \text{m/s}^2$. Sustituir en el apartado 3 del paso *a*: $F_n = m(g + a_y) = (80\ \text{kg})(9{,}81\ \text{m/s}^2 - 8{,}0\ \text{m/s}^2)$

$= 144{,}8\ \text{N} = \boxed{1{,}40 \times 10^2\ \text{N}}$

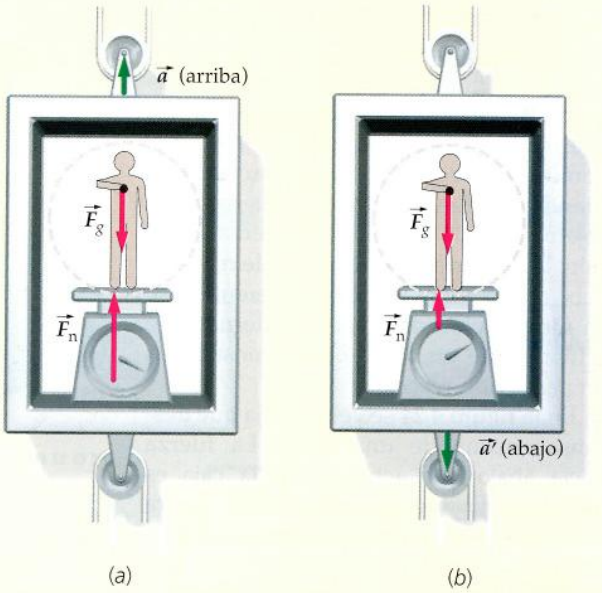


FIGURA 4.22

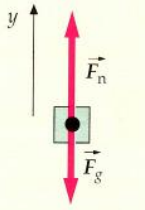


FIGURA 4.23

COMPROBACIÓN Si la aceleración del ascensor es hacia arriba, independientemente de que el ascensor suba o baje, uno esperaría pesar más de forma que el peso aparente fuese mayor que mg. Esto está de acuerdo con el resultado del apartado (*a*). Si la aceleración del ascensor es hacia abajo, uno esperaría pesar menos de forma que ahora el peso aparente fuese menor que mg. Los resultados de los apartados (*b*) y (*c*) están de acuerdo con los razonamientos anteriores.

PROBLEMA PRÁCTICO 4.9 Un ascensor desciende llegando al reposo con una aceleración 4,00 m/s². Si su masa es de 70 kg y se encuentra sobre una balanza sobre el suelo de un ascensor, ¿qué marca la balanza cuando el ascensor se va deteniendo?

4.7 TERCERA LEY DE NEWTON

La tercera ley de Newton pone de manifiesto una propiedad importante de las fuerzas: las fuerzas se dan en pares. Por ejemplo, si una fuerza se aplica sobre un cuerpo A, debe haber un cuerpo B que ejerza la fuerza. La tercera ley de Newton establece que esas fuerzas tienen el mismo módulo y direcciones opuestas. Es decir, si un cuerpo A ejerce una fuerza sobre un cuerpo B, el cuerpo B ejerce una fuerza sobre el cuerpo A que es igual en módulo y opuesta en dirección.

Tercera ley. Las fuerzas siempre actúan por pares iguales y opuestos. Si el cuerpo A ejerce una fuerza $\vec{F}_{AB}$ sobre el cuerpo B, éste ejerce una fuerza igual, pero opuesta $\vec{F}_{BA}$, sobre el cuerpo A. Así pues,

$$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB} \qquad 4.8$$

TERCERA LEY DE NEWTON

A cada par de fuerzas se les llama **par** de la tercera ley de Newton (**3LN**). Es común referirse a estas fuerzas como acción y reacción; sin embargo, esta terminología es desafortunada porque parece como si una fuerza reaccionara a la otra, lo cual no es cierto, ya que ambas fuerzas actúan simultáneamente. Cada una de ellas puede denominarse acción o bien reacción. Si cuando una fuerza externa actúa sobre un objeto particular la llamamos fuerza de acción, la correspondiente fuerza de reacción debe actuar sobre un objeto diferente. Así, en ningún caso dos fuerzas externas que actúan sobre un único objeto constituyen un par acción-reacción.

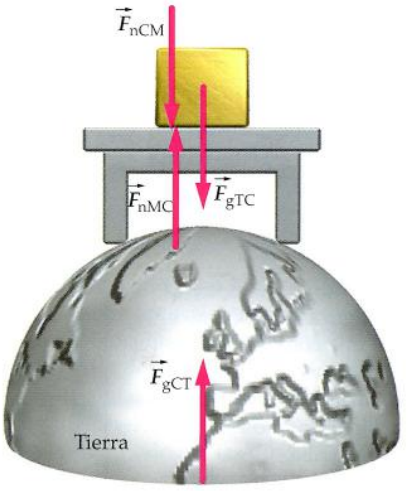


FIGURA 4.24

En la figura 4.24 se ve una caja que descansa encima de una mesa. La fuerza hacia abajo que actúa sobre la caja es fuerza de la gravedad $\vec{F}_{gTC}$ de la Tierra sobre el bloque. El bloque ejerce sobre la Tierra una fuerza igual y de signo contrario $\vec{F}_{gCT}$. Estas fuerzas forman pues un par 3LN. Si fueran las únicas fuerzas presentes, el bloque se aceleraría hacia abajo y la Tierra se aceleraría hacia arriba. Sin embargo, la mesa ejerce sobre la caja una fuerza hacia arriba $\vec{F}_{nMC}$ que compensa el peso. La caja también ejerce una fuerza sobre la mesa $\vec{F}_{nCM}$ hacia abajo. Las fuerzas $\vec{F}_{nCM}$ y $\vec{F}_{nMC}$ forman un par 3LN.

> **!** Los pares de la tercera ley de Newton son *siempre* iguales y opuestos.

> **!** En ningún caso dos fuerzas externas que actúan sobre *un único objeto* constituyen un par 3LN.

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 4.3

¿Las fuerzas $\vec{F}_{gCT}$ y $\vec{F}_{nCM}$ de la figura 4.24 forman un par de la tercera ley de Newton?

Ejemplo 4.11 El caballo y el carro — *Conceptual*

El caballo de la figura 4.25*a* rechaza tirar del carro porque razona: "de acuerdo con la tercera ley de Newton, cualquiera que sea la fuerza que ejerza sobre el carro, éste ejercerá una fuerza igual y de sentido contrario sobre mí, por lo que la fuerza neta será cero y no habrá ninguna opción para acelerarlo". ¿Dónde está la incorrección en este argumento?

PLANTEAMIENTO Estamos interesados en el movimiento del carro, y, por lo tanto, dibujamos un diagrama de fuerzas para él (figura 4.25*b*). La fuerza ejercida por el caballo en los arreos se designa por $\vec{F}_{HC}$. (Los arreos están atados al carro, por lo que los consideramos como parte del carro.) Hay otras fuerzas que actúan sobre el carro, como la fuerza de la gravedad sobre el carro $\vec{F}_{gEC}$, la fuerza que ejerce el suelo $\vec{F}_{n\,PC}$ y la fuerza de rozamiento ejercida por el pavimento, $\vec{f}_{PC}$ (fuerza de rozamiento).

SOLUCIÓN

1. Dibujar el diagrama de fuerzas para el carro (véase la figura 4.25*c*). El carro no acelera verticalmente, por lo que la suma de fuerzas en la dirección vertical es cero. Las fuerzas horizontales son $\vec{F}_{HC}$, que va hacia la derecha y $\vec{f}_{PC}$, que va hacia la izquierda. El carro acelerará si $|\vec{F}_{HC}| > |\vec{f}_{PC}|$.

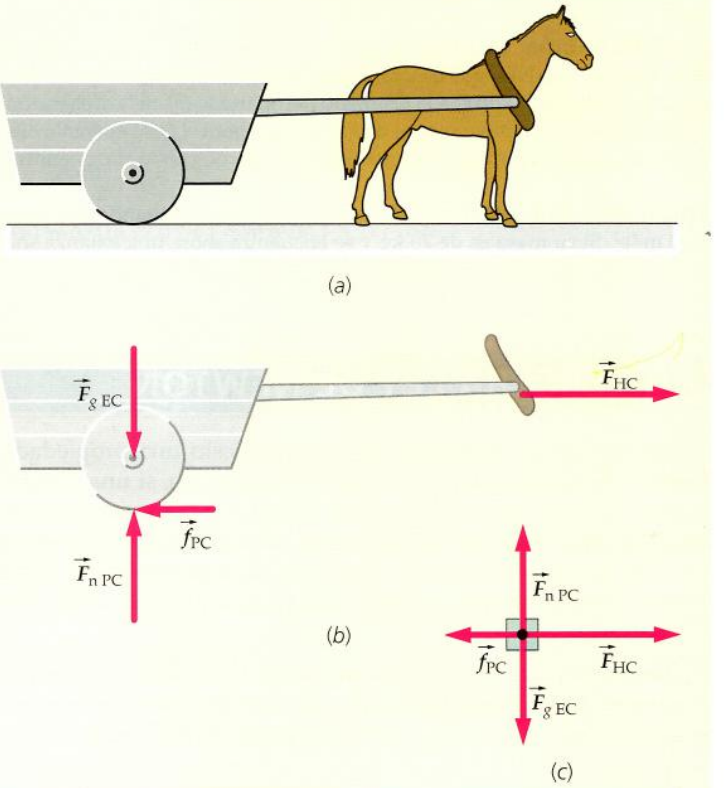
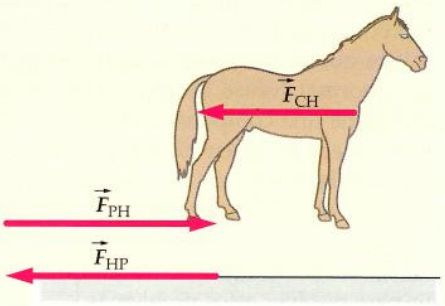


FIGURA 4.25

2. Obsérvese que la fuerza de reacción a $\vec{F}_{HC}$, que denominamos $\vec{F}_{CH}$, se ejerce sobre el caballo, no sobre el carro (figura 4.25*d*), y no tiene ningún efecto sobre el movimiento del carro, sino que afecta al movimiento del caballo. Si el caballo acelera hacia la derecha, debe haber una fuerza $\vec{F}_{PH}$ (hacia la derecha) ejercida por el pavimento sobre las pezuñas del caballo mayor que $\vec{F}_{CH}$.

Como la fuerza de reacción a $\vec{F}_{HC}$ se ejerce sobre el caballo no hay efecto alguno sobre el carro. Este era el error del razonamiento del caballo.



(*d*)

FIGURA 4.25
(continuación)

COMPROBACIÓN Todas las fuerzas que actúan sobre el carro tienen C como subíndice derecho mientras que todas las fuerzas que actúan sobre el caballo tienen H como subíndice derecho. Por eso, no hemos dibujados las dos fuerzas del par acción y reacción de la tercera ley de Newton a la vez, ni en el carro ni en el caballo.

OBSERVACIÓN Este ejemplo ilustra la importancia de dibujar un diagrama de fuerzas cuando se resuelven problemas de mecánica. Si el caballo lo hubiera hecho, hubiera comprendido que le bastaba con empujar con fuerza sobre el pavimento para que éste le proporcionara la fuerza para moverlo hacia delante.

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 4.4

Cuando esté delante de un amigo coloque las palmas de su mano contra las de su amigo y empuje. ¿Podrá ejercer su amigo una fuerza sobre usted si usted no ejerce fuerza sobre él? Inténtelo.

4.8 PROBLEMAS CON DOS O MÁS OBJETOS

En algunos problemas, los movimientos de dos o más objetos se hallan bajo la influencia de sus interacciones mutuas. Por ejemplo, cuando ambos están en contacto o están conectados mediante una cuerda o un muelle.

La tensión en una cadena o una cuerda es el módulo de la fuerza que un segmento de la cuerda ejerce sobre el inmediatamente contiguo. La tensión puede variar a través de la longitud de la cuerda, como en el caso de una cuerda que cuelga del techo de un gimnasio, donde la tensión en el trozo que está junto al techo es mayor, ya que en esa zona se aguanta también el peso de toda la cuerda. Sin embargo, en los problemas que trataremos en este libro, la masa de las cuerdas se suponen pequeñas, de forma que la variación en la tensión debida al peso de la cuerda es despreciable y, por lo tanto, también se desprecian las variaciones en la tensión debidas a alguna aceleración de la cuerda.

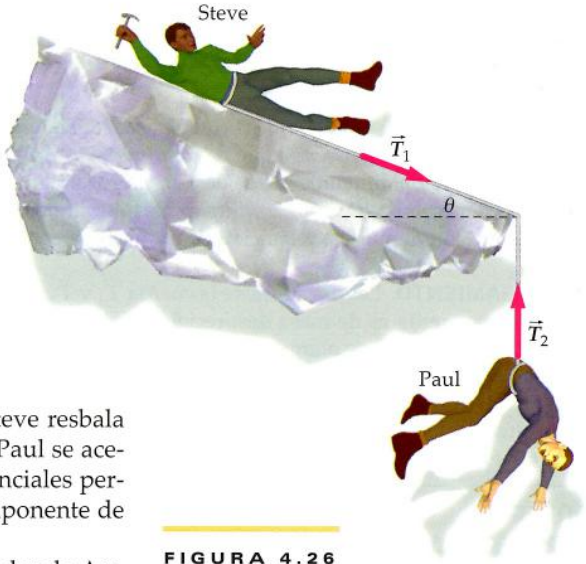


FIGURA 4.26

Consideremos el movimiento de Steve y Paul en la figura 4.26. El ritmo con el cual Paul baja se iguala con la velocidad con la que Steve resbala por el glaciar. De este modo, las velocidades de ambos son iguales. Si Paul se acelera, Steve se acelera al mismo ritmo. Es decir, sus aceleraciones tangenciales permanecen iguales. (La aceleración tangencial de una partícula es la componente de la aceleración que es tangente a la trayectoria de la partícula.)

El diagrama de fuerzas de un segmento de cuerda atada a Steve, donde Δm_s es la masa de ese segmento, se muestra en la figura 4.27. Aplicando la segunda ley de Newton a este segmento, se obtiene $T - T' = \Delta m_s a_x$. Si la masa del segmento de cuerda es despreciable, entonces $T = T'$ y no se necesita una fuerza neta para darle una aceleración. (Es decir, sólo se necesita una diferencia de tensión despreciable para dar a un trozo de cuerda de masa despreciable una aceleración finita.)

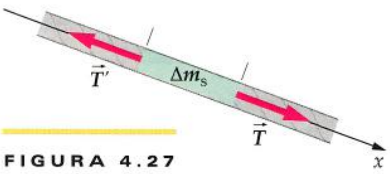


FIGURA 4.27

Ahora consideramos toda la cuerda que une a Steve y Paul. Si despreciamos la gravedad, sobre la cuerda actúan tres fuerzas. Steve y Paul, cada uno, ejercen una fuerza,

como también lo hace el hielo del borde del glaciar. Despreciar cualquier rozamiento entre el hielo y la cuerda significa que la fuerza ejercida por el hielo siempre es una fuerza normal (véase la figura 4.28), y una fuerza normal nunca tiene una componente a lo largo de la cuerda, por lo que no puede producir ningún cambio en la tensión. Así, la tensión es la misma en toda la cuerda. En resumen, si una cuerda de masa despreciable cambia de dirección pasando por una superficie sin rozamiento, la tensión es la misma en toda la cuerda. El siguiente recuadro resume los pasos a seguir para resolver estos problemas.

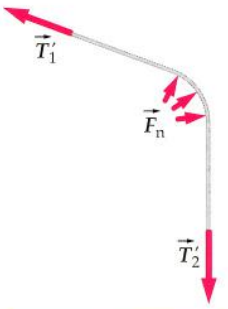


FIGURA 4.28

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 4.5

Supongamos que la cuerda del ejemplo anterior, en vez de pasar por el borde de un glaciar, pasa por una polea que tiene unos cojinetes que no ejercen rozamiento, como se muestra en la figura 4.29. ¿La tensión será la misma a lo largo de toda la cuerda?

FIGURA 4.29

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Aplicación de las leyes de Newton a problemas con dos o más cuerpos

PLANTEAMIENTO Recuerde dibujar un diagrama de fuerzas para cada cuerpo. Las incógnitas se obtienen al resolver simultáneamente las ecuaciones.

SOLUCIÓN

1. Dibujar un diagrama de fuerzas para cada cuerpo. Usar un sistema de coordenadas distinto para cada cuerpo. Recordar que si dos cuerpos se tocan las fuerzas que se ejercen entre sí son iguales pero con direcciones opuestas (tercera ley de Newton).
2. Aplicar la segunda ley de Newton a cada objeto.
3. Resolver las ecuaciones obtenidas, juntamente con cualquier ecuación que describa interacciones o ligaduras.

COMPROBACIÓN Asegúrese de que su respuesta es consistente con los diagramas de fuerzas que haya dibujado.

Ejemplo 4.12 Los escaladores

Paul (masa m_P) se cae por el borde de un glaciar. Afortunadamente, está atado mediante una larga cuerda a Steve (masa m_S), que lleva un pico de alpinista. Antes de que Steve clave su pico para detener el movimiento, se desliza sin rozamiento por la superficie de hielo, atado a Paul por una cuerda (figura 4.26). Se supone que tampoco existe rozamiento entre la cuerda y el glaciar. Determinar la aceleración de cada persona y la tensión de la cuerda.

PLANTEAMIENTO Las tensiones de la cuerda $\vec{T}_1$ y $\vec{T}_2$ son de igual módulo T porque se supone que la cuerda es de masa despreciable y el acantilado se supone que carece de rozamiento. La cuerda no se alarga ni se encoge, de modo que Paul y Steve tienen siempre el mismo módulo de velocidad. Sus aceleraciones $\vec{a}_S$ y $\vec{a}_P$ son, por lo tanto, iguales en módulo, pero no en dirección. Steve acelera por la superficie del glaciar, mientras que Paul lo hace verticalmente hacia abajo. Podemos aplicar la segunda ley de Newton, $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$, a cada una, y luego despejar la aceleración y la tensión.

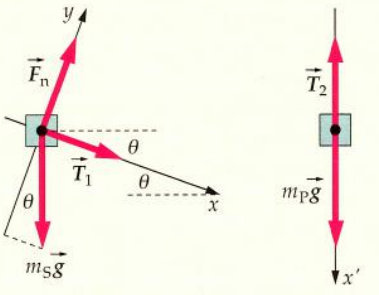


FIGURA 4.30

SOLUCIÓN

1. Dibujar los diagramas de fuerzas que actúan aisladamente sobre Paul y Steve (figura 4.30). Poner los ejes x e y en el diagrama correspondiente a Steve, escogiendo como dirección positiva del eje x la dirección de su aceleración. Elegir la dirección de la aceleración de Paul como dirección positiva del eje x'.
2. Aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ en la dirección horizontal a Steve: $F_{nx} + T_{1x} + m_S g_x = m_S a_{Sx}$
3. Aplicar $\Sigma F_{x'} = ma_{x'}$ a Paul: $T_{2x'} + m_P g_{x'} = m_P a_{Px'}$
4. Ambos están unidos por un segmento de cuerda que no se estira; por lo tanto, las aceleraciones de Paul y de Steve están relacionadas. Expresar esta relación: $a_{Px'} = a_{Sx} = a_t$

   a_t es la componente de la aceleración en la dirección *tangencial* del movimiento.

5. Dado que la cuerda tiene una masa despreciable y resbala sobre el hielo con rozamiento despreciable, las fuerzas $\vec{T}_1$ y $\vec{T}_2$ están relacionadas. Expresar esta relación: $T_2 = T_1 = T$

6. Sustituir los resultados de los pasos 4 y 5 en las ecuaciones del paso 2 y del paso 3: $T + m_S g \operatorname{sen}\theta = m_S a_t$, $-T + m_P g = m_P a_t$

7. Resolver las ecuaciones del paso 6 para la aceleración eliminando T y despejando a_t: $$a_t = \boxed{\frac{m_S \operatorname{sen}\theta + m_P}{m_S + m_P} g}$$

8. Sustituir el resultado del paso 7 en las dos ecuaciones del paso 6 y despejar T: $$T = \boxed{\frac{m_S m_P}{m_S + m_P}(1 - \operatorname{sen}\theta) g}$$

COMPROBACIÓN Si m_P es mucho mayor que m_S, es de esperar que la aceleración sea aproximadamente igual a g y la tensión aproximadamente cero. Sustituyendo $m_S = 0$ realmente nos da $a = g$ y $T = 0$. Si m_P es mucho menor que m_S, esperamos que la aceleración sea aproximadamente g sen θ (véase el ejemplo 4.7) y que la tensión sea cero. Sustituyendo $m_P = 0$ en los pasos 7 y 8, obtenemos $a_x = g \operatorname{sen}\theta$ y $T = 0$. Comprobamos nuestras respuestas en el valor límite de la pendiente ($\theta = 90°$) y obtenemos $a_x = g$ y $T = 0$. Esto parece correcto, ya que si $\theta = 90°$ Steve y Paul experimentan una caída libre.

OBSERVACIÓN En el paso 1 se elige la dirección hacia abajo como positiva para que la solución sea lo más simple posible. Con esta aceleración, cuando Steve se mueve en dirección positiva (hacia la derecha), Paul se mueve también en dirección positiva (hacia abajo).

PROBLEMA PRÁCTICO 4.10 (*a*) Determinar la aceleración si $\theta = 15°$ y las masas son $m_S = 78$ kg y $m_P = 92$ kg. (*b*) Determinar la aceleración si los valores de estas dos masas se intercambian.

Ejemplo 4.13 Construyendo una estación espacial

Un astronauta que construye una estación espacial empuja una caja de masa m_1 con una fuerza $\vec{F}_{A1}$. Esta caja está en contacto directo con una segunda caja de masa m_2 (figura 4.31). (*a*) ¿Cuál es la aceleración de las cajas? (*b*) ¿Cuál es el módulo de la fuerza ejercida por una caja sobre la otra?

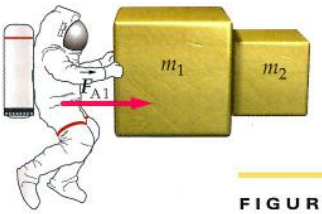


FIGURA 4.31

PLANTEAMIENTO La fuerza $\vec{F}_{A1}$ es una fuerza de contacto y sólo actúa sobre la caja 1. Sea $\vec{F}_{21}$ la fuerza ejercida por la caja 2 sobre la 1 y $\vec{F}_{12}$ la fuerza que ejerce la caja 1 sobre la 2. De acuerdo con la tercera ley de Newton estas fuerzas son iguales y opuestas ($\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$), de manera que $F_{21} = F_{12}$. Aplicar la segunda ley de Newton a cada caja por separado y tener en cuenta que las aceleraciones $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$ son iguales.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Dibujar los diagramas de fuerzas de cada uno de las dos cajas (figura 4.32).

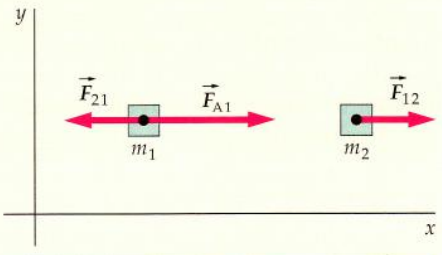


FIGURA 4.32

2. Aplicar $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ a la primer caja: $F_{A1} - F_{21} = m_1 a_{1x}$

3. Aplicar $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ a la segunda caja: $F_{12} = m_2 a_{2x}$

4. Expresar la relación entre las dos aceleraciones y la relación entre los módulos de las fuerzas que se ejercen las cajas entre sí. Las aceleraciones son iguales porque las velocidades son iguales en todo momento. Las fuerzas son iguales en módulo porque forman un par de fuerzas 3LN: $a_{2x} = a_{1x} = a_x$, $F_{21} = F_{12} = F$

5. Sustituir estas relaciones en los resultados de los pasos 2 y 3 y despejar a_x: $$a_x = \boxed{\frac{F_{A1}}{m_1 + m_2}}$$

(*b*) Sustituir la expresión para a_x en los pasos 2 o 3 y despejar F. $$F = \boxed{\frac{m_2}{m_1 + m_2} F_{A1}}$$

COMPROBACIÓN El resultado del paso 5 es el mismo que obtendríamos si la fuerza $\vec{F}_{A1}$ actuase sobre una sola masa igual a la suma de las masas de las dos cajas. En efecto, como las dos masas tienen igual aceleración, podemos considerarlas como un sistema único de masa $m_1 + m_2$.

Temas de actualidad en Física

Montañas rusas y el gusto por la velocidad

Las montañas rusas han fascinado a la gente desde la inauguración en Paris, en 1917, de las espectaculares *Promenades Aeriennes* (viajes aéreos).[1] Hasta hace muy poco, los diseñadores de la atracción estaban atascados con una de sus principales limitaciones: el viaje debía iniciarse desde una gran altura.

En los años 70, Anton Schwartzkopf, un diseñador alemán de parques temáticos, se inspiró en los aviones que despegaban de los portaaviones. En 1976, se inauguró la montaña rusa *Shuttle Loop*. Un peso de varias toneladas fue elevado hasta la cima de una torre cercana a la montaña rusa. Uno de los extremos de un cable estaba unido al peso mientras que el otro estaba atado al tren de vagonetas. Cuando el peso se dejó caer, en menos de tres segundos, el tren pasó del reposo a moverse a 97 km/h.

Al mismo tiempo, Schwartzkopf volvió con un segundo método de lanzar el tren; esta vez se trataba de un método tipo catapulta. Se hizo girar una enorme rueda de 5 toneladas a gran velocidad. Un tren con 28 pasajeros estaba conectado con un cable a la rueda y en menos de tres segundos nuevamente alcanzó una velocidad de 97 km/h. Ambos métodos fueron pioneros en el lanzamientos de trenes de montañas rusas.[2]

Dos nuevos métodos han hecho posible lanzamientos con mayor velocidad. La empresa Intamin AG ha creado un sistema hidráulico para tirar del cable que se une al tren. El tren de vagonetas de la Top Thrill Dragster pesa 53 400 N y suele llevar además 18 pasajeros. Cada vez que pasa por encima de unos sensores hay un ordenador que mide el peso de la vagoneta con los pasajeros y determina la tensión que hay que aplicar al cable para que el tren pueda subir hasta la cima de la primera montaña que está a 130 m de altura. Entonces, los motores llenos de líquido proporcionan una potencia de 10 000 caballos que hacen girar al cable a 500 rpm y acelerar el tren a 190 km/h en sólo 4 segundos.[3]

Stan Checketts inventó la primera montaña rusa que funciona con aire comprimido. El pneumático Thrust Air 2000 está propulsado por un único chorro de aire. El tren con ocho pasajeros pasa por los sensores y los cuatro compresores entran en acción y bombean aire hacia un depósito situado en la base de la torre. En función del peso del tren se regula la presión del aire comprimido. Finalmente, el aire empuja un pistón que acelera al tren alcanzando 128 km/h en 1,8 segundos. Se necesitan un mínimo de 180 000 N para comunicar esa aceleración.[4] El reactor de un *F-15* produce un empuje de 130 000 N como máximo. Las montañas rusas actualmente comunican mayor potencia que un reactor. Tal vez, debería pensárselo la próxima vez que vaya a un parque de atracciones.

La Hypersonic XLC del parque de atracciones Dominion del Paramount King en Virginia es la primera montaña rusa propulsada con aire comprimido; va de 0 a 128 km/h en 1,8 segundos. *(Gentileza de King's Dominion Amusement Park.)*

[1] Cartmell, Robert, *The Incredible Scream Machine: A History of the Roller Coaster.* Bowling Green State University Popular Press, Bowling Green Ohio. 1987.
[2] "The Tidal Wave" http://www.greatamericaparks.com/tidalwave.html Marriott Great America Parks, 2006; Cartmell, op. cit.
[3] Hitchcox, Alan L. "Want Thrills? Go with Hydraulics." Hydraulics and Pneumatics, July 2005.
[4] Goldman, Lea. "Newtonian Nightmare." *Forbes*, 7/23/2001. Vol. 168, Issue 2; "The F-100 Engine." http://www.pratt-whitney.com/prod_mil_f100.asp Pratt & Whitney, March 2006.

Resumen

1. Las leyes de Newton del movimiento son leyes fundamentales de la naturaleza que constituyen la base de la mecánica.
2. La masa es una propiedad *intrínseca* de todo cuerpo.
3. La fuerza es una importante magnitud dinámica *derivada*.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES
1. Leyes de Newton	
Primera ley	Un objeto en reposo permanece en reposo a menos que *sobre él* actúe una fuerza externa neta. Un objeto en movimiento continúa moviéndose con velocidad constante a menos que sobre él actúe una fuerza externa neta. (Los sistemas de referencia en los que esto ocurre se llaman sistemas de referencia inerciales.)
Segunda ley	La aceleración de un objeto es directamente proporcional a la fuerza neta que actúa sobre él. El inverso de la masa es la constante de proporcionalidad. Entonces $\vec{F}_{\text{neta}} = m\vec{a}$, donde $\vec{F}_{\text{neta}} = \Sigma\vec{F}$ **4.1**
Tercera ley	Cuando dos cuerpos interaccionan, la fuerza $\vec{F}_{BA}$ ejercida por el cuerpo B sobre el A es igual en módulo y opuesta en dirección a la fuerza $\vec{F}_{AB}$ ejercida por el cuerpo A sobre el B: $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$ **4.8**
2. Sistemas de referencia inerciales	Las leyes de Newton sólo son válidas en un sistema de referencia inercial. Cualquier sistema de referencia que se mueva con velocidad constante relativa a un sistema de referencia inercial es también un sistema de referencia inercial. Un sistema de referencia que se mueve con aceleración relativa a un sistema inercial no es un sistema de referencia inercial. Un sistema de referencia ligado a la Tierra es, aproximadamente, un sistema de referencia inercial.
3. Fuerza, masa y peso	
Fuerza	La fuerza se define en función de la aceleración que produce a un determinado objeto. Una fuerza de 1 newton (N) es la fuerza que produce una aceleración de 1 m/s^2 sobre una masa de 1 kilogramo (kg).
Masa	La masa es la propiedad intrínseca de un objeto que mide su resistencia a la aceleración. La masa no depende de la localización del objeto. Las masas de dos objetos pueden compararse aplicando la misma fuerza a cada uno de los objetos y midiendo sus aceleraciones. La relación de las masas de los objetos es igual a la relación inversa de las aceleraciones producidas por la misma fuerza: $\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2}$
Peso	La fuerza de la gravedad $\vec{F}_g$ de un objeto cerca de la superficie terrestre es la fuerza de atracción gravitatoria ejercida por la Tierra sobre el objeto. Es proporcional a la masa m del objeto y al campo gravitatorio $\vec{g}$ o aceleración de la caída libre debida a la gravedad. $\vec{F}_g = m\vec{g}$ **4.4** El peso no es una propiedad intrínseca de un objeto; depende de la localización del objeto.
4. Fuerzas fundamentales	Todas las fuerzas observadas en la naturaleza pueden explicarse en función de cuatro interacciones fundamentales:
	1. La interacción gravitatoria
	2. La interacción electromagnética
	3. La interacción débil*
	4. La interacción nuclear fuerte, también llamada *fuerza hadrónica*
5. Fuerzas de contacto	Las fuerzas de contacto de soporte y rozamiento y las ejercidas por muelles y cuerdas, son debidas a las fuerzas moleculares que surgen de la fuerza electromagnética básica.
Ley de Hooke	Cuando un muelle se comprime o se alarga en una pequeña cantidad Δx, la fuerza que ejerce es proporcional a Δx: $F_x = -k\Delta x$ **4.7**

* Las interacciones electromagnética y débil se pueden agrupar en un sólo tipo de interacción llamada electrodébil.

Respuestas a las comprobaciones conceptuales

4.1 No, la fuerza neta no es una fuerza real sino el vector suma de fuerzas reales.

4.2 No, es la fuerza neta que produce la aceleración de una masa.

4.3 No.

4.4 No. Sería contrario a la tercera ley de Newton.

4.5 No. Una cosa es que no haya rozamiento entre los cojinetes y la polea, pero otra cosa es que la polea tenga masa, es decir, inercia. Para cambiar la velocidad de rotación de la polea se necesita una diferencia de tensión. Las poleas con masa se estudiarán en el capítulo 8.

Respuestas a los problemas prácticos

4.1 1,5 kg

4.2 0,47 lb

4.3 13 cm

4.4 3,0 cm

4.5 $T = C\sqrt{m/k}$ donde C es una constante sin dimensiones. La expresión correcta para el periodo, como veremos en el capítulo 14 es $T = 2\pi\sqrt{m/k}$.

4.6 1,9 kN

4.7 Aplicando la segunda ley de Newton para las componentes y vemos del diagrama de fuerzas de la figura 4.18 que $\Sigma F_y = ma_y \Rightarrow F_n - F_g\cos\theta = 0$, donde hemos utilizado que a_y es cero. Entonces, $F_n = F_g\cos\theta$.

4.8 $a = 27{,}8\ \text{m/s}^2$, $\theta = 70{,}5°$

4.9 967 N

4.10 (*a*) $a_t = 0{,}66g$, (*b*) $a_t = 0{,}60g$

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben aportarse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

En los datos numéricos sin coma decimal se deben considerar significativos todos los dígitos, incluidos los ceros a la derecha del último diferente de cero.

Usar en todos los problemas $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$ para la aceleración de la gravedad y despreciar, a menos que se indique lo contrario, el rozamiento y la resistencia del aire.

• Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil

•• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos

••• Desafiante, para alumnos avanzados

SSM La solución se encuentra en el *Manual de soluciones*

Los problemas consecutivos que están sombreados son problemas relacionados.

PROBLEMAS CONCEPTUALES

1 • Durante un vuelo transcontinental su taza de café permanece sin moverse sobre su mesita. ¿Hay fuerzas que actúen sobre la taza? Si es así, ¿cómo deberían ser de diferentes de aquellas que actuaran sobre la taza si ésta se encuentra sobre la mesa de la cocina de su casa?

2 • Usted está adelantando un coche en la autopista y observa que el otro coche tiene una aceleración $\vec{a}$ hacia el oeste. Sin embargo, el conductor del otro coche está manteniendo constante la velocidad y dirección relativas a la autopista. ¿El sistema de referencia de su coche es inercial? En caso negativo, ¿en qué dirección se acelera su coche respecto al otro?

3 • **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Suponga que está dando un paseo en una limusina que tiene las ventanas oscuras, de forma que usted no puede ver el exterior. El coche está sobre terreno llano, de forma que puede acelerar aumentando su velocidad, disminuyéndola o girando. Si usted está equipado únicamente con un pequeño objeto que cuelga del extremo de una cuerda, ¿cómo puede saber si la limusina cambia de dirección o de velocidad? ¿Podría determinar la velocidad de la limusina? SSM

4 •• Si sobre un objeto actúa una única fuerza, distinta de cero, ¿el objeto se acelera respecto a todos los sistemas de referencia inerciales? ¿Sería posible que el objeto tuviera velocidad nula en algunos sistemas de referencia inerciales mientras que en otros no? En caso afirmativo, dé algún ejemplo.

5 •• Sobre una pelota de béisbol actúa una única fuerza conocida. Sólo con esta información ¿podría decir en qué dirección se movería respecto a algún sistema de referencia inercial? Razone la respuesta.

6 •• Un camión se aleja a velocidad constante (tal y como se observaría si estuviésemos en medio de la calle). Se deduce que (*a*) no hay fuerzas que actúen sobre el camión, (*b*) actúa una fuerza constante sobre el camión en la dirección de su velocidad, (*c*) la fuerza neta que actúa sobre el camión es cero, (*d*) la fuerza neta que actúa sobre el camión es su propio peso.

7 • **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Muchas de las sondas espaciales que fueron lanzadas hace tiempo aún siguen en el espacio. El *Pioneer 10*, por ejemplo, fue lanzado en los años 70 y aún sigue moviéndose más allá del Sol y los planetas. ¿Está cambiando la masa del *Pioneer 10*? ¿Cuál de las fuerzas fundamentales conocidas continúa actuando sobre él? ¿Actúa sobre él alguna fuerza neta?

8 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Unos astronautas, en aparente ingravidez durante una misión en la Estación Espacial Internacional, deben monitorizar sus masas porque se sabe que una pérdida significativa de masa corporal puede dar lugar a serios problemas médicos. Dé un ejemplo de cómo se podría diseñar un equipo de medida de la masa de un astronauta que se encuentra en una estación espacial en órbita.

9 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Usted se encuentra en un ascensor. Describa dos situaciones en las cuales su peso aparente sea mayor que su peso real. SSM

10 •• Suponga que usted está en un tren que se mueve a velocidad constante con respecto al suelo. Usted tira una pelota a su amigo que está unos cuantos asientos por delante. Utilice la segunda ley de Newton para explicar por qué no puede utilizar sus observaciones sobre la pelota lanzada para determinar la velocidad del tren respecto al suelo.

11 •• Explique por qué, de entre las interacciones fundamentales, la interacción gravitacional es la de mayor importancia en nuestras vidas cotidianas. Hay otra que desempeña un papel creciente en el rápido avance de la tecnología. ¿Cuál es? ¿Por qué las otras no parecen tan importantes?

12 •• Dé un ejemplo de un objeto que tenga tres fuerzas actuando sobre él y (*a*) se acelere, (*b*) se mueva a velocidad constante (no nula) y (c) permanezca en reposo.

13 •• Supongamos que un bloque de masa m_1 descansa sobre otro bloque de masa m_2 y la combinación de ambos se apoya sobre una mesa, como se muestra en la figura 4.33. Indique el nombre de la fuerza y su categoría (contacto o acción a distancia) para cada una de las fuerzas: la fuerza ejercida (*a*) por m_1 sobre m_2, (*b*) por m_2 sobre m_1, (c) por m_2 sobre la mesa, (*d*) por la mesa sobre m_2. (*e*) por la Tierra sobre m_2. ¿Cuáles de esas fuerzas, si hay alguna, constituyen un par de fuerzas de la tercera ley de Newton? SSM

FIGURA 4.33 Problema 13

14 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Usted tira de un pez que acaba de pescar desde su barca. Dibuje el diagrama de fuerzas que actúan sobre el pez una vez que ha salido del agua y gana velocidad conforme asciende verticalmente hacia la barca. Diga el tipo (tesión, cuerda, gravedad, normal, rozamiento, etc.) y la categoría (contacto o acción a distancia) de cada una de las fuerzas del diagrama. ¿Cuáles de las fuerzas, si hay algunas, forman un par de fuerzas de la tercera ley de Newton? ¿Puede dar los módulos relativos de las fuerzas de su diagrama a partir de la información dada? Razone la respuesta.

15 •• Si usted deja un plato cuidadosamente sobre la mesa, éste no se romperá. Sin embargo, si lo deja caer sobre la mesa desde una cierta altura, lo más probable es que se rompa. Discuta las fuerzas que actúan sobre el plato (cuando entra en contacto con la mesa) en ambas situaciones. Utilice la cinemática y la segunda ley de Newton para determinar la causa de que el plato se rompa en la segunda situación.

16 •• Para cada una de las siguientes fuerzas, indique qué la produce, sobre qué objeto actúa, su dirección y la fuerza de reacción. (*a*) La fuerza que usted ejerce sobre su maletín cuando lo lleva en la mano mientras espera de pie en la parada del autobús. (*b*) La fuerza normal sobre la suela de su pie cuando usted está de pie sobre un suelo horizontal de madera. (*c*) La fuerza de la gravedad sobre usted cuando está de pie sobre un suelo horizontal. (*d*) La fuerza horizontal ejercida sobre una pelota de béisbol por un bate cuando ésta se golpea hacia arriba.

17 •• En cada caso identifique la fuerza (incluyendo su dirección) que causa la aceleración. (*a*) Un velocista al principio de la carrera. (*b*) Un disco de hockey se desliza sobre hielo hasta pararse. (*c*) Una pelota en lo más alto de su trayectoria parabólica. (*d*) Un saltador de *puenting* en la parte más baja de su descenso.

18 • Verdadero o falso:

(*a*) Si dos fuerzas externas que son iguales en módulo y opuestas en dirección actúan sobre un mismo objeto, nunca serán un par de fuerzas de la tercera ley de Newton.

(*b*) Las dos fuerzas del par de la tercera ley de Newton son iguales sólo si los cuerpos no están acelerándose.

19 •• Un hombre de 80 kg patina sobre el hielo empujando a un muchacho de 40 kg, también sobre patines, con una fuerza de 100 N. Ellos se mueven sobre el hielo aumentando su velocidad de forma constante. (*a*) La fuerza ejercida por el muchacho sobre el hombre es de (1) 200 N, (2) 100 N, (3) 50 N, (4) 40 N. (*b*) Compare los módulos de las dos aceleraciones. (*c*) Compare también las direcciones de dichas aceleraciones.

20 •• Una muchacha tiene una piedra sobre la palma de su mano y la puede mover hacia arriba, hacia abajo o mantenerla como está. Verdadero o falso: (*a*) la fuerza ejercida por su mano sobre la piedra tiene el mismo módulo que la fuerza de la gravedad que actúa sobre la piedra, (*b*) la fuerza ejercida por su mano sobre la piedra es la fuerza de reacción a la fuerza de la gravedad sobre la piedra, (*c*) la fuerza ejercida por su mano sobre la piedra tiene el mismo módulo que el de la fuerza que ejerce la piedra sobre su mano pero con dirección opuesta, (*d*) si la muchacha mueve su mano hacia abajo a velocidad constante, entonces la fuerza vertical que ella ejerce sobre la piedra es menor que la fuerza de la gravedad que actúa sobre la piedra, (*e*) si la muchacha mueve la mano hacia abajo pero ralentiza el movimiento hasta pararse, entonces la fuerza que ejerce la piedra sobre la mano de la chica tiene el mismo módulo que la fuerza de la gravedad que actúa sobre la piedra.

21 •• Un cuerpo de 2,5 kg cuelga en reposo de una cuerda sujeta al techo. (*a*) Dibujar un diagrama que muestre las fuerzas que actúan sobre el cuerpo e indicar cada una de las fuerzas de reacción. (*b*) Hacer lo mismo con las fuerzas que actúan sobre la cuerda. No desprecie la masa de la cuerda. SSM

22 •• (*a*) ¿Cuál de los diagramas de fuerzas de la figura 4.34 representa un bloque que se desliza por una superficie inclinada sin rozamiento? (*b*) Para el diagrama correcto, ponga los nombres de las fuerzas e indique cuáles de ellas son de contacto y cuáles son de acción a distancia. (*c*) Para cada objeto del diagrama correcto, identificar la fuerza de reacción, el objeto sobre el que actúa y su dirección.

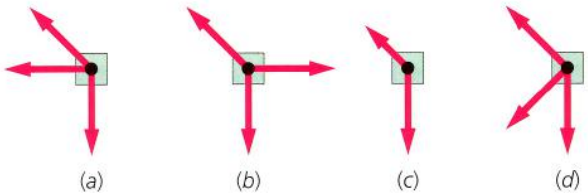


FIGURA 4.34 Problema 22

23 •• Una caja de madera que está sobre el suelo está ligada a un muelle por un lado. Por el lado opuesto se presiona con una determinada fuerza que comprime el muelle. El rozamiento entre la caja y el suelo es despreciable. Dibuje el diagrama de fuerzas sobre la caja en los siguientes casos: (*a*) la fuerza externa deja de actuar sobre la caja pero ésta sigue unida al muelle que sigue comprimido, (*b*) la fuerza externa deja de actuar sobre la caja pero ésta sigue unida al muelle, (*c*) la caja no está unida al muelle.

24 •• Imagínese que se encuentra sentado en una silla con ruedas en su despacho. Considere que el rozamiento de la silla y el suelo es despreciable. Sin embargo, la fuerza de rozamiento entre la mesa y el

suelo no es despreciable. Sentado sobre la silla usted quiere levantarse a por una taza de café y para ello empuja horizontalmente sobre la mesa, de forma que la silla se desplaza hacia atrás, alejándose de la mesa. (*a*) Dibuje el diagrama de fuerzas en el momento que usted empuja sobre la mesa e indique cuál de las fuerzas es la responsable de su aceleración, (*b*) ¿Cuál es la fuerza de reacción a la fuerza que causa su aceleración? (*c*) Dibuje el diagrama de fuerzas de la mesa e indique por qué no se acelera. ¿Viola la tercera ley de Newton? Razone la respuesta.

25 ••• Una misma fuerza horizontal neta F se aplica durante un intervalo Δt a dos objetos de masas m_1 y m_2 que descansan sobre una superficie horizontal sin rozamiento ($m_1 > m_2$). (*a*) Suponiendo que los dos objetos se hallan inicialmente en reposo, ¿cuál es el cociente entre las aceleraciones durante ese intervalo en función de F, m_1 y m_2? (*b*) ¿Cuál es el cociente entre sus velocidades v_1 y v_2 al final de dicho intervalo? (*c*) ¿Cómo de separados se encuentran los objetos (y cuál está delante).

ESTIMACIONES Y APROXIMACIONES

26 •• **CONCEPTUAL** La mayoría de los coches tienen cuatro amortiguadores unidos a la carrocería, uno en cada una de las posiciones de las ruedas. Diseñe un método para medir la constante de fuerza de cada uno de los amortiguadores sabiendo su peso y el de sus amigos. Considere que los cuatro amortiguadores son iguales. Utilice el método para estimar la constante de fuerza del amortiguador de su coche.

27 •• Estimar la fuerza ejercida sobre el guante de un portero de hockey que detiene el disco después del lanzamiento de una falta. SSM

28 •• Un jugador de béisbol resbala hasta la segunda base al interceptar la pelota. Suponiendo valores razonables para la longitud del deslizamiento, la velocidad del jugador al inicio del deslizamiento y la velocidad al final del deslizamiento, determine el valor medio de la fuerza de rozamiento que actúa sobre el jugador.

29 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un coche de carreras patina sin control e intenta reducir la velocidad hasta 90 km/h antes de chocar contra un muro. Afortunadamente, el conductor lleva puesto el cinturón de seguridad. Utilizando valores razonables para la masa del conductor y la distancia de frenado, estime la fuerza media ejercida por el cinturón de seguridad sobre el conductor, y su dirección. Ignore los efectos del rozamiento del conductor con el asiento.

LA PRIMERA Y LA SEGUNDA LEY DE NEWTON: MASA, INERCIA Y FUERZA

30 • Una partícula de masa m se mueve con una velocidad inicial $v_0 = 25{,}0$ m/s. Cuando una fuerza neta de 15,0 N actúa sobre ella, alcanza el reposo después de recorrer 62,5 m. (*a*) ¿Cuál es la dirección de la fuerza? (*b*) Determine el tiempo que tarda la partícula en pararse. (*c*) ¿Cuál es su masa?

31 • (*a*) Un objeto experimenta una aceleración de 3 m/s^2 cuando sobre él actúa una cierta fuerza F_0. ¿Cuál es su aceleración si la fuerza se duplica? (*b*) Un segundo objeto experimenta una aceleración de 9 m/s^2 bajo la influencia de la fuerza F_0. ¿Qué relación existe entre las masas de los dos objetos? (*c*) Si los dos objetos se atan juntos, ¿qué aceleración producirá la fuerza F_0?

32 • Un remolcador arrastra un buque con una fuerza constante F_1. El incremento en la velocidad del buque en un intervalo de 10 s es de 4 km/h. Cuando un segundo remolcador aplica un segunda fuerza constante F_2 en la misma dirección su velocidad crece en 16 km/h cada intervalo de 10 s. ¿Qué relación existe entre los módulos de las dos fuerzas? (Despreciar la resistencia del agua y del aire.)

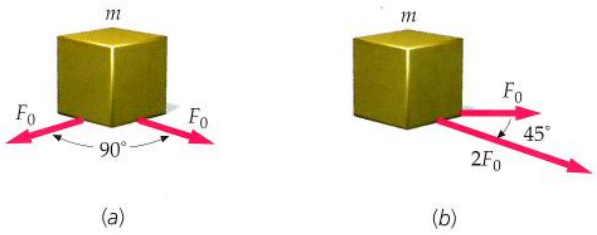
33 • Una fuerza constante de 12 N actúa sobre una partícula de masa m. La partícula parte del reposo y viaja en línea recta a lo largo de 18 m en 6 s. Hallar m.

34 • Una fuerza neta de $(6{,}0\ \text{N})\hat{i} - (3{,}0\ \text{N})\hat{j}$ actúa sobre un cuerpo de 1,5 kg. Hallar la aceleración $\vec{a}$.

35 •• Una bala de $1{,}8 \times 10^{-3}$ kg de masa que lleva una velocidad de 500 m/s choca contra un gran bloque de madera y se introduce 6 cm en su interior antes de pararse. (*a*) Suponiendo que la desaceleración de la bala es constante, calcular la fuerza ejercida por la madera sobre la bala. (*b*) Si la misma fuerza actuara sobre la bala y tuviera la misma velocidad de impacto pero la mitad de masa, ¿cuál sería la nueva distancia de penetración? SSM

36 •• Una vagoneta de juguete está en una vía recta y horizontal y lleva un ventilador atado a uno de sus extremos. Se coloca la vagoneta en un extremo de la vía y se conecta el ventilador. La vagoneta, que estaba en reposo, empieza a moverse y en 4,55 s se ha movido 1,5 m. La masa de la vagoneta con el ventilador es de 355 g; suponemos que se mueve con aceleración constante. (*a*) ¿Cuál es la fuerza neta que se ejerce sobre el conjunto vagoneta-ventilador? (*b*) Se va añadiendo masa al conjunto vagoneta-ventilador hasta que tiene una masa de 722 g, y se repite el experimento. ¿Cuánto le costará ahora a la vagoneta moverse los 1,5 m? Ignorar los efectos del rozamiento.

37 •• Una fuerza F_0 produce una aceleración de 3 m/s^2 cuando actúa sobre un objeto de masa m que se desliza sobre una superficie sin rozamiento. Hallar la aceleración del mismo objeto cuando se ve sometido a las fuerzas que se muestran en la figura 4.35*a* y *b*.



(*a*) (*b*)

FIGURA 4.35 Problema 37

38 •• Álvaro y Berta están quietos en medio de un gran lago helado. Álvaro empuja a Berta con una fuerza de 20 N durante 1,5 s. La masa de Berta es de 100 kg. (*a*) ¿Cuál es la velocidad a la que se mueve Berta después de ser empujada? (*b*) Si la masa de Álvaro es de 80 kg, ¿qué velocidad alcanza? Considerar que no hay rozamiento.

39 •• Si se empuja un bloque de masa m_1 con una fuerza horizontal F_0, éste adquiere una aceleración de 12 m/s^2. Si se empuja un bloque de masa m_2 con la misma fuerza, su aceleración es de 3 m/s^2. (*a*) ¿Qué aceleración proporcionaría la misma fuerza F_0 a un bloque de masa $m_2 - m_1$? (*b*) ¿Qué aceleración proporcionaría la misma fuerza a un bloque de masa $m_2 + m_1$? Considerar un movimiento sin rozamiento.

40 •• **MÚLTIPLES PASOS** Para arrastrar un tronco de 75 kg por el suelo con velocidad constante, un tractor tira de él con una fuerza de 250 N (horizontalmente). (*a*) Dibujar el diagrama de fuerzas sobre el tronco. (*b*) Utilizar las leyes de Newton para determinar la fuerza de rozamiento sobre el tronco. (*c*) ¿Cuál es la fuerza normal sobre el tronco? (*d*) ¿Qué fuerza deberemos ejercer si se desea dar al tronco una aceleración de 2 m/s^2 suponiendo que la fuerza de rozamiento no cambia. Dibuje de nuevo el diagrama de fuerzas para esta situación.

41 •• Un objeto de 4 kg está sometido a la acción de dos fuerzas $\vec{F}_1 = (2{,}0\ \text{N})\hat{i} + (-3{,}0\ \text{N})\hat{j}$ y $\vec{F}_2 = (4{,}0\ \text{N})\hat{i} - (11\ \text{N})\hat{j}$. El objeto está

en reposo en el origen en el instante $t = 0$. (*a*) ¿Cuál es la aceleración del objeto? (*b*) ¿Cuál es su velocidad en el instante $t = 3$ s? (*c*) ¿Dónde está el objeto en el instante $t = 3$ s?

PESO Y MASA

42 • En la Luna, la aceleración debida a la gravedad es sólo 1/6 de la que existe en la Tierra. Un astronauta, cuyo peso en la Tierra es 600 N, se desplaza a la superficie lunar. Su masa medida en la Luna, será: (*a*) 600 kg. (*b*) 100 kg. (*c*) 61,2 kg. (*d*) 9,81 kg. (*e*) 360 kg.

43 • Expresar el peso de una muchacha de 54 kg en (*a*) newtons y (*b*) libras.

44 • Determinar la masa de un hombre de 165 lb en kilogramos.

45 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Para entrenar a los astronautas antes de ir a trabajar a la Luna, donde la aceleración de la gravedad es 1/6 de la terrestre, la NASA los sumerge en un tanque de agua. Si un astronauta tiene una masa de 250 kg, teniendo en cuenta además de su masa corporal, la mochila con oxígeno, aire acondicionado, etc., determine las siguientes cantidades: (*a*) el peso del astronauta en la Tierra, (*b*) el peso en la Luna, (*c*) el empuje necesario que debe recibir en el tanque para simular las mismas condiciones que en la Luna. SSM

46 •• Vivimos en el año 2075 y los viajes espaciales son frecuentes. Un profesor de física lleva consigo su práctica favorita a la Luna. El aparato consiste en una mesa horizontal lisa y un cuerpo que se desliza sobre ella sin rozamiento. En la Tierra, cuando el profesor engancha un muelle (constante de fuerza 50 N/m) al cuerpo y presiona horizontalmente sobre el cuerpo, el muelle se comprime 2 cm, luego suelta el cuerpo y éste se acelera a 1,5 m/s^2. (*a*) Dibujar el diagrama de fuerzas que actúan sobre el cuerpo y utilícelo para determinar la masa del cuerpo. (*b*) ¿Cuál debería ser la aceleración del cuerpo bajo idénticas condiciones?

DIAGRAMAS DE FUERZAS: EQUILIBRIO ESTÁTICO

47 • **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, MÚLTIPLES PASOS** Un semáforo de 35 kg está colgado de un soporte tal como se muestra en la figura 4.36. (*a*) Dibujar el diagrama de fuerzas y utilizarlo para responder cualitativamente a la pregunta: ¿la tensión del cable 2 es mayor o menor que la del 1? (*b*) Verificar la respuesta utilizando las leyes de Newton y despejando las dos tensiones.

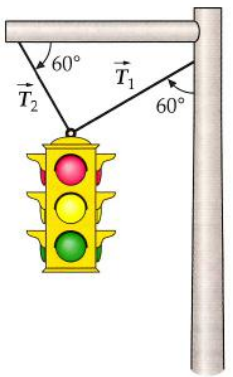


FIGURA 4.36 Problema 47

48 • Una lámpara de masa $m = 42{,}6$ kg cuelga de unos alambres como indica la figura 4.37. El anillo tiene masa despreciable. La tensión T_1 en el alambre vertical es (*a*) 209 N, (*b*) 418 N, (*c*) 570 N, (*d*) 360 N, (*e*) 730 N.

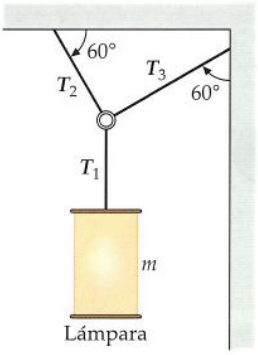


FIGURA 4.37 Problema 48

49 •• En la figura 4.38*a* se muestra un bloque de 0,500 kg que cuelga del punto medio de una cuerda de 1,25 m de longitud. Los extremos de la cuerda están sujetos al techo en unos puntos separados 1,00 m. (*a*) ¿Qué ángulo forma la cuerda con el techo? (*b*) ¿Cuál es la tensión de la cuerda? (*c*) Se quita el bloque de 0,500 kg y se cuelgan dos bloques de 0,250 kg cada uno de forma que la longitud de los tres tramos de cuerda es la misma, tal como se ve en la figura 4.38*b*. ¿Cuál es la tensión en cada segmento de la cuerda? SSM

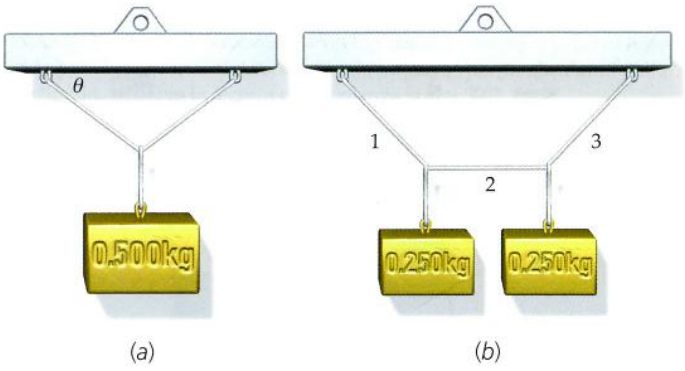


FIGURA 4.38 Problema 49

50 •• Una bola de 100 N se cuelga de unas cuerdas tal como se muestra en la figura 4.39. ¿Cuál es la tensión de la cuerda horizontal?

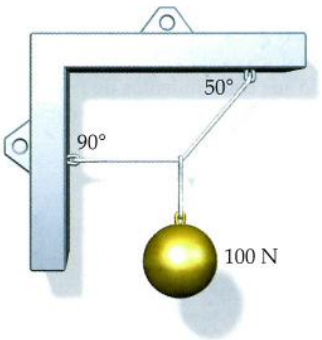


FIGURA 4.39 Problema 50

51 •• Un objeto de 10 kg de masa descansa sobre una mesa con la que no roza y está sujeto a dos fuerzas horizontales, $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, con módulos $F_1 = 20$ N y $F_2 = 30$ N, como se muestra en la figura 4.40. Encontrar la fuerza $\vec{F}_3$ que debe aplicarse para que el cuerpo esté en equilibrio estático. SSM

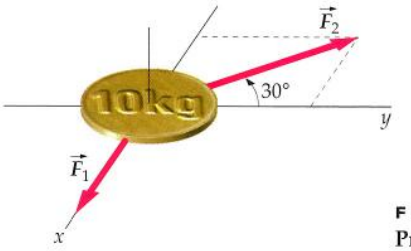


FIGURA 4.40
Problema 51

52 •• Determinar las tensiones y las masas desconocidas de los sistemas en equilibrio que se representan en la figura 4.41.

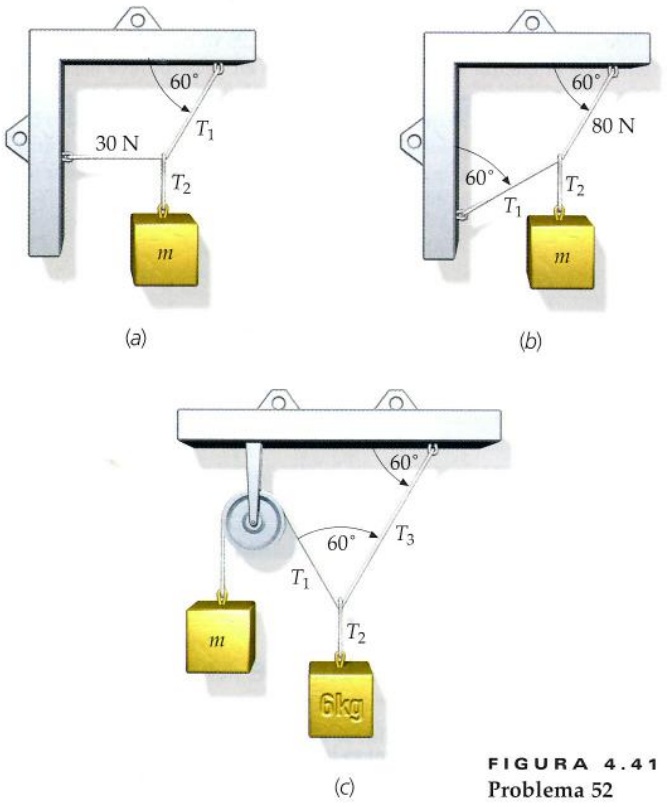


FIGURA 4.41
Problema 52

53 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un coche está estancado en terreno blando. El conductor está solo pero dispone de una cuerda larga y fuerte. Recordando sus conocimientos de física, ata la cuerda tensa a un poste telefónico y tira de ella lateralmente como indica la figura 4.42.

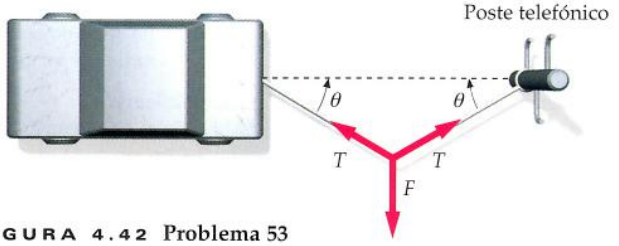
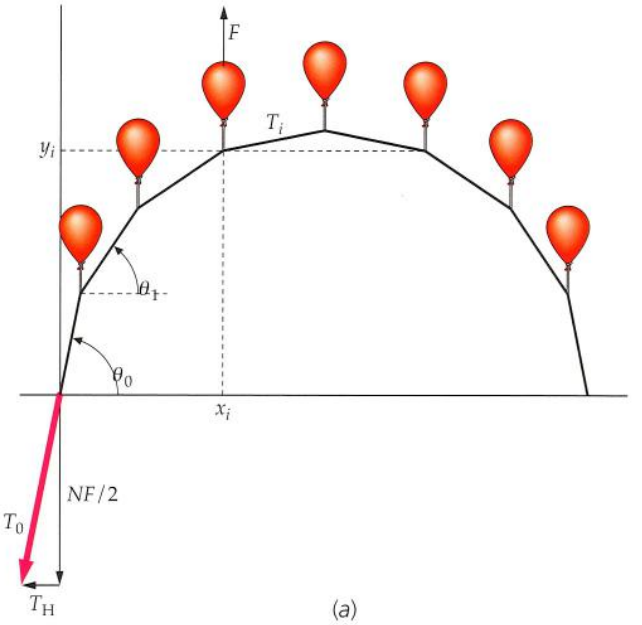


FIGURA 4.42 Problema 53

(*a*) Determinar la fuerza ejercida por la cuerda sobre el coche cuando el ángulo θ es 3° y el conductor tira con una fuerza de 400 N, pero el coche no se mueve. (*b*) ¿Qué resistencia debería tener la cuerda si se necesitara una fuerza de 600 N bajo un ángulo de $\theta = 4°$ para mover el coche?

54 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, MÚLTIPLES PASOS** En algunos festivales y celebraciones, en una cuerda larga, sujeta por sus dos extremos al suelo, se atan globos llenos de helio cuya fuerza ascensional levanta la cuerda dándole una forma de arco, tal como se ve en la figura 4.43*a*. Supongamos que hay N globos atados a intervalos iguales a una cuerda sin masa de longitud L, sujeta al suelo por sus dos extremos. Cada globo proporciona una fuerza ascensional F. Las coordenadas horizontales y verticales del punto de la cuerda donde se ata el globo i son x_i e y_i, y T_i es la tensión del segmento i de la cuerda (el segmento 0 es el segmento entre el punto de sujeción al suelo y el primer globo y el segmento N corresponde al trozo de cuerda que une el globo N con el otro extremo al que está sujeta la cuerda). (*a*) La figura 4.43*b* muestra el diagrama de fuerzas en el globo i. A partir de este diagrama, demostrar que la componente horizontal de la fuerza T_i (denominada T_H) es la misma para todos los segmentos. (*b*) Considerando la componente vertical de las fuerzas, utilizar las leyes de Newton para deducir la ecuación siguiente que relaciona la tensión de los segmentos i e $(i - 1)$: T_{i-1} sen $\theta_{i-1} - T_i$ sen $\theta_i = F$. (*c*) Demostrar que $\text{tg}\,\theta_0 = -\text{tg}\,\theta_{N+1} = NF/2T_H$. (*d*) A partir del diagrama y de las dos expresiones anteriores, demostrar que $\text{tg}\,\theta_i = (N - 2i)F/2T_H$ y que $y_i = \dfrac{L}{N+1}\sum_{j=0}^{i-1}\cos\theta_j$, $y_i = \dfrac{L}{N+1}\sum_{j=0}^{i-1}\text{sen}\,\theta_j$.



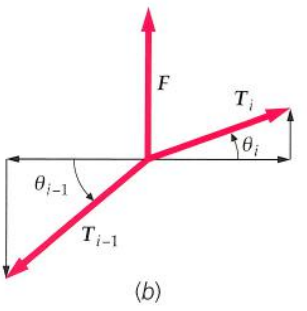


FIGURA 4.43 Problema 54

55 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, HOJA DE CÁLCULO** (*a*) Considérese una solución numérica del problema 54. Escribir un programa con una **hoja de cálculo** que dibuje la forma del arco teniendo en cuenta los siguientes parámetros: $N = 10$ globos; cada uno de los globos proporciona una fuerza de 1 N; la cuerda tiene 11 m de longitud y la componente horizontal de la tensión es $T_H = 10$ N. ¿A qué distancia están los puntos de sujeción con el suelo? ¿Cuál es la máxima altura del arco? (*b*) Obsérvese que no hemos indicado cuál es la separación entre los puntos de sujeción de la cuerda, ya que esta distancia viene determinada por otros parámetros. Variar T_H manteniendo fijos los otros parámetros hasta que pueda crear un arco cuyas sujeciones estén separadas 8 m. ¿Qué valor tiene T_H? A medida que T_H aumenta, el arco se hace más plano. ¿El modelo con la hoja de cálculo reproduce este comportamiento?

DIAGRAMAS DE FUERZAS: PLANOS INCLINADOS Y FUERZA NORMAL

56 • Una caja grande de 20 kg de masa está en reposo sobre una superficie sin rozamiento. Si se tira de la caja con una fuerza de 250 N con un ángulo de 35° por debajo de la horizontal, ¿cuál es la aceleración de la caja en la dirección de la superficie?

57 • Una caja de 20 kg está situada ahora en una rampa inclinada 15° sobre una superficie sin rozamiento. Se tira de la caja con una fuerza que forma un ángulo de 40° con la horizontal (véase la figura 4.44), ¿cuál es el menor valor de la fuerza que hace que la caja suba por la rampa?

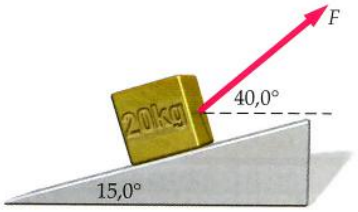
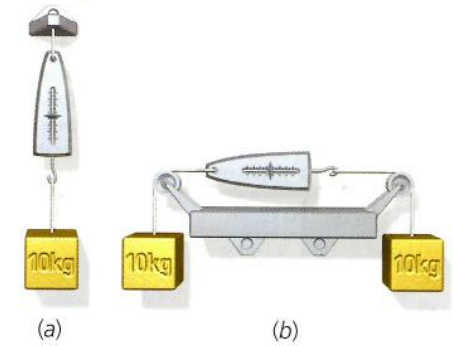


FIGURA 4.44 Problema 57

58 • En la figura 4.45, los objetos están sujetos a dinamómetros calibrados en newtons. Dar las lecturas de los dinamómetros en cada caso, suponiendo que las cuerdas carecen de masa.



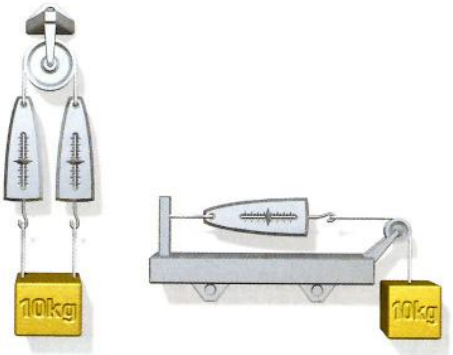


FIGURA 4.45 Problema 58

59 •• Un cuerpo se mantiene en posición mediante un cable a lo largo de un plano inclinado pulido (figura 4.46). (*a*) Si $\theta = 60°$ y $m = 50$ kg, determinar la tensión del cable y la fuerza normal ejercida por el plano inclinado. (*b*) Determinar la tensión en función de θ y m, y comprobar el resultado para $\theta = 0$ y $\theta = 90°$.

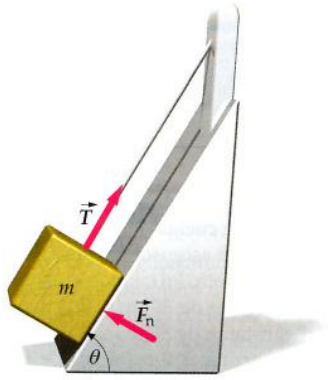


FIGURA 4.46 Problema 59

60 •• Una fuerza horizontal de 100 N actúa sobre un bloque de 12 kg haciéndole subir por un plano inclinado sin rozamiento, que forma un ángulo de 25° con la horizontal. (*a*) ¿Cuál es la fuerza normal que el plano inclinado ejerce sobre el bloque? (*b*) ¿Cuál es la aceleración del bloque?

61 •• Un estudiante de 65 kg se pesa subiéndose a una balanza que está dispuesta sobre un monopatín con ruedas, que baja por un plano inclinado (figura 4.47). Suponer que no hay rozamiento y que la fuerza ejercida por el plano inclinado sobre el monopatín es perpendicular al plano inclinado. ¿Cuál es la lectura de la balanza si $\theta = 30°$? SSM

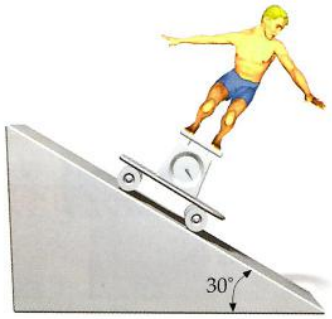


FIGURA 4.47 Problema 61

62 •• Un objeto de masa m resbala por una superficie sin rozamiento que acaba con una rampa con una inclinación θ respecto la horizontal (véase la figura 4.48). La velocidad inicial del objeto es v_0. Cuando el objeto alcanza la rampa sube hasta una altura h antes de bajar de nuevo. Demostrar que h es independiente de m y θ. Deducir la expresión para h.

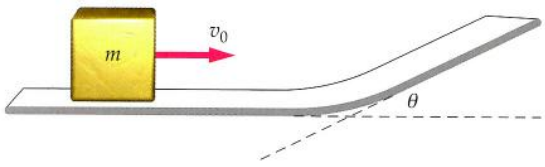


FIGURA 4.48 Problema 62

DIAGRAMAS DE FUERZAS: ASCENSORES

63 • **CONCEPTUAL** (*a*) Dibuja el diagrama de fuerzas para un objeto colgado del techo de un ascensor que sube lentamente. (*b*) Repetir el apartado (*a*) pero suponiendo que el ascensor desciende aumentando la velocidad. (*c*) ¿Puede indicar las diferencias entre ambos diagramas? Explicar por qué los diagramas no dicen nada sobre la velocidad del objeto. SSM

64 • Un peso de 10 kg se sostiene del techo de un ascensor mediante una cuerda capaz de resistir 150 N. Poco después de que el ascensor empiece a subir, la cuerda se rompe. ¿Cuál fue la aceleración mínima del ascensor?

65 •• Un cuerpo de 2 kg cuelga de un dinamómetro (calibrado en newtons) sujeto al techo de un ascensor (figura 4.49). Determinar la lectura que indicará el dinamómetro (*a*) cuando el ascensor se mueve hacia arriba con velocidad constante de 30 m/s, (*b*) cuando el ascensor desciende con velocidad constante de 30 m/s, (*c*) cuando el ascensor sube a 20 m/s y acelera hacia arriba a 10 m/s^2. (*d*) De $t = 0$ a $t = 5$ s, el ascensor se mueve hacia arriba a 10 m/s. Su velocidad se reduce entonces uniformemente a cero en los siguientes 4 segundos, de modo que queda en reposo para $t = 9$ s. Describir la lectura del dinamómetro durante el intervalo $0 < t < 9$ s.

FIGURA 4.49 Problema 65

DIAGRAMAS DE FUERZAS: VARIOS CUERPOS Y LA TERCERA LEY DE NEWTON

66 •• **CONCEPTUAL** Dos bloques de masas m_1 y m_2 conectados entre sí por una cuerda de masa despreciable se aceleran uniformemente sobre una superficie sin rozamiento, como se indica en la figura 4.50. (*a*) Dibujar el diagrama de fuerzas para los dos bloques y mostrar que la relación de las tensiones T_1/T_2 viene dada por $m_1/(m_1 + m_2)$. (*b*) Razonad si este resultado es lógico o no. Considerad los casos límite $m_2/m_1 >> 1$ y $m_1/m_2 >> 1$.

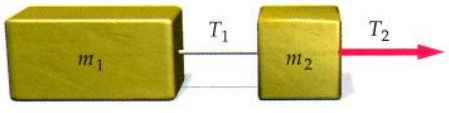


FIGURA 4.50 Problema 66

67 •• Un bloque de masa $m_2 = 3{,}5$ kg descansa sobre un estante horizontal sin rozamiento y está conectado mediante cuerdas a dos bloques de masas $m_1 = 1{,}5$ kg y $m_3 = 2{,}5$ kg, que cuelgan libremente, como se muestra en la figura 4.51. Las poleas carecen de rozamiento y su masa es despreciable. El sistema se mantiene inicialmente en reposo. Cuando se deja en libertad, determinar (*a*) la aceleración de cada uno de los bloques, y (*b*) la tensión de cada cuerda.

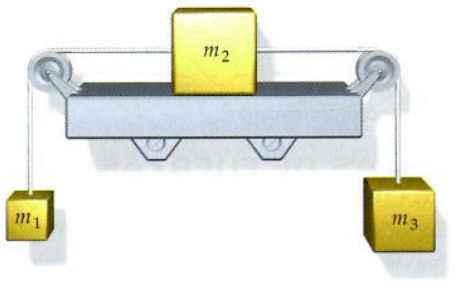


FIGURA 4.51 Problema 67

68 •• Dos bloques están en contacto sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Una fuerza $\vec{F}$ horizontal se aplica a uno de ellos como muestra la figura 4.52 y ambos son acelerados. Determinar la aceleración y la fuerza de contacto del bloque 1 sobre el 2 para (*a*) los valores generales de F, m_1 y m_2 y (*b*) para $F = 3{,}2$ N, $m_1 = 2$ kg y $m_2 = 6$ kg.

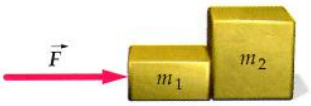


FIGURA 4.52 Problema 68

69 •• Repetir el problema 68, intercambiando la posición de los dos bloques.

70 •• Dos bloques de 100 kg son arrastrados a lo largo de una superficie sin rozamiento con una aceleración constante de 1,0 m/s^2, como se indica en la figura 4.53. Cada cuerda tiene una masa de 1 kg. Determinar la fuerza $\vec{F}$ y la tensión de las cuerdas en los puntos A, B y C.

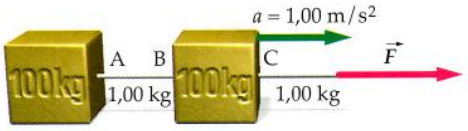


FIGURA 4.53 Problema 70

71 •• Se sube un objeto de masa m con una cuerda de masa M y de longitud L sujeta desde uno de sus extremos. La cuerda y el objeto se aceleran en la dirección vertical con aceleración a. La distribución de la masa en la cuerda es uniforme. Demostrar que la tensión en la cuerda a una distancia x (siendo $x < L$) por encima del bloque es $(a + g)[m + (x/L)M]$. SSM

72 •• Una cadena consta de 5 eslabones, cada uno con una masa de 0,1 kg. Se sube la cadena verticalmente con una aceleración de 2,5 m/s^2. La cadena se sujeta desde el eslabón superior y ningún punto de la cadena toca con el suelo. Determinar (*a*) la fuerza F ejercida en el extremo superior de la cadena, (*b*) la fuerza neta en cada eslabón y (*c*) la fuerza que cada eslabón ejerce sobre el eslabón inmediatamente inferior.

73 •• **MÚLTIPLES PASOS** Un objeto de 40,0 kg suspendido de una cuerda vertical está inicialmente en reposo. El objeto se acelera entonces hacia arriba hasta alcanzar una velocidad de 3,5 m/s en 0,700 s. (*a*) Dibujar el diagrama de fuerzas. (*b*) Utilizar el diagrama y las leyes de Newton para determinar la tensión de la cuerda. SSM

74 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, MÚLTIPLES PASOS** Un helicóptero de 15 000 kg está descendiendo un camión de 4000 kg al suelo mediante un cable de longitud fija. El helicóptero, el cable y el camión descienden a 15 m/s y deben reducir la velocidad de descenso a 5 m/s en los próximos 50 m para evitar daños sobre el camión. Supóganse que el ritmo de reducción de la velocidad es constante. (*a*) Dibujar el diagrama de fuerzas del cable. (*b*) Determinar la tensión del cable. (*c*) Determinar la fuerza ascendente que genera el helicóptero.

75 •• Dos objetos están conectados por una cuerda de masa despreciable, como se indica en la figura 4.54. El plano inclinado y la polea carecen de rozamiento. Determinar la aceleración de los objetos y la tensión de la cuerda para (*a*) valores generales de θ, m_1 y m_2 y (*b*) $\theta = 30°$ y $m_1 = m_2 = 5$ kg.

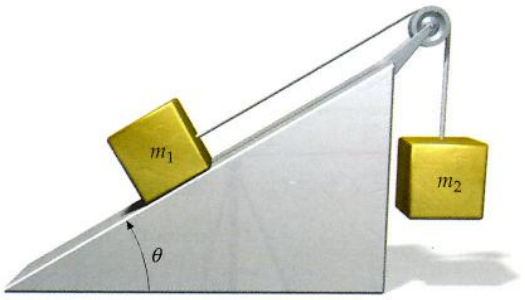


FIGURA 4.54 Problema 75

76 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** En una representación escénica del cuento de *Peter Pan*, la actriz que hace el papel de Peter, que pesa 50 kg, ha de "volar" verticalmente (descendiendo) de forma que para coincidir con el fondo musical debe bajar una distancia de 3,2 m en 2,2 s. Entre bastidores, una superficie pulida, inclinada 50°, soporta un contrapeso de masa m, como indica la figura 4.55. Indicar los cálculos que debe realizar el director de escena para determinar (*a*) la masa del contrapeso que debe utilizarse y (*b*) la tensión del cable.

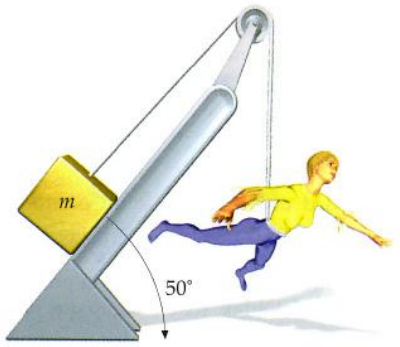


FIGURA 4.55 Problema 76

77 •• Un bloque de 8 kg y otro de 10 kg, conectados por una cuerda que pasa por una polea sin rozamiento, se deslizan por planos inclinados sin rozamiento como indica la figura 4.56. (*a*) Determinar la aceleración de los bloques y la tensión de la cuerda. (*b*) Los dos bloques se reemplazan por otras de masas m_1 y m_2, de tal modo que no se produce aceleración. Determinar toda la información posible sobre las masas de estos dos nuevos bloques.

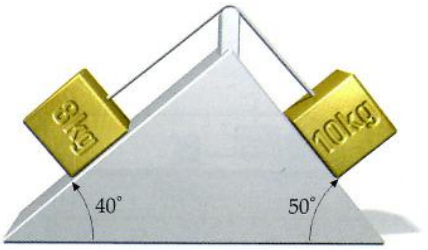


FIGURA 4.56 Problema 77

78 •• Una cuerda pesada de longitud 5 m y masa 4 kg se encuentra sobre una mesa horizontal sin rozamiento. Un extremo se conecta a un bloque de 6 kg. En el otro extremo de la cuerda se aplica una fuerza horizontal constante de 100 N. (*a*) ¿Cuál es la aceleración del sistema? (*b*) Expresar la tensión de la cuerda en función de su posición a lo largo de ésta.

79 •• Una pintora de 60 kg está de pie sobre un montacargas de aluminio de 15 kg. El montacargas está sujeto por una cuerda que pasa por una polea situada en lo alto de la casa, lo que le permite elevarse a sí misma y a la plataforma (figura 4.57). (*a*) ¿Con qué fuerza debe tirar de la cuerda para que el conjunto ascienda con una aceleración de 0,8 m/s^2? (*b*) Cuando su velocidad alcanza el valor de 1 m/s, tira de la cuerda de modo que ella y su montacargas ascienda a velocidad constante. ¿Qué fuerza ejerce entonces la cuerda? (Ignorar la masa de la cuerda.) SSM

FIGURA 4.57 Problema 79

80 ••• La figura 4.58 muestra un bloque de 20 kg que se desliza sobre otro de 10 kg. Todas las superficies se consideran sin rozamiento. Determinar la aceleración de cada bloque y la tensión en la cuerda que los conecta.

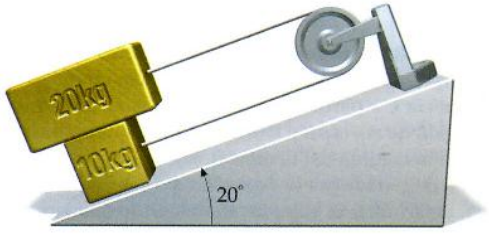


FIGURA 4.58 Problema 80

81 ••• Un bloque de 20 kg dotado de una polea se desliza a lo largo de una superficie sin rozamiento. Está conectado mediante una cuerda a un bloque de 5 kg según el dispositivo que se muestra en la figura 4.59. Determinar (*a*) la aceleración de cada uno de los bloques y (*b*) la tensión de la cuerda.

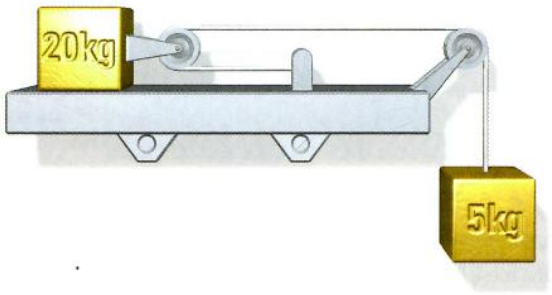


FIGURA 4.59 Problema 81

82 •• **MÚLTIPLES PASOS** El aparato de la figura 4.60 se denomina máquina de Atwood y se utiliza para medir la aceleración debida a la gravedad g a partir de la aceleración de dos bloques conectados con una cuerda que pasa por una polea. (*a*) Dibujar el diagrama de fuerzas de cada bloque. (*b*) Utilizar el diagrama de fuerzas y las leyes de Newton para demostrar que el módulo de la aceleración de cualquier bloque y la tensión son: $a = (m_1 - m_2)g/(m_1 + m_2)$ y $T = 2m_1m_2g/(m_1 + m_2)$. (*c*) Estas expresiones, ¿proporcionan resultados correctos si $m_1 = m_2$? ¿Y en el límite $m_1 >> m_2$? ¿Y en el límite $m_1 << m_2$? Razonar las respuestas.

FIGURA 4.60 Problemas 82 y 83

83 •• Si una de las masas de la máquina de Atwood de la figura 4.60 es 1,2 kg, ¿cuál sería la otra masa para que el desplazamiento de cualquiera de ellas durante el primer segundo después de comenzar el movimiento fuese 0,3 m? Supóngase que la polea no tiene masa ni produce rozamiento y que las cuerdas tampoco tienen masa.

84 ••• La aceleración de la gravedad g puede determinarse midiendo el tiempo t que tarda una masa m_2 de la máquina de Atwood en caer una distancia L a partir del reposo. (*a*) Determinar una expresión para g en función de m_1, m_2, L y t. (*b*) Demostrar que si se comete un pequeño error en la medida del tiempo dt, ello conducirá a un error en la determinación de g, dado por la expresión $dg/g = -2\,dt/t$. (*c*) Si $L = 3$ m y $m_1 = 1$ kg, determinar el valor de m_2, de modo que g pueda medirse con una exactitud de ± 5% y una medida del tiempo con un error inferior a 0,1 s.

PROBLEMAS GENERALES

85 •• Una pequeña piedra de masa m descansa sobre el bloque de masa m_2 de la máquina de Atwood de la figura 4.60. Determinar la fuerza ejercida por la piedra sobre el bloque de masa m_2.

86 •• Puede construirse un acelerómetro sencillo colgando un cuerpo pequeño de una cuerda sujeta a un punto fijo en un objeto que se acelera, por ejemplo, en el punto P del techo de un automóvil que se mueve por una superficie plana con aceleración constante. Debido a la aceleración, la cuerda formará un ángulo θ con la vertical. (*a*) Demostrar que la aceleración a está relacionada con el ángulo θ que la cuerda forma con la vertical por $a = g$ tg θ. (*b*) Supóngase que el automóvil frena hasta llegar al reposo desde la velocidad de 50 km/h en una distancia de 60 m. ¿Qué ángulo formará la cuerda con la vertical? ¿La masa se situará por delante o por detrás del punto P?

87 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** El mástil de un balandro está sujeto a proa y a popa por dos cables de acero inoxidable con sus anclajes separados una distancia de 10 m (figura 4.61). El mástil, de 12 m de altura, pesa 800 N y se apoya verticalmente sobre la cubierta del balandro. El mástil dista 3,5 m del anclaje del cable delantero (el más próximo a la proa). La tensión de este cable es de 500 N. Determinar la tensión en el cable trasero y la fuerza que el mástil ejerce sobre la cubierta del balandro. SSM

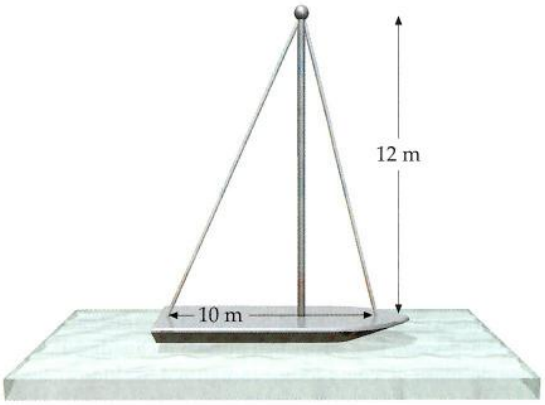


FIGURA 4.61 Problema 87

88 •• Una cadena larga y uniforme cuelga del techo aguantando un objeto de 50 kg de masa. La masa de la cadena es de 20 kg, y su longitud es 1,5 m. Determinar la tensión en la cadena (*a*) en el punto donde la cadena está sujeta al objeto, (*b*) en la mitad de la cadena, y (*c*) en el punto donde la cadena está sujeta al techo.

89 •• La velocidad de la cabeza de un pájaro carpintero antes de impactar contra un árbol es de 5,5 m/s. Si la masa de la cabeza es de 0,06 kg y la fuerza media sobre la cabeza es de 6 N, determinar (*a*) la aceleración, supuesta constante, de la cabeza, (*b*) la profundidad de penetración del pico dentro del árbol, (*c*) el tiempo que tarda la cabeza en detenerse.

90 •• **MÚLTIPLES PASOS** Supongamos que una superficie sin rozamiento está inclinada un ángulo de 30° con la horizontal. Un bloque de 270 g está atado a un peso de 75 g que cuelga de una polea, como se muestra en la figura 4.62. (*a*) Dibujar los dos diagramas de fuerza, uno para el bloque y el otro para el peso que cuelga. (*b*) Determinar la tensión en la cuerda y la aceleración del bloque. (*c*) El bloque parte del re-

FIGURA 4.62 Problema 90

poso. ¿Cuánto tiempo le cuesta deslizarse una distancia de 1 m por la superficie? ¿Se deslizará hacia arriba o hacia abajo?

91 •• Un bloque de masa m_1 es impulsado por una fuerza $\vec{F}$ aplicada en el extremo de una cuerda que tiene una masa m_2 mucho menor, como se indica en la figura 4.63. El bloque se desliza a lo largo de una superficie horizontal pulida. (*a*) Determinar la aceleración de la cuerda y el bloque conjuntamente. (*b*) ¿Cuál es la fuerza neta que actúa sobre la cuerda? (*c*) Determinar la tensión de la cuerda en el punto donde está atada al bloque.

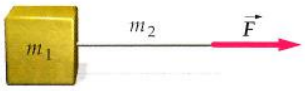


FIGURA 4.63 Problema 91

92 •• Un cuerpo de 2 kg descansa sobre un plano inclinado 60° sin rozamiento que se desliza con una aceleración $\vec{a}$ hacia la derecha de tal modo que la masa permanece estacionaria con relación al plano (figura 4.64). (*a*) Dibujar el diagrama de fuerzas y utilizarlo para determinar el módulo de la aceleración. (*b*) ¿Qué ocurriría si el plano adquiriese una aceleración superior?

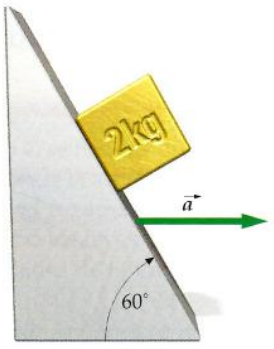


FIGURA 4.64 Problema 92

93 ••• Las masas colocadas a cada lado de una máquina de Atwood son una pila de cinco arandelas, cada una de masa m, como se muestra en la figura 4.65. La tensión de la cuerda es T_0. Si se quita una arandela del lado izquierdo, las restantes arandelas aceleran y la tensión disminuye en 0,3 N. (*a*) Determinar m. (*b*) Calcular la nueva tensión y la aceleración de cada masa cuando se quita una segunda arandela del lazo izquierdo. SSM

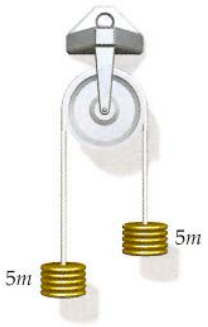


FIGURA 4.65 Problemas 93 y 94

94 •• Consideremos la máquina de Atwood de la figura 4.65. Cuando se transfieren N arandelas del lado izquierdo al lado derecho, este último desciende 47,1 cm en 0,40 s. Determinar N.

95 •• Dos bloques de masas m y $2m$ están sujetos por una cuerda (figura 4.66) y se encuentran sobre una superficie horizontal perfectamente pulida. Sobre los bloques se aplican las fuerzas F_1 y F_2. (*a*) Si las fuerzas son constantes, determinar la tensión de la cuerda. (*b*) Si las fuerzas varían con el tiempo según $F_1 = Ct$ y $F_2 = 2Ct$, donde C es 5 N/s y t el tiempo, determinar el tiempo t_0 en el cual la tensión de la cuerda es 10 N.

FIGURA 4.66 Problema 95

96 •• Desde que murió el 16 de agosto de 1977, Elvis Presley ha sido visto supuestamente numerosas veces. La tabla adjunta ilustra el peso que tendría Elvis si fuese visto sobre la superficie de otros cuerpos de nuestro sistema solar. Utilice la tabla para determinar (*a*) la masa de Elvis en la Tierra, (*b*) la masa de Elvis en Plutón y (*c*) la aceleración de la gravedad de Marte. (*d*) Compare la aceleración de la gravedad de Plutón con la de la Luna.

Planeta	Peso de Elvis (N)
Mercurio	431
Venus	1031
Tierra	1133
Marte	431
Júpiter	2880
Saturno	1222
Plutón	58
Luna	191

97 ••• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Sus amigos le han hecho una broma y le han secuestrado mientras dormía dejándole sobre el hielo que cubre parcialmente un lago. Cuando se despierta se encuentra a 30 m de la orilla más cercana. El hielo se desliza sobre el agua sin rozamiento. Se da cuenta de que puede utilizar la tercera ley de Newton para llegar a la orilla y decide lanzar lo más pesado que tenga, como por ejemplo una bota de 1,2 kg. Suponga que su peso es de 595 N. (*a*) ¿En qué dirección deberá lanzar la bota para moverse en la dirección adecuada? (*b*) Si lanza la bota con una fuerza media de 420 N y el lanza-

miento dura 0,6 s (el intervalo de tiempo durante el cual aplica la fuerza), ¿cuál es el módulo de la fuerza que la bota ejerce sobre usted? (suponga la aceleración constante) (*c*) ¿Cuánto tiempo tardará en llegar a la orilla, incluyendo el tiempo que dura el lanzamiento?

98 ••• La polea de una máquina de Atwood experimenta una aceleración hacia arriba $\vec{a}$, como se muestra en la figura 4.67. Determinar la aceleración de cada masa y la tensión en la cuerda de la máquina. En este caso, las velocidades de los dos bloques no son iguales.

FIGURA 4.67 Problema 98

99 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO, HOJA DE CÁLCULO** Usted trabaja para una revista de automóviles y se encarga de realizar las pruebas a un coche de 650 kg. Mientras acelera desde el reposo, el ordenador de abordo registra la velocidad en función del tiempo proporcionando los siguientes resultados:

v_x (m/s):	0	10	20	30	40	50
t (s):	0	1,8	2,8	3,6	4,9	6,5

(*a*) Utilizando un **hoja de cálculo** encuentre la aceleración media de los cinco intervalos y trace el gráfico de la velocidad frente al tiempo y la aceleración frente al tiempo. (*b*) Indique, en el gráfico de la velocidad frente al tiempo, dónde la fuerza neta es más alta y dónde más baja. (*c*) ¿Cuál es la fuerza media sobre el coche a lo largo de todo el recorrido? (*d*) A partir del gráfico de la velocidad frente al tiempo, estime la distancia total recorrida por el coche.

CAPÍTULO 5

EL CENTRO MUNDIAL DE CARRERAS DE AUTOMÓVILES, EL DAYTONA INTERNATIONAL SPEEDWAY, TIENE UN CIRCUITO TRI-OVAL DE CUATRO KILÓMETROS DE CURVAS PERALTADAS CON 31° DE INCLINACIÓN. EN LA CARRERA DAYTONA 500 LOS AUTOMÓVILES TOMAN LAS CURVAS A UNOS 320 KM/H. SORPRENDENTEMENTE, LOS ESPECTACULARES ACCIDENTES, POR LOS QUE DAYTONA 500 ES TAN FAMOSA, NO SE DEBEN A DERRAPES EN LAS CURVAS. *(PhotoDisc/Getty Images.)*

Aplicaciones adicionales de las leyes de Newton

5.1 Rozamiento
5.2 Fuerzas de arrastre
5.3 Movimiento a lo largo de una trayectoria curva
*5.4 Integración numérica: el método de Euler
5.5 El centro de masas

? ¿Qué factores determinan la velocidad con la que un coche puede girar por una curva sin patinar? (Véase el ejemplo 5.12.)

En el capítulo 4, se han introducido las leyes de Newton y se las ha aplicado a situaciones donde la acción se restringía a movimientos rectilíneos y donde no se consideraba el rozamiento. Ahora, estudiaremos aplicaciones más generales y veremos cómo las leyes de Newton se pueden utilizar para explicar innumerables propiedades de fenómenos que ocurren en el mundo en que vivimos.

En este capítulo, extenderemos las leyes de Newton al estudio del movimiento en trayectorias curvas y analizaremos los efectos de las fuerzas de resistencia como la fricción y el arrastre. También introduciremos el concepto de centro de masas de un sistema de partículas y mostraremos cómo, el describir el sistema como una sola partícula localizada en el centro de masas, permite describir el movimiento del sistema como un todo.

5.1 ROZAMIENTO

Si se empuja un libro que está en reposo sobre una mesa, el libro probablemente se deslizará sobre la mesa. Si la mesa es suficientemente larga, el libro se deslizará hasta pararse. Esto sucede porque la fuerza de rozamiento es ejercida por la mesa sobre el libro en dirección contraria a la velocidad del libro. Esta fuerza, que actúa sobre la superficie del libro que está en contacto con la mesa, se conoce como *fuerza de rozamiento* o *fuerza de fricción*. Las fuerzas de rozamiento forman parte de nuestra vida. Ni caminar ni moverse en automóvil sería posible sin el rozamiento. Para echar a andar por una superficie horizontal hace falta el rozamiento y, una vez en marcha, para cambiar la dirección o la velocidad del movimiento también hace falta rozamiento. El rozamiento permite iniciar el movimiento de un coche, maniobrar con él y pararlo. Se necesita rozamiento para mantener una tuerca en un tornillo o un clavo en la madera. Sin embargo, aunque el rozamiento sea muy importante, muchas veces se intenta evitar. El rozamiento produce el desgaste de las piezas móviles de cualquier maquinaria cuando están en contacto; por ello, se emplean importantes sumas de dinero y tiempo para reducir sus efectos.

El rozamiento es un fenómeno complejo, insuficientemente conocido, que surge como consecuencia de la fuerza de atracción entre las moléculas que forman dos superficies en contacto. La naturaleza de esta atracción es electromagnética —la misma naturaleza de enlace molecular que mantiene la materia unida. Esta fuerza de atracción es de corto alcance y resulta prácticamente inapreciable a distancias de pocos diámetros atómicos.

Como se muestra en la figura 5.1, los objetos ordinarios, aunque tengan superficies muy pulidas, de aspecto liso y suave, a escala atómica son ásperos y rugosos. Cuando entran en contacto dos superficies sólo se tocan por aquellos puntos más prominentes, denominados asperezas, que se muestran en la figura 5.1. La fuerza normal ejercida por la superficie se produce precisamente en estas asperezas, donde la fuerza por unidad de área es muy grande, suficiente para allanar las protuberancias. A medida que la fuerza normal aumenta, también lo hace este aplanado, lo cual conduce a que el área de contacto microscópica aumente. En condiciones muy diversas, el área de contacto microscópica es proporcional a la fuerza normal. La fuerza de rozamiento es proporcional al área microscópica de contacto, por lo que también es proporcional a la fuerza normal.

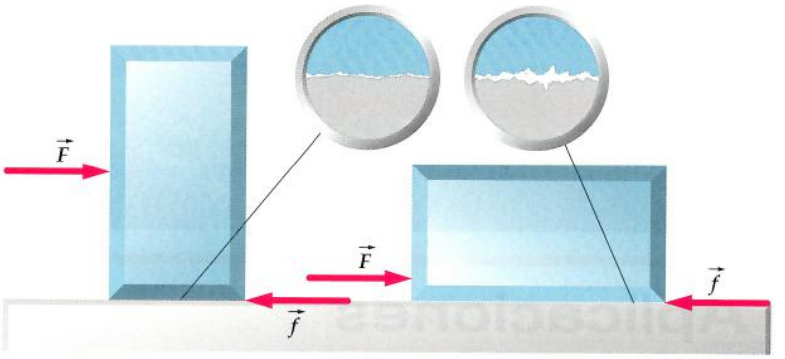
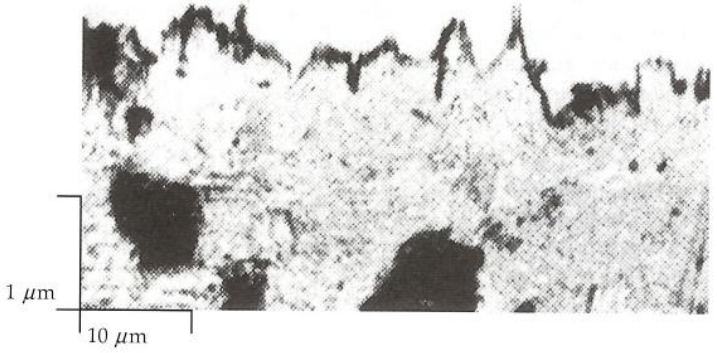
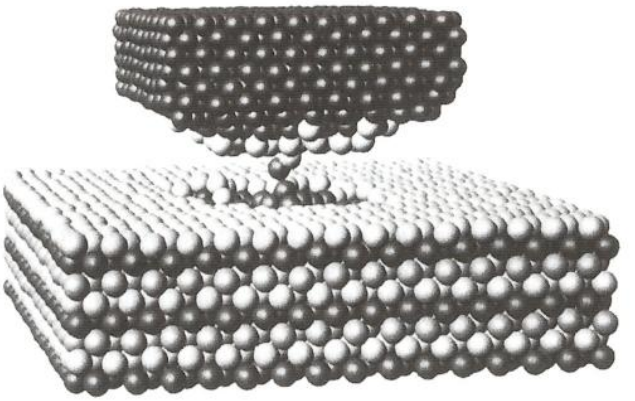


FIGURA 5.1 El área microscópica de contacto entre el bloque y el suelo es sólo una pequeña fracción del área macroscópica del bloque. Esta fracción es proporcional a la fuerza normal ejercida entre las superficies. Si el bloque descansa sobre una base mayor, el área macroscópica de contacto se incrementa, pero la fuerza por unidad de área disminuye en el mismo factor, de tal modo que el área microscópica de contacto no se modifica. Tanto si el bloque descansa sobre una base o sobre otra, hay que aplicar la misma fuerza horizontal F para mantenerlo en movimiento a velocidad constante.



Sección aumentada de una superficie de acero pulida que muestra las irregularidades superficiales. La altura media de estas irregularidades es del orden de 5×10^{-5} cm, correspondiente a varios miles de diámetros atómicos. *(From F. P. Bowden and D. Tabor,* Lubrication of Solids, *Oxford University Press, 2000.)*



Dibujo de ordenador que muestra cómo unos cuantos átomos de oro (abajo) se adhieren a la punta fina (arriba) de una sonda de níquel que ha estado en contacto con la superficie de oro. *(Uzi Landman and David W. Leudtke/Georgia Institute of Technology.)*

ROZAMIENTO ESTÁTICO

Cuando aplicamos una pequeña fuerza horizontal $\vec{F}$ a un gran bloque que descansa sobre el suelo, el bloque no se mueve, debido a la fuerza de rozamiento estático $\vec{f}_e$, ejercida por el suelo sobre el bloque, que equilibra la fuerza que estamos aplicando. El **rozamiento estático** es la fuerza de rozamiento que actúa cuando aún no hay deslizamiento entre las dos superficies en contacto; es la fuerza que evita que el bloque se deslice. La fuerza de rozamiento estático, que se opone a la fuerza aplicada sobre el bloque, puede variar desde cero hasta cierto valor máximo $f_{e\,máx}$, dependiendo de la fuerza ejercida. Es decir, conforme se empuja al bloque, la fuerza de rozamiento estático aumenta a fin de igualar al módulo de la fuerza externa aplicada hasta que ésta supera el valor $f_{e\,máx}$. Los experimentos muestran que $f_{e\,máx}$ es proporcional a la fuerza normal ejercida por una superficie sobre la otra:

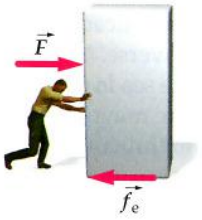


FIGURA 5.2

$$f_{e\,máx} = \mu_e F_n \qquad 5.1$$

EXPRESIÓN PARA EL ROZAMIENTO ESTÁTICO

donde la constante de proporcionalidad μ_e, es el llamado **coeficiente de rozamiento estático**. Este coeficiente depende de la naturaleza de las superficies en contacto y de sus temperaturas. Si ejercemos una fuerza horizontal menor que $f_{e\,máx}$ sobre el bloque, la fuerza de rozamiento equilibrará esta fuerza horizontal y el bloque se mantendrá en reposo. Si ejercemos una fuerza ligeramente superior a $f_{e\,máx}$, el bloque empezará a deslizarse. Entonces podremos escribir la ecuación 5.1 como

$$f_e \leq \mu_e F_n \qquad 5.2$$

La dirección de la fuerza de rozamiento estático es tal que se opone a que el bloque tienda a deslizarse.

¡ La ecuación 5.2 es una desigualdad porque el módulo de la fuerza de rozamiento va de cero a $f_{e\,máx}$.

¡ Si la fuerza horizontal ejercida sobre el bloque va hacia la izquierda, entonces la fuerza de rozamiento estático va hacia la derecha. La fuerza de rozamiento estático siempre se opone a cualquier tendencia al movimiento.

ROZAMIENTO CINÉTICO

Si se empuja el bloque de la figura 5.2 con fuerza suficiente, éste se deslizará sobre el suelo. Al deslizarse, el suelo ejerce una fuerza de **rozamiento cinético**, $\vec{f}_c$ (también llamada de rozamiento por deslizamiento) que se opone al sentido del movimiento. Para que el bloque se deslice con velocidad constante, debe ejercerse una fuerza sobre el bloque igual en módulo y de sentido opuesto a la fuerza de rozamiento cinético ejercida por el suelo.

El módulo de la fuerza de rozamiento cinético f_c es proporcional al área microscópica de contacto y a la intensidad de las fuerzas que provienen de las superficies. Es decir, f_c es proporcional a la fuerza normal que una de las superficies ejerce sobre la otra:

$$f_c = \mu_c F_n \qquad 5.3$$

EXPRESIÓN PARA EL ROZAMIENTO CINÉTICO

donde μ_c es el **coeficiente de rozamiento cinético**. Este coeficiente depende de los materiales con que se fabrican las superficies en contacto así como de las temperaturas de las mismas. A diferencia del rozamiento estático, la fuerza de rozamiento cinético es independiente de la fuerza exterior aplicada. Los experimentos muestran que μ_c es prácticamente constante para un amplio rango de velocidades.

La figura 5.3 muestra un gráfico de la fuerza de rozamiento ejercida sobre el bloque por el suelo en función de la fuerza aplicada. La fuerza de rozamiento equilibra a la fuerza aplicada hasta que ésta alcanza el valor $\mu_e F_n$, que es cuando la caja empieza a moverse. A partir de entonces, la fuerza de rozamiento es $\mu_c F_n$. Para cualquiera que sea la superficie de contacto, $\mu_c < \mu_e$. Esto quiere decir que debemos aplicar siempre mayor fuerza para iniciar el movimiento del bloque que para mantenerlo en movimiento a velocidad constante. La tabla 5.1 da una relación de algunos valores aproximados de μ_e y de μ_c para varias parejas de superficies.

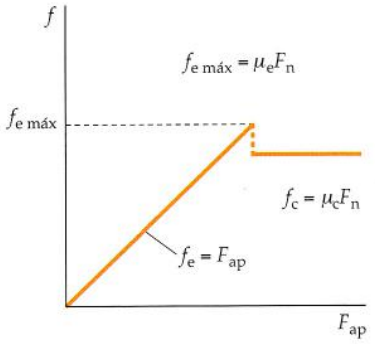


FIGURA 5.3

Tabla 5.1 Valores aproximados de los coeficientes de rozamiento

Materiales	μ_e	μ_c
Acero sobre acero	0,7	0,6
Latón sobre acero	0,5	0,4
Cobre sobre hierro fundido	1,1	0,3
Vidrio sobre vidrio	0,9	0,4
Teflón sobre teflón	0,04	0,04
Teflón sobre acero	0,04	0,04
Caucho sobre hormigón (seco)	1,0	0,80
Caucho sobre hormigón (húmedo)	0,30	0,25
Esquí encerado sobre nieve (0 °C)	0,10	0,05

EL ROZAMIENTO POR RODADURA

Cuando una rueda ideal rígida rueda sin deslizarse a velocidad constante por una carretera ideal, rígida y horizontal, no hay ninguna fuerza de rozamiento que frene su movimiento. Sin embargo, los neumáticos reales y las carreteras se deforman continuamente, y la banda de rodadura del neumático y la carretera se gastan, lo cual significa que la carretera ejerce un **rozamiento de rodadura** $\vec{f}_r$ que se opone al movimiento. Para mantener la rueda rodando con velocidad constante, hay que ejercer una fuerza sobre la rueda que iguale en magnitud y que se oponga en dirección a la fuerza de rozamiento de rodadura ejercida por el asfalto.

El **coeficiente de rozamiento de rodadura** μ_r es el coeficiente de proporcionalidad entre el módulo de la fuerza de rozamiento de rodadura F_r y el módulo de la fuerza normal F_n.

$$f_r = \mu_r F_n \qquad 5.4$$

EXPRESIÓN PARA EL ROZAMIENTO DE RODADURA

donde μ_r depende de la naturaleza de las superficies de contacto y de la composición de la rueda y de la carretera. Los valores típicos de μ_r están entre 0,01 y 0,02 para los neumáticos de caucho en hormigón, y entre 0,001 y 0,002 para ruedas de acero sobre raíles de acero. Los coeficientes de rozamiento por rodadura son inferiores a los coeficientes de rozamiento cinéticos en un par de órdenes de magnitud. El rozamiento por rodadura será despreciado en los problemas salvo que se indique lo contrario.

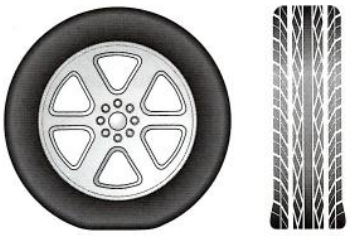


FIGURA 5.4 Conforme el coche corre por la autopista, el neumático flexiona radialmente hacia dentro en los lugares donde el dibujo del neumático entra en contacto con el pavimento, mientras que flexiona radialmente hacia fuera allí donde el neumático pierde el contacto con el pavimento. El neumático no es perfectamente elástico, de forma que las fuerzas que actúan sobre el dibujo flexionándolo hacia dentro son mayores que las fuerzas que ejerce el pavimento sobre el neumático en el momento que este se despega. Esta diferencia de fuerzas produce una fuerza opuesta a la rodadura del neumático llamada fuerza de rozamiento por rodadura. Cuanto más flexiona el neumático mayor será la fuerza de rozamiento por rodadura.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ROZAMIENTO ESTÁTICO Y CINÉTICO

Los siguientes ejemplos ilustran cómo se resuelven problemas donde interviene rozamiento estático y cinético. Las pautas a seguir para resolver este tipo de problemas son:

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Resolución de problemas de rozamiento

PLANTEAMIENTO Determinar los tipos de rozamiento que aparecen en el problema. Los objetos experimentan rozamiento estático cuando no hay deslizamiento entre ellos y las superficies con las que están en contacto. La fuerza de rozamiento estático se opone a la tendencia de que las superficies se deslicen unas sobre otras. La fuerza de rozamiento estático máxima $f_{e\,máx}$ es igual al producto entre la fuerza normal y el coeficiente de rozamiento estático. Si dos superficies se deslizan una sobre la otra, experimentan una fuerza de rozamiento cinético (a menos que el problema indique lo contrario). El rozamiento por rodadura aparece cuando el objeto rodante y la superficie sobre la que rueda se deforman continuamente.

SOLUCIÓN

1. Construir un diagrama de fuerzas con el eje y perpendicular a las superficies de contacto y el eje x paralelo a ellas. La dirección de la fuerza de rozamiento se opone al deslizamiento o a la tendencia al deslizamiento.
2. Aplicar $\Sigma F_y = ma_y$ y despejar la fuerza normal F_n.
   Si el rozamiento es cinético o de rodadura, se han de relacionar las fuerzas de rozamiento y la normal mediante $f_c = \mu_c F_n$ o $f_r = \mu_r F_n$, respectivamente.
   Si el rozamiento es estático, relacionar las fuerzas de rozamiento y la fuerza normal mediante $f_e \leq \mu_e F_n$ (o $f_{e\,máx} = \mu_e F_n$).
3. Aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ a cada objeto y despejar la cantidad deseada.

COMPROBACIÓN Asegúrese de que su respuesta tiene sentido, recuerde que los coeficientes de rozamiento son magnitudes adimensionales y deber tener en cuenta todas las fuerzas (por ejemplo, las tensiones en las cuerdas).

Ejemplo 5.1 El juego del *Shuffleboard*

Un pasajero de un crucero usa un taco de *shuffleboard* para impulsar horizontalmente un disco de 0,40 kg a una velocidad de 8,5 m/s por la pista de juego situada en la cubierta del barco. El disco recorre ocho metros antes de pararse. Determinar el coeficiente de rozamiento entre el disco y la cubierta.

PLANTEAMIENTO La fuerza de rozamiento cinético es la única fuerza horizontal que actúa sobre el disco (figura 5.5). Como la fuerza de rozamiento es constante, la aceleración es también constante. Podemos determinar la aceleración a partir de las ecuaciones de aceleración constante del capítulo 2 y relacionarla con μ_c usando $\Sigma F_x = ma_x$.

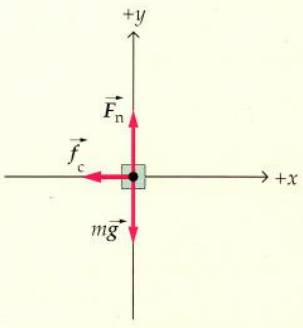


FIGURA 5.5

SOLUCIÓN

1. En la figura 5.5 se muestra el diagrama de fuerzas para el disco cuando el taco ya lo ha soltado. Las flechas en los ejes indican las direcciones positivas de los ejes x e y:

2. El coeficiente de rozamiento está relacionado con la fuerza de rozamiento y la normal: $f_c = \mu_c F_n$

3. Aplicar $\Sigma F_y = ma_y$ al disco. Despejar la fuerza normal. Usando el resultado del paso 2, obtener la fuerza de rozamiento:
   $\Sigma F_y = ma_y$
   $F_n - mg = 0 \Rightarrow F_n = mg$
   por lo tanto, $f_c = \mu_c mg$

4. Aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ al disco. Despejar la aceleración usando el resultado del paso 3:
   $\Sigma F_x = ma_x$
   $-f_c = ma_x$
   por lo tanto, $-\mu_c mg = ma_x$ y $a_x = -\mu_c g$

5. Relacionar la aceleración constante con la distancia total recorrida y la velocidad inicial mediante la ecuación 2.15. Utilizando el resultado del paso 4, calcular μ_c:

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x\Delta x \Rightarrow 0 = v_{0x}^2 - 2\mu_c g\,\Delta x$$

$$\text{por lo tanto, } \mu_c = \frac{v_{0x}^2}{2g\,\Delta x} = \frac{(8{,}5\text{ m/s})^2}{2(9{,}81\text{ m/s}^2)(8{,}0\text{ m})} = \boxed{0{,}46}$$

COMPROBACIÓN El valor obtenido para μ_c es adimensional y su valor se halla dentro del rango de valores de los materiales de la tabla 5.1.

OBSERVACIÓN Obsérvese que la aceleración y el coeficiente de rozamiento son independientes de la masa m. Cuanto mayor es la masa más cuesta detener el disco, pero a mayor masa mayor fuerza normal y, por tanto, mayor fuerza de rozamiento. El resultado final es que la masa no tiene efecto alguno sobre la aceleración (ni sobre la distancia de frenado).

Ejemplo 5.2 Una moneda que resbala

Sobre la cubierta superior de un libro de tapas duras (figura 5.6) que está sobre una mesa hay una moneda. Poco a poco se levanta la tapa del libro hasta que la moneda empieza a deslizarse. El ángulo $\theta_{máx}$ (conocido como ángulo de reposo) es el ángulo que forma la tapa con la horizontal en el momento en que la moneda empieza a moverse. Calcular el coeficiente de rozamiento estático μ_e entre la tapa del libro y la moneda en función de $\theta_{máx}$.

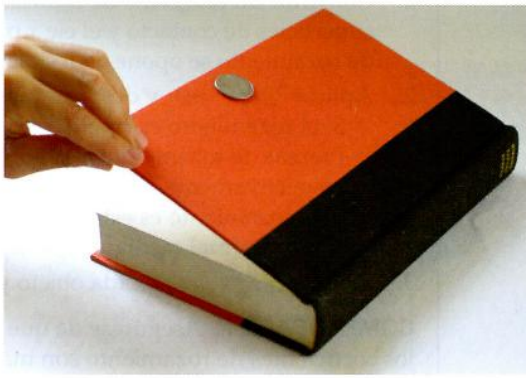


FIGURA 5.6 *(Ramón Rivera-Moret.)*

PLANTEAMIENTO Las fuerzas que actúan sobre la moneda son su peso mg, la fuerza normal F_n ejercida por el plano y la fuerza de rozamiento f. Como la moneda está a punto de deslizarse (aunque aún no se desplaza), la fuerza de rozamiento es estática. La moneda está en reposo y, por tanto, su aceleración es cero. Utilizamos la segunda ley de Newton para relacionar la aceleración de la moneda con las fuerzas que actúan sobre ella y encontrar la fuerza de rozamiento.

SOLUCIÓN

1. Dibujar el diagrama de fuerzas para la moneda cuando la tapa del libro está inclinada un ángulo θ, donde $\theta \leq \theta_{máx}$ (figura 5.7). Dibujar el eje y perpendicular a la tapa del libro:

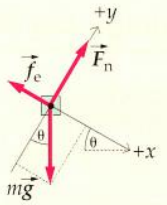


FIGURA 5.7

2. El coeficiente de rozamiento estático relaciona la fuerza de rozamiento con la normal: $f_e \leq \mu_e F_n$

3. Aplicando $\sum F_y = ma_y$ a la moneda se obtiene la fuerza normal:
$$\sum F_y = ma_y$$
$$F_n - mg\cos\theta = 0 \Rightarrow F_n = mg\cos\theta$$

4. Introducimos F_n en $f_e \leq \mu_e F_n$ (ecuación 5.1): $f_e \leq \mu_e F_n \Rightarrow f_e \leq \mu_e mg\cos\theta$

5. Aplicando $\sum F_x = ma_x$ a la moneda se obtiene la fuerza de rozamiento:
$$\sum F_x = ma_x$$
$$-f_e + mg\,\text{sen}\,\theta = 0 \Rightarrow f_e = mg\,\text{sen}\,\theta$$

6. Introducimos $mg\,\text{sen}\,\theta$ en lugar de f_e en el paso 4: $mg\,\text{sen}\,\theta \leq \mu_e mg\cos\theta \Rightarrow \text{tg}\,\theta \leq \mu_e$

7. $\theta_{máx}$ es el ángulo más grande que cumple $\text{tg}\,\theta \leq \mu_e$ y, por tanto, el ángulo máximo con que la moneda no se desliza: $\boxed{\mu_e = \text{tg}\,\theta_{máx}}$

COMPROBACIÓN El coeficiente de rozamiento es adimensional; y también lo es la función tangente. Para $0 < \theta_{máx} < 45°$, $\text{tg}\,\theta_{máx}$ está entre 0 y 1. Uno podría esperar que la moneda se deslizase antes de alcanzar los 45° así como que el coeficiente de rozamiento estuviese comprendido entre 0 y 1. Por tanto, el resultado del paso 7 parece lógico.

PROBLEMA PRÁCTICO 5.1 Determinado día, el coeficiente de rozamiento estático entre los neumáticos de un coche y la carretera es 0,7. ¿Cuál es el ángulo máximo de inclinación de la carretera para que el coche pueda estar parado con sus ruedas bloqueadas y no se deslice hacia abajo?

Erosión debida a la corriente de agua que llega a la orilla. El ángulo de la pendiente, que permanece constante, es el ángulo de reposo para el material granular. *(David R. Bailey.)*

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 5.1

El coche del problema práctico 5.1 está aparcado con el ángulo máximo de inclinación y las cuatro ruedas bloqueadas por el freno de mano. Si sólo se bloquean dos ruedas, ¿se deslizará hacia abajo?

Ejemplo 5.3 Tirando de un trineo

Dos niños son arrastrados en un trineo sobre un terreno cubierto de nieve. Se tira del trineo con una cuerda que forma un ángulo de 40° con la horizontal, como se indica en la figura 5.8. La masa conjunta de los dos niños es de 45 kg y el trineo tiene una masa de 5 kg. Los coeficientes de rozamiento estático y cinético son $\mu_e = 0{,}2$ y $\mu_c = 0{,}15$ y el trineo está inicialmente en reposo. Determinar la fuerza de rozamiento ejercida por el suelo sobre el trineo y la aceleración de los niños y el trineo, si la tensión de la cuerda es (*a*) 100 N y (*b*) 140 N.

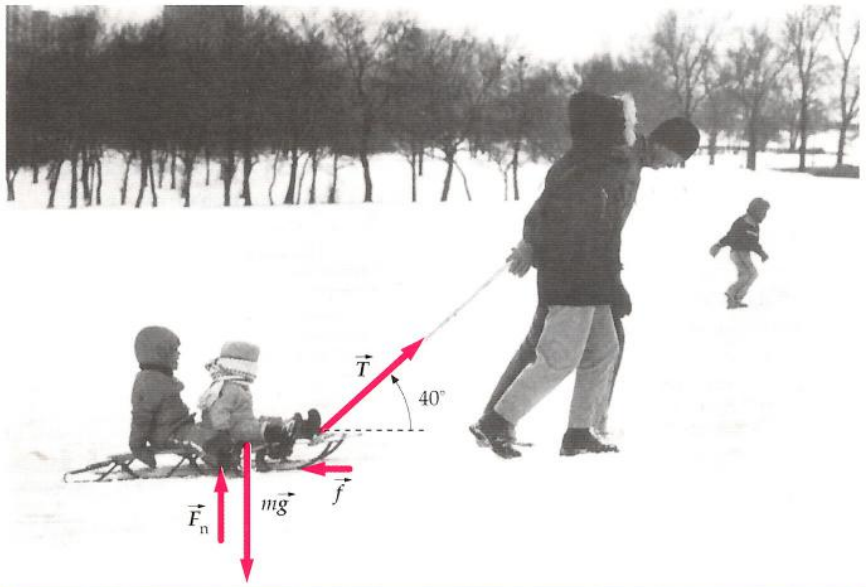


FIGURA 5.8 *(Jean-Claude LeJeune/Stock Boston.)*

PLANTEAMIENTO Determinar en primer lugar si la fuerza de rozamiento es estática o cinética. Para ello, tenemos que ver si la tensión satisface la relación $f_e \leq \mu_e F_n$. Después, ya podemos seleccionar la expresión para la fuerza de rozamiento y encontrar f.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Dibujar un diagrama de fuerzas para el trineo (figura 5.9):

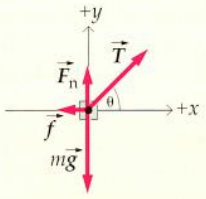


FIGURA 5.9

2. Escribir la expresión para la fuerza de rozamiento estático. Si se cumple, el trineo no se deslizará:

$$f_e \leq \mu_e F_n$$

3. Aplicar $\Sigma F_y = ma_y$ al trineo y se obtiene la fuerza normal. Entonces se obtiene la fuerza de rozamiento estático máxima:

$$\Sigma F_y = ma_y$$
$$F_n + T\,\text{sen}\,\theta - mg = 0 \Rightarrow F_n = mg - T\,\text{sen}\,\theta$$

4. Aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ al trineo y se obtiene la fuerza de rozamiento. Entonces se sustituye en el resultado del paso 2:

$$\Sigma f_x = ma_x$$
$$-f_e + T\cos\theta = 0 \Rightarrow f_e = T\cos\theta$$

5. Sustituir los resultados de los pasos 4 y 5 en el resultado del paso 2:

$$T\cos\theta \leq \mu_e(mg - T\,\text{sen}\,\theta)$$

6. Comprobamos si la tensión de 100 N cumple la condición del paso 3:

$$(100\text{ N})\cos 40° \leq 0{,}20[(50\text{ kg})(9{,}81\text{ N/kg}) - (100\text{ N})\,\text{sen}\,40°]$$
$$77\text{ N} \leq 85\text{ N}$$

La desigualdad se cumple, entonces el trineo *no* se desliza.

7. El trineo no se desliza. Para encontrar la fuerza de rozamiento, se usa la expresión obtenida en el paso 3 para f_e:

$$a_x = 0$$
$$f_e = T\cos\theta = (100\text{ N})\cos 40° = \boxed{77\text{ N}}$$

(*b*) 1. Comprobar el resultado del paso 4 del apartado (*a*) con $T = 140$ N. Si la relación se cumple, el trineo no se deslizará:

$$(140\text{ N})\cos 40° \leq 0{,}20[(50\text{ kg})(9{,}81\text{ N/kg}) - (140\text{ N})\,\text{sen}\,40°]$$
$$107\text{ N} \leq 80\text{ N}$$

La desigualdad *no* se cumple y el trineo se deslizará.

2. Como el trineo se desliza, la fuerza de rozamiento es cinética con $f_c = \mu_c F_n$. En el paso (*a*) 2 se aplicó $\Sigma F_y = ma_y$ al trineo y se encontró $F_n = mg - T\,\text{sin}\,\theta$. Usar este resultado junto con el paso (*b*) 1 para obtener la fuerza de rozamiento cinética:

$$f_c = \mu_c F_n$$
$$f_c = \mu_c(mg - T\,\text{sen}\,\theta)$$
$$= 0{,}15\,[(50\text{ kg})(9{,}81\text{ N/kg}) - (140\text{ N})\,\text{sen}\,40°]$$
$$= \boxed{60\text{ N}}$$

3. Aplicando $\Sigma F_x = ma_x$ al trineo, se obtiene la fuerza de rozamiento. Entonces se sustituye en el resultado del paso 2 para f_c y se obtiene la aceleración:

$$\Sigma F_x = ma_x$$
$$-f_c + T\cos\theta = ma_x \Rightarrow a_x = \frac{-f_c + T\cos\theta}{m}$$

por lo tanto, $$a_x = \frac{(-60\text{ N}) + (140\text{ N})\cos 40°}{50\text{ kg}} = \boxed{0{,}94\text{ m/s}^2}$$

COMPROBACIÓN Lo esperado es que a_x sea mayor o igual que cero, de forma que el módulo de la fuerza de rozamiento sea menor o igual que la componente x de la tensión. En el apartado (*a*) el módulo de la fuerza de rozamiento y la componente x de la tensión son ambas iguales a 77 N, y en el apartado (*b*) el módulo de la fuerza de rozamiento es 66 N mientras la componente x de la tensión es 140 N cos 40° = 107 N.

OBSERVACIÓN Hay que resaltar dos puntos importantes en este ejemplo: (1) La fuerza normal no es igual a la suma del peso de los niños más el trineo, pues la componente vertical de la tensión tiende a levantar el trineo del suelo. (2) En el apartado (*a*), la fuerza de rozamiento estático es menor que $\mu_e F_n$.

PROBLEMA PRÁCTICO 5.2 ¿Cuál es la fuerza máxima con la que se puede tirar de la cuerda con el ángulo especificado sin que el trineo empiece a deslizarse?

Ejemplo 5.4 El bloque que resbala

La masa m_2 de la figura 5.10 se ha ajustado de modo que el bloque de masa m_1 está en el umbral de deslizamiento. (*a*) Si $m_1 = 7$ kg y $m_2 = 5$ kg, ¿cuál es el coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y el soporte? (*b*) Con un ligero toque, los bloques se mueven con aceleración a. Determinar a si el coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y el soporte es $\mu_c = 0{,}54$.

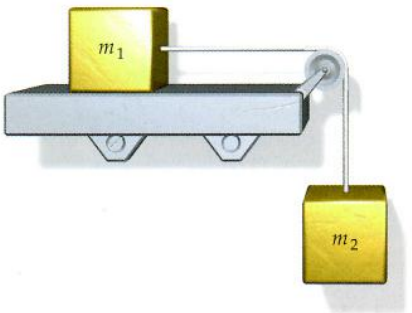


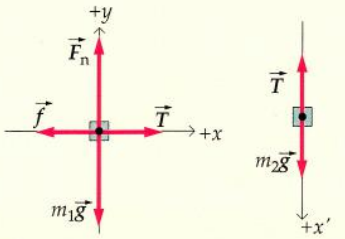
FIGURA 5.10

PLANTEAMIENTO Aplicar la segunda ley de Newton a cada uno de los bloques, teniendo en cuenta que T tiene el mismo valor a lo largo de toda la cuerda, si se desprecia la masa de la cuerda, de la polea y se desprecia el rozamiento del eje de la polea de modo que $T_1 = T_2$, y que las aceleraciones tienen igual magnitud, pues la cuerda permanece tensa, pero no se alarga, de modo que $a_1 = a_2 = a$.

Para determinar el coeficiente de rozamiento estático, μ_e, requerido en el apartado (a), expresar que la fuerza de rozamiento estático sobre m_1 es igual a su valor máximo $f_{e\,máx} = \mu_e F_n$ y que la aceleración es igual a cero.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Dibujar un diagrama de fuerzas para cada bloque aislado (véase la figura 5.11). Se eligen las direcciones de los ejes x y x', de modo que coincidan con las direcciones de las aceleraciones una vez que los bloques se mueven:



Bloque 1 Bloque 2

FIGURA 5.11

2. Aplicar $\Sigma F_y = ma_y$ al bloque 1 y obtener la fuerza normal. Entonces se obtiene la fuerza de rozamiento estático:

$$\Sigma F_y = m_1 a_{1y}$$
$$F_n - m_1 g = 0 \Rightarrow F_n = m_1 g$$
por lo tanto
$$f_{emáx} = \mu_e F_n \text{ por lo tanto, } f_{emáx} = \mu_e m_1 g$$

3. Aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ al bloque 1 y obtener la fuerza de rozamiento. Entonces se sustituye en el resultado del paso 2:

$$\Sigma F_x = m_1 a_{1x}$$
$$T - f_{emáx} = 0 \Rightarrow T = f_{emáx}$$
por lo tanto
$$T = \mu_e m_1 g$$

4. Aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ al bloque 2 y obtener la tensión. Entonces se sustituye en el resultado del paso 3:

$$\Sigma F_{x'} = m_2 a_{2x'} \Rightarrow m_2 g - T = 0$$
por lo tanto
$$T = m_2 g \text{ y } m_2 g = \mu_e m_1 g$$

5. Se resuelve el resultado del paso 4 para μ_e:

$$\mu_e = \frac{m_2}{m_1} = \frac{5{,}0 \text{ kg}}{7{,}0 \text{ kg}} = \boxed{0{,}71}$$

(*b*) 1. Cuando resbala, la fuerza de rozamiento es la cinética y las aceleraciones tienen el mismo módulo a. Relacionar la fuerza de rozamiento cinética fc con la fuerza normal. La fuerza normal se ha obtenido del paso 2 del apartado (*a*):

$$f_c = \mu_c F_n$$
por lo tanto
$$f_c = \mu_c m_1 g$$
$$|\vec{a}_1| = a_{1x} = a \quad \text{y} \quad |\vec{a}_2| = a_{2x'} = a$$

2. Aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ al bloque 1. Obtener la fuerza de rozamiento usando el resultado del paso (*b*) 1:

$$\Sigma F_x = m_1 a_{1x} \Rightarrow T - f_c = m_1 a$$
por lo tanto
$$T - \mu_c m_1 g = m_1 a$$

3. Aplicar $\Sigma F_{x'} = ma_{x'}$ al bloque 2:

$$\Sigma F_{x'} = m_2 a_{2x'} \Rightarrow m_2 g - T = m_2 a$$

4. Sumar las ecuaciones obtenidas en los pasos (*b*) 2 y (*b*) 3 y obtener a:

$$a = \frac{m_2 - \mu_c m_1}{m_1 + m_2} g = \boxed{1{,}0 \text{ m/s}^2}$$

COMPROBACIÓN Observar que si $m_1 = 0$ la expresión para la aceleración se reduce a $a = g$, como era de esperar.

PROBLEMA PRÁCTICO 5.3 ¿Cuál es la tensión de la cuerda cuando los bloques se están deslizando?

Ejemplo 5.5 El cochecillo incontrolado

Póngalo en su contexto

Un cochecillo de niños incontrolado se desliza sin rozamiento por una charca helada hacia un agujero en el hielo (figura 5.12). Una persona sobre patines intenta alcanzar el cochecillo. Cuando lo consigue, esta persona y el cochecillo siguen deslizándose hacia el agujero con velocidad v_0. El coeficiente de rozamiento entre los patines (en la posición de frenado) y el suelo es μ_c. La distancia al agujero en el momento de agarrar al cochecillo es D, la masa de la persona es m_Y y la del cochecillo m_B. (*a*) ¿Cuál es el valor mínimo de D para evitar la caída en el agujero? (*b*) ¿Qué fuerza debe ejercer la persona sobre el cochecillo?

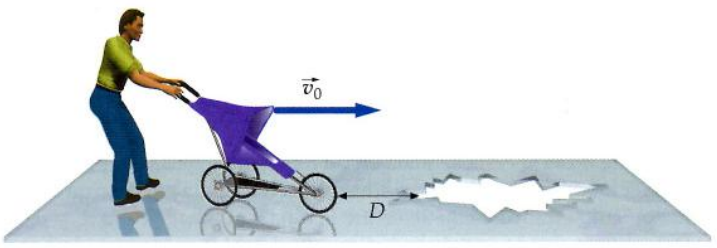
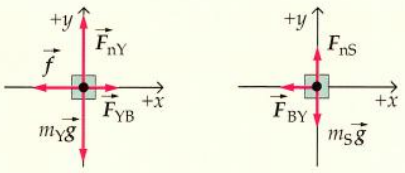


FIGURA 5.12

PLANTEAMIENTO Inicialmente, la persona y el cochecillo se mueven hacia el agujero con velocidad v_0 en la dirección x que tomamos como positiva. Si la persona hace una fuerza $\vec{F}_{YB}$ sobre el cochecillo, según la tercera ley de Newton el cochecillo hará una fuerza $\vec{F}_{BY}$ sobre la persona. Aplicar la segunda ley de Newton para determinar la aceleración. Después de hallar la aceleración, determinar la distancia D que recorre el cochecillo hasta que se detiene. El valor mínimo de D es aquél para el cual la velocidad de la persona se hace cero justo al llegar al agujero.



Persona Cochecito

FIGURA 5.13

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Dibujar los diagramas de fuerza para la persona y el cochecillo aisladamente (figura 5.13):

2. Para encontrar la fuerza de rozamiento hay que encontrar la fuerza normal:
$$f_{IYk} = \mu_c F_{IYn}$$

3. Aplicar $\Sigma F_y = ma_y$ a la persona y obtener primero la fuerza normal y después la fuerza de rozamiento:
$$\Sigma F_y = ma_y \Rightarrow F_{IYn} - m_Y g = 0 \quad (a_y = 0)$$
y $f_{IYk} = \mu_c F_{IYn}$ por tanto, $f_{IYk} = \mu_c m_Y g$

4. Aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ a la persona. Sustituir en el resultado del paso 3:
$$\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow F_{BY} - f_{IYk} = m_Y a_x$$
por lo tanto, $F_{BY} - \mu_c m_Y g = m_Y a_x$

5. Aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ al cochecillo:
$$\Sigma F_x = m_B a_x \Rightarrow F_{YB} = m_B a_x$$

6. $\vec{F}_{BY}$ y $\vec{F}_{YB}$ forman un par de fuerzas 3LN, de forma que tienen el mismo módulo:
$$F_{BY} = F_{YB}$$

7. Sumar las ecuaciones de los pasos 4 y 5 y simplificar $F_{BY} - F_{YB} = 0$:
$$-F_{YB} + (F_{BY} - \mu_e m_Y g) = m_B a_x + m_Y a_x$$
$$0 - \mu_e m_Y g = m_B a_x + m_Y a_x$$

8. Obtener a_x con el resultado del paso 4:
$$a_x = -\frac{\mu_c m_Y}{m_Y + m_B} g$$ (como era de esperar, la aceleración es negativa.)

9. Sustituir el resultado del paso 5 en la ecuación cinemática y obtener D:
$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x \Delta x \Rightarrow 0 = v_0^2 + 2a_x D$$
por lo tanto
$$D = \frac{-v_0^2}{2a_x} = \boxed{\left(1 + \frac{m_B}{m_Y}\right)\frac{v_0^2}{2\mu_c g}}$$

(*b*) F_{YB} resulta de combinar los resultados de los pasos 5 y 8:
$$F_{YB} = m_B|a_x| = \boxed{\frac{\mu_c m_B g}{1 + (m_Y/m_B)}}$$

COMPROBACIÓN Para valores grandes de m_B/m_Y, D es grande, como cabía esperar.

OBSERVACIÓN El valor mínimo de D es proporcional a v_0^2 e inversamente proporcional a μ_c. La figura 5.14 muestra la distancia de frenado D en función de la velocidad inicial al cuadrado para valores de m_B/m_Y iguales a 0,1, 0,3 y 1,0 con $\mu_c = 0{,}5$. Obsérvese que cuando la masa del cochecillo aumenta, se requiere una mayor distancia de frenado para una determinada velocidad inicial. Esto es análogo a lo que ocurre cuando se quiere detener un vehículo que arrastra un remolque cuando éste no tiene frenos propios. La masa del remolque aumenta la distancia de parada para una determinada velocidad.

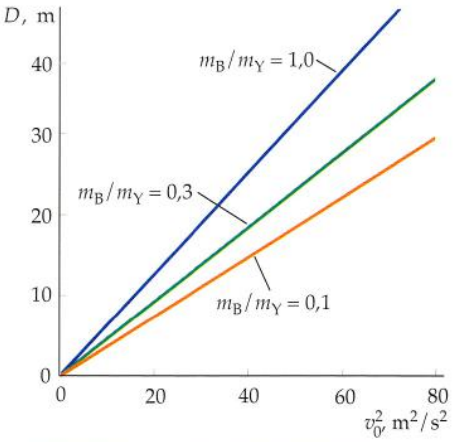


FIGURA 5.14

Ejemplo 5.6 Tirando de una niña en un tobogán

Inténtelo usted mismo

Una niña de masa m_C está sentada en un tobogán de masa m_T, situado sobre un estanque helado. El tobogán se empuja con una fuerza horizontal $\vec{F}_{ap}$ (figura 5.15). Los coeficientes de rozamiento estático y cinético entre la niña y el tobogán son μ_e y μ_c, respectivamente. (*a*) Determinar el valor máximo de F_{ap} para el cual la niña no se desliza respecto al tobogán. (*b*) Determinar la aceleración del tobogán y la niña cuando F_{ap} es superior a este valor máximo.

FIGURA 5.15

PLANTEAMIENTO La única fuerza que acelera a la niña es la fuerza de rozamiento que ejerce el tobogán sobre ella. El apartado (*a*) consiste en determinar F_{ap} cuando esta fuerza es estática y máxima. Para hacerlo, aplicar $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ a la muchacha y despejar la aceleración cuando la fuerza de rozamiento estática es máxima. Luego, aplicar $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ al tobogán y despejar F_{ap}. En el apartado (*b*) se procede de forma similar. Sin embargo, en este apartado, F_{ap} viene dada y despejamos la aceleración del tobogán.

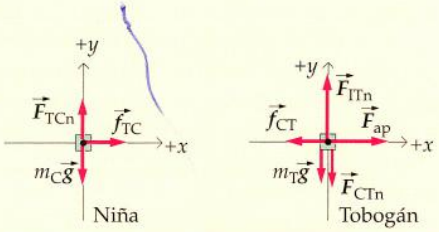


FIGURA 5.16 La fuerza $\vec{F}_{TTn}$ es la fuerza normal ejercida por el hielo sobre el tobogán.

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	Respuestas
(*a*) 1. Dibujar un diagrama de fuerzas para cada elemento del problema (figura 5.16).	
2. Aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ al tobogán.	$\Sigma F_{Tx} = m_T a_{Tx} \Rightarrow F_{ap} - f_{CTsmáx} = m_T a_{Tx}$
3. Aplicar $\Sigma F_y = ma_y$ a la niña y obtener la fuerza de rozamiento. Aplicar luego $f_{xmáx} = \mu_c F_n$ y despejar la fuerza de rozamiento.	$\Sigma F_{Cy} = m_C a_y \Rightarrow F_{TCn} - m_C g = 0$ por tanto, $F_{TCn} = m_C g$ $f_{cmáx} = \mu F_n \Rightarrow f_{TCsmáx} = \mu_c F_{TCn}$ por tanto, $f_{TCsmáx} = \mu_c m_C g$
4. Aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ a la niña y obtener la aceleración.	$\Sigma F_{Cx} = m_C a_{Cx} \Rightarrow f_{TCemáx} = m_C a_{Cx}$ por tanto, $\mu_e m_C g = m_C a_{Cx} \Rightarrow a_{Cx} = \mu_e g$
5. Igualar los módulos de cada par de fuerzas 3LN y expresar las relaciones entre las aceleraciones.	$F_{TCn} = F_{CTn}$ y $f_{TCemáx} = f_{CTemáx}$ y $a_{Cx} = a_{Tx} = a_x$
6. Sustituir los resultados de los pasos 4 y 5 en el 2 y despejar F_{ap}.	$F_{ap} - \mu_e m_C g = m_T \mu_e g$ luego, $F_{ap} = \boxed{(m_C + m_T)\mu_e g}$
(*b*) 1. Igualar las magnitudes de cada par de fuerzas 3LN y expresar el cambio en la relación entre las aceleraciones debido a que ahora no se da la restricción de ausencia de deslizamiento mutuo.	$F_{TCn} = F_{CTn} = F_n$ y $f_{TCc} = f_{CTc} = f_c$ y $a_{Cx} < a_{Tx}$
2. Obtener la fuerza de rozamiento cinética usando el resultado del paso (*a*) 3 de la fuerza normal.	$f_c = \mu_c F_n$ es decir, $f_c = \mu_c m_C g$
3. Aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ al tobogán. Usando el resultado del apartado (*b*) 2, obtener su *aceleración*.	$\Sigma F_{Cx} = m_C a_{Cx} \Rightarrow f_c = m_C a_{Cx}$ por tanto, $\mu_c m_C g = m_C a_{Cx} \Rightarrow a_{Cx} = \boxed{\mu_c g}$
4. Aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ al tobogán. Utilizando el resultado del paso 2 del apartado (*b*), despejar la *aceleración* del tobogán.	$\Sigma F_{Tx} = m_T a_{Tx} \Rightarrow F_{ap} - f_c = m_T a_{Tx}$ por tanto, $F_{ap} - \mu_c m_C g = m_T a_{Tx} \Rightarrow a_{Tx} = \boxed{\dfrac{F_{ap} - \mu_c m_C g}{m_T}}$

COMPROBACIÓN El resultado del apartado (*a*) es lo que uno se espera si la niña no se desliza sobre el tobogán. Si consideramos a la niña y al tobogán como una sola partícula y aplicamos la segunda ley de Newton, obtenemos $F_{ap} = (m_c + m_t)a_x$. Si sustituimos $\mu_e(m_c + m_t)g$ (el resultado del paso 6 del apartado (*a*)) en F_{ap}, se obtiene simplificando que $a_x = \mu_e g$, o sea, el resultado del paso 3 del apartado (*a*). Por tanto, nuestro resultado es consistente con considerar el tobogán y la niña como una sola partícula.

OBSERVACIÓN El rozamiento es una fuerza entre dos superficies en contacto, y no es correcto decir que el rozamiento siempre se opone al movimiento o a la tendencia al movimiento. En este ejemplo, el rozamiento no se opone al movimiento de la niña, sino que lo produce. Es correcto decir que el rozamiento siempre se opone al movimiento, o a la tendencia al movimiento, de una *superficie respecto de otra*. Por ejemplo, aunque la chica se mueve hacia delante en *relación al hielo*, se mueve o tiende a moverse hacia atrás (hacia la izquierda) en *relación al tobogán*. El rozamiento se opone al movimiento relativo o a la tendencia al movimiento.

¡ Obsérvese que no siempre la fuerza de rozamiento se opone al movimiento. Sin embargo, las fuerzas de rozamiento por contacto entre dos superficies siempre se oponen al movimiento relativo entre ambas, o a la tendencia al movimiento relativo.

ROZAMIENTO, COCHES Y FRENOS ANTIBLOQUEO

La figura 5.17 muestra las fuerzas que actúan sobre un coche en el momento justo que parte del reposo. El peso del coche es equilibrado por la fuerza normal F_n ejercida sobre los neumáticos. Para que el coche comience a moverse, el motor suministra potencia al eje de tracción haciendo que las ruedas giren (trataremos el concepto de potencia en el capítulo 6). Si el movimiento sobre la carretera fuese sin rozamiento, las ruedas simplemente girarían sobre sí mismas. Cuando existe rozamiento, la carretera ejerce sobre los neumáticos una fuerza de rozamiento dirigida hacia adelante que proporciona la fuerza necesaria para acelerar el coche. Si la potencia suministrada por el motor es lo suficientemente pequeña para que la fuerza ejercida por la superficie de los neumáticos sobre la carretera no sea grande, las dos superficies no se deslizan. Las ruedas giran sin deslizarse y la superficie de los neumáticos en contacto con el suelo está en reposo relativo respecto a él. El rozamiento entre la carretera y los neumáticos es estático. La máxima fuerza de rozamiento que los neumáticos pueden ejercer sobre la carretera (y que la carretera puede ejercer sobre los neumáticos) es $\mu_e F_n$.

El centro de las ruedas de un coche que se desplaza en línea recta con velocidad v relativa a la carretera, también se mueve con velocidad v, como se ve en la figura 5.18. Si una rueda no se desliza, la mitad superior de la rueda se mueve más rápido que v y la mitad inferior de la rueda se mueve más lento que v. Sin embargo, cada punto del perímetro de la rueda se mueve, relativo al coche, en un círculo con velocidad de igual módulo v. Además, la velocidad instantánea del punto del neumático que está en contacto con el suelo es cero *relativa al suelo*. (De otro modo, el neumático patinaría.)

Si la potencia del motor es suficientemente grande, el neumático patinará y las ruedas girarán sobre sí mismas. Por lo tanto, la fuerza que acelera el coche es la fuerza de rozamiento cinética, que es inferior a la fuerza de rozamiento estática. Si nos encontramos con el coche atascado en hielo o nieve, para poder salir es mejor acelerar con mucha suavidad. De la misma forma, si tenemos que detener completamente un coche, la fuerza que ejerce el asfalto sobre las ruedas es estática o cinética, dependiendo de la forma como frenamos. Si frenamos tan bruscamente que las ruedas se bloquean, los neumáticos resbalaran sobre el asfalto y la fuerza que parará el coche será la fuerza de rozamiento cinética. Si, en cambio, no frenamos tan bruscamente y no se produce deslizamiento entre los neumáticos y la carretera, la fuerza que parará el coche será la fuerza de rozamiento estática.

Cuando las ruedas se bloquean y los neumáticos resbalan, se dan dos cosas no deseadas. La distancia mínima necesaria para detener el vehículo aumenta y la capacidad que el conductor tiene para controlar el coche disminuye enormemente. Obviamente, la disminución de la capacidad de control puede tener consecuencias graves. Los sistemas de frenado antibloqueo (ABS) de los coches utilizan sensores para medir la velocidad de la rueda. Si el dispositivo de control detecta que la rueda está próxima a bloquearse, el sistema modula una señal que hace que la presión del freno disminuya, para instantes después restaurar la presión sobre la rueda y así sucesivamente unas 15 veces por segundo. Esta presión variable es similar a la que se ejerce cuando se pisa repetidamente el pedal del freno pero, con el sistema ABS, únicamente se produce la sucesión de presión fuerte presión débil en aquella rueda que está a punto de bloquearse. Con este método se consigue el máximo frenado, ya que se consigue el rozamiento máximo para detener el coche.

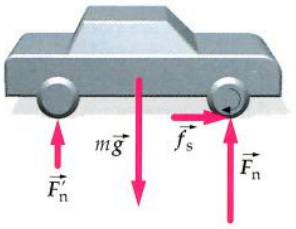


FIGURA 5.17 Fuerzas que actúan sobre un coche con tracción delantera. que se acelera desde el reposo. La fuerza normal $\vec{F}_n$ sobre las ruedas delanteras es normalmente mayor que la fuerza normal sobre las ruedas traseras $\vec{F}_n'$ porque el motor suele estar colocado en la parte delantera. No hay fuerza de arrastre producida por el aire porque el coche empieza su movimiento. Hemos ignorado la fuerza de rodadura sobre las ruedas.

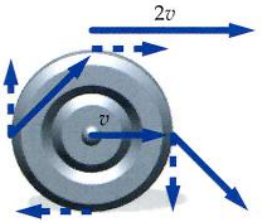


FIGURA 5.18 En esta figura las líneas de puntos representan velocidades respecto al centro de la rueda y las líneas continuas representan velocidades respecto al suelo.

Ejemplo 5.7 El efecto de los frenos antibloqueo

Un coche viaja a 30 m/s por una carretera horizontal. Los coeficientes de rozamiento entre la carretera y los neumáticos son $\mu_e = 0{,}5$ y $\mu_c = 0{,}4$. ¿Qué distancia recorrerá el coche antes de detenerse si (*a*) el coche frena con un sistema antibloqueo, de modo que las ruedas no se deslizan y (*b*) el coche frena con dureza sin antibloqueo, y las ruedas se bloquean?

PLANTEAMIENTO La fuerza que detiene un automóvil cuando frena es la fuerza de rozamiento ejercida por la carretera sobre los neumáticos (figura 5.19). Entonces, aplicando la segunda ley de Newton se determina la aceleración. Utilizamos la cinemática para determinar la distancia recorrida antes de parar.

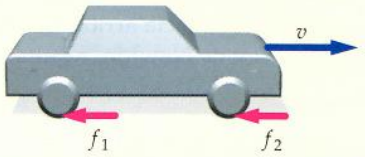


FIGURA 5.19

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Dibujar un diagrama de fuerzas para el coche (figura 5.20). Considerar las cuatro ruedas como si tuvieran un solo punto de contacto con el suelo. Suponer también que los frenos se aplican a las cuatro ruedas. La fuerza $\vec{f}$ en el diagrama es la fuerza de rozamiento total en cada rueda:

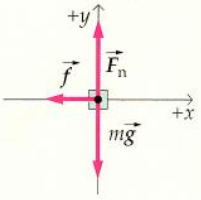


FIGURA 5.20

2. Para relacionar la distancia necesaria para parar, Δx, con la velocidad inicial v_0, usamos la ecuación 2.15, suponiendo que la aceleración es constante:

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x \Delta x$$

$$\text{Cuando } v_x = 0,\ \Delta x = -\frac{v_{0x}^2}{2a_x}$$

3. Aplicamos $\Sigma F_y = ma_y$ al coche y obtenemos la fuerza normal. Después aplicamos $f_{x\,\text{máx}} = \mu_e F_n$ y despejamos $f_{x\,\text{máx}}$:

$$\Sigma F_y = ma_y \Rightarrow F_n - mg = 0 \quad \text{por lo tanto,} \quad F_n = mg$$
$$f_{e\,\text{máx}} = \mu_e F_n \quad \text{con lo cual,} \quad f_{e\,\text{máx}} = \mu_e mg$$

4. Aplicamos $\Sigma F_x = ma_x$ al coche y obtenemos la aceleración:

$$\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow -f_{e\,\text{máx}} = ma_x$$
$$\text{Sustituyendo } \mu_e mg \text{ por } f_{e\,\text{máx}} \text{ da } -\mu_e mg = ma_x \Rightarrow a_x = -\mu_e g$$

5. Sustituimos a_x en la ecuación de Δx en el paso 2, y así obtenemos la distancia de frenado:

$$\Delta x = -\frac{v_{0x}^2}{2a_x} = \frac{v_{0x}^2}{2\mu_e g} = \frac{(30\ \text{m/s})^2}{2(0{,}50)(9{,}81\ \text{m/s}^2)} = \boxed{0{,}92 \times 10^2\ \text{m}}$$

(*b*) 1. Cuando las ruedas se bloquean, la fuerza ejercida por la carretera sobre el coche es el rozamiento cinético. Mediante un razonamiento semejante al del apartado (*a*), obtenemos para la aceleración:

$$a_x = -\mu_c g$$

2. La distancia de frenado es, por lo tanto:

$$\Delta x = -\frac{v_{0x}^2}{2a_x} = \frac{v_{0x}^2}{2\mu_c g} = \frac{(30\ \text{m/s})^2}{2(0{,}40)(9{,}81\ \text{m/s}^2)} = \boxed{1{,}1 \times 10^2\ \text{m}}$$

COMPROBACIÓN Los desplazamientos son positivos. Además, el sistema ABS reduce la distancia de frenado del coche, como era de esperar.

OBSERVACIÓN La distancia de frenado es superior en un 20% cuando las ruedas están bloqueadas. Obsérvese también que esta distancia es independiente de la masa del coche: la distancia de frenado es igual para un pequeño coche utilitario que para un camión, siempre que los coeficientes de rozamiento sean iguales. Los neumáticos se calientan mucho cuando el coche derrapa. Esto produce un cambio en μ_c que no hemos considerado aquí.

5.2 FUERZAS DE ARRASTRE

Cuando un objeto se mueve a través de un fluido, tal como el aire o el agua, el fluido ejerce una fuerza de resistencia o **fuerza de arrastre** que se opone al movimiento del objeto. Esta fuerza depende de la forma del objeto, de las propiedades del fluido y de la velocidad del objeto respecto al fluido. A diferencia de la fuerza de rozamiento, la fuerza de arrastre crece con la velocidad del objeto. Para pequeñas velocidades es, aproximadamente, proporcional a la velocidad del objeto; para velocidades superiores es casi proporcional al cuadrado de la velocidad.

Consideremos un objeto que cae desde el reposo bajo la influencia de la fuerza de la gravedad, supuesta constante. El módulo de la fuerza de arrastre es:

$$F_d = bv^n \qquad 5.5$$

FUERZA DE ARRASTRE

donde b es una constante.

La fuerza de arrastre sobre el paracaídas frena el *dragster*. *(IHRA/Live Nation.)*

Como se muestra en la figura 5.21, las fuerzas que actúan sobre el objeto son mg hacia abajo y bv^n hacia arriba. Si tomamos positiva la dirección hacia abajo, según la segunda ley de Newton, resulta

$$mg - bv^n = ma_y \qquad 5.6$$

Despejando la aceleración:

$$a_y = g - \frac{b}{m}v^n \qquad 5.7$$

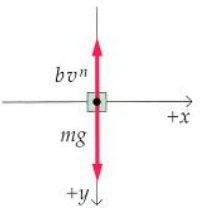


FIGURA 5.21 Diagrama de fuerzas de un objeto que cae en el aire.

Para $t = 0$, cuando se deja caer el objeto, la velocidad es nula, de modo que la fuerza de arrastre es cero y la aceleración es g hacia abajo. Cuando la velocidad del objeto crece, la fuerza de arrastre se incrementa y la aceleración es menor que g. Finalmente, la velocidad se hace lo suficientemente grande para que la fuerza de arrastre bv^n sea igual a la fuerza de gravedad mg, de modo que la aceleración se hace cero. El objeto continúa entonces moviéndose a la velocidad constante v_T, llamada **velocidad límite** o velocidad terminal. Haciendo $a_y = 0$ resulta, de la ecuación 5.6

$$bv_T^n = mg$$

Y por lo tanto, para la velocidad límite

$$v_T = \left(\frac{mg}{b}\right)^{1/n} \qquad 5.8$$

Cuanto mayor sea la constante b, menor es la velocidad límite. Los paracaídas se diseñan de modo que b sea grande para que la velocidad límite sea pequeña. En cambio, los coches se diseñan de modo que b sea pequeño para reducir el efecto de la resistencia del viento. Para un paracaidista de apertura manual (con el paracaídas cerrado), la velocidad límite es, aproximadamente, 60 m/s ≈ 200 km/h. Cuando el paracaídas se abre, la fuerza de arrastre es mayor que la fuerza de la gravedad y el paracaidista experimenta una aceleración hacia arriba mientras cae, es decir, su velocidad hacia abajo disminuye. Entonces, la fuerza de arrastre disminuye hasta que se alcanza una nueva velocidad límite, del orden de 20 km/h.

(Stuart Williams/Dembinsky Photo Associates.)

(Joe McBride/Stone.)

Ejemplo 5.8 Velocidad límite

Un paracaidista de masa 64 kg alcanza una velocidad límite de 180 km/h con sus brazos y piernas extendidas. (*a*) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza de arrastre F_a sobre el paracaidista? (*b*) Si la fuerza de arrastre es igual a bv^2, ¿cuál es el valor de b?

PLANTEAMIENTO Utilizamos la segunda ley de Newton para calcular la fuerza de arrastre del apartado (*a*) y luego sustituimos para hallar b en el apartado (*b*).

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Dibujar un diagrama de fuerzas (figura 5.22):

2. Aplicar $\Sigma F_y = ma_y$. Como el paracaidista se mueve con velocidad constante, la aceleración es cero:

$$\Sigma F_y = ma_y \Rightarrow F_a - mg = 0$$

por lo tanto, $F_a = mg = (64{,}0\text{ kg})(9{,}81\text{ N/kg}) = \boxed{628\text{ N}}$

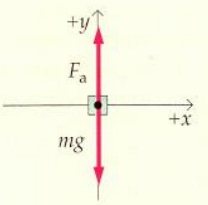


FIGURA 5.22

(*b*) 1. Para determinar b, basta considerar que $F_a = bv^2$: $F_a = mg = bv^2$

por lo tanto, $b = \dfrac{mg}{v^2}$

2. Determinar la velocidad en m/s y después calcular b:

$$180 \text{ km/h} = \frac{180 \text{ km}}{1 \text{ h}} \times \frac{1 \text{ h}}{3{,}6 \text{ ks}} = 50{,}0 \text{ m/s}$$

$$b = \frac{(64{,}0 \text{ kg})(9{,}81 \text{ m/s}^2)}{(50{,}0 \text{ m/s})^2} = \boxed{0{,}251 \text{ kg/m}}$$

COMPROBACIÓN Las unidades que hemos obtenido para b son kg/m. Para comprobar que las unidades son correctas, las multiplicamos por $(\text{m/s})^2$ y tenemos kg m/s^2. Estas unidades corresponden a una fuerza, como es lógico, pues la fuerza de arrastre es bv^2.

OBSERVACIÓN El factor de conversión 1 h/3,6 ks aparece en el último paso de la solución. Este factor proviene de que 1 h equivale a 3600 s. En consecuencia, al convertir la velocidad de km/h a m/s, se mantienen las tres cifras significativas. Esto es así incluso si no hubiéramos escrito el factor de conversión como 1,00 h/3,60 ks.

5.3 MOVIMIENTO A LO LARGO DE UNA TRAYECTORIA CURVA

Los cuerpos, a menudo, no se mueven en línea recta: un coche que toma una curva es un ejemplo, como también lo es un satélite que gira alrededor de la Tierra.

Considérese un satélite moviéndose en órbita circular alrededor de la Tierra como muestra la figura 5.23. A una altura de 200 km, la fuerza gravitacional es ligeramente inferior que sobre la superficie terrestre. ¿Por qué el satélite no cae sobre la Tierra? En realidad, el satélite "cae" pero como la superficie terrestre es curva, el satélite no consigue acercarse a la superficie de la Tierra. Si el satélite no estuviera acelerado se movería desde un punto P_1 a otro P_2 durante un tiempo t. En cambio, se mueve al punto P'_2 sobre la órbita circular. En cierto sentido, el satélite "cae" una distancia h como se muestra en la figura 5.23. Si t es pequeño, P_2 y P'_2 están casi sobre la línea radial. En ese caso, podemos calcular h a partir del triángulo de lados vt, $r + h$ y r. Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$(r + h)^2 = (vt)^2 + r^2$$
$$r^2 + 2hr + h^2 = v^2t^2 + r^2$$

o bien

$$h(2r + h) = v^2t^2$$

Para tiempos cortos, h será mucho menor que r de manera que podemos despreciar h frente a $2r$. Entonces

$$2rh \approx v^2t^2$$

o bien

$$h \approx \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{r}\right)t^2$$

Comparando esto con la expresión para aceleración constante $h = \frac{1}{2}at^2$, vemos que el módulo de la aceleración del satélite es

$$a = \frac{v^2}{r}$$

que es justamente la expresión para la aceleración centrípeta del capítulo 3. A partir de la figura 3.24, vemos que esta aceleración se dirige al centro de la órbita circular. Aplicando la segunda ley de Newton a lo largo de la dirección del vector aceleración, se puede hallar el módulo de la fuerza responsable de la aceleración:

$$F_{\text{neta}} = m\frac{v^2}{r}$$

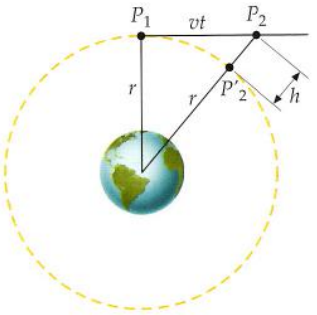


FIGURA 5.23 El satélite se mueve con velocidad v en órbita circular de radio r en torno a la Tierra. Si el satélite no se acelerara, se movería desde el punto P_1 al P_2 a lo largo de una trayectoria recta. Debido a su aceleración, en lugar de eso cae una distancia h. Durante un tiempo t suficientemente corto, la aceleración es prácticamente constante, y por tanto, $h = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}(v^2/r)t^2$.

Véase el **Apéndice de matemáticas** *para más información sobre* **Trigonometría**

La figura 5.24*a* muestra una pelota en el extremo de una cuerda cuyo otro extremo está sujeto a un soporte fijo. La pelota se mueve en círculo horizontal de radio r a módulo de la velocidad constante constante v. En consecuencia, la aceleración de la pelota tiene módulo v^2/r.

En el capítulo 3, se estableció que si una partícula se mueve con una velocidad v a lo largo de una trayectoria curva con un radio de curvatura r (figura 5.24*b*), la partícula tiene una componente de la aceleración $a_c = v^2/r$ en la dirección centrípeta (hacia el centro de curvatura). Además, la fuerza neta va en la dirección de la aceleración. La componente de la fuerza neta en la dirección centrípeta se denomina **fuerza centrípeta**. Esta fuerza no es una clase de fuerza distinta de las que ya hemos estudiado, sino que meramente designa a la componente de la fuerza neta perpendicular a la dirección del movimiento que puede ejercerse mediante una cadena, un muelle o cualquier otra fuerza de contacto como la fuerza normal o la fuerza de rozamiento; también puede producir una fuerza centrípeta una fuerza de acción a distancia como la fuerza de gravitación, o puede darse como resultado de una combinación de todas. En cualquier caso, siempre apunta hacia el centro de curvatura de la trayectoria.

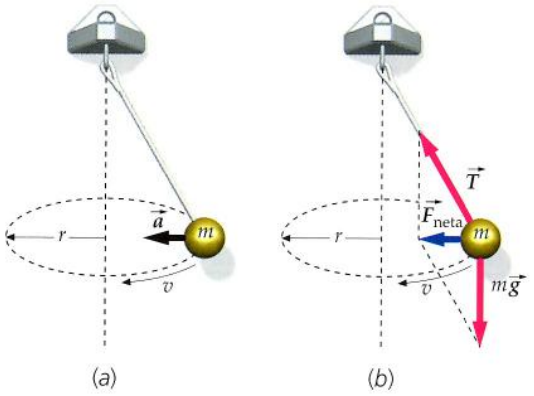


FIGURA 5.24 Una pelota suspendida de una cuerda se mueve en un círculo horizontal a módulo de la velocidad constante. (*a*) El vector aceleración está en la dirección centrípeta (en dirección al centro del círculo). La aceleración en la dirección centrípeta se denomina aceleración centrípeta. (*b*) Dos fuerzas actúan sobre la pelota, la tensión ejercida por la cuerda y la fuerza gravitacional. La suma de esas dos fuerzas da lugar a la fuerza neta en la dirección centrípeta. Se suele llamar fuerza centrípeta a la fuerza neta en la dirección centrípeta.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Resolución de problemas de movimiento a lo largo de trayectorias curvas

PLANTEAMIENTO Recordar que no se debe nunca incluir una fuerza centrípeta en el diagrama de fuerzas. Sólo se deben incluir fuerzas como la tensión, la normal, la gravitacional, etcétera.

SOLUCIÓN

1. Dibujar el diagrama de fuerzas del cuerpo. Incluir los ejes de coordenadas con el origen en el punto de interés de la trayectoria. Dibujar uno de los ejes en la dirección tangente a la curva y el otro en la dirección centrípeta.
2. Aplicar $\Sigma F_c = ma_c$ y $\Sigma F_t = ma_t$ (segunda ley en forma de componentes).
3. Sustituir $a_c = v^2/r$ y $a_t = dv/dt$, donde v es la velocidad.
4. Si el cuerpo se mueve describiendo un círculo con radio r con el módulo de la velocidad constante v, utilizaremos $v = 2\pi r/T$, donde T es el tiempo que dura una revolución.

COMPROBACIÓN Asegúrese de que sus respuestas están de acuerdo con el hecho de que la dirección de la aceleración centrípeta es siempre hacia el centro de la curvatura y perpendicular a la dirección del vector velocidad.

> **!** La fuerza centrípeta no es una fuerza real. Es simplemente el nombre que se le da a la componente de la fuerza neta en la dirección centrípeta. De la misma manera que la fuerza neta, la fuerza centrípeta no aparece en el diagrama de fuerzas. Sólo pueden aparecer la fuerza reales.

Ejemplo 5.9 Dando vueltas a un cubo

Se hace girar un cubo con un volumen de agua de masa m siguiendo una circunferencia vertical de radio r (figura 5.25). Si la velocidad del cubo en su parte más alta es v_t, calcular (*a*) la fuerza ejercida por el cubo sobre el agua en este punto; (*b*) el valor mínimo de v_t para que el agua no se salga del cubo; (*c*) la fuerza ejercida por el cubo sobre el agua en la parte más baja del círculo, en donde la velocidad del cubo es v_b.

PLANTEAMIENTO Cuando el cubo está en la parte superior de la trayectoria, la fuerza de la gravedad sobre el agua y la fuerza de contacto del cubo sobre el agua van ambas en la dirección centrípeta (hacia abajo). En la parte inferior de la trayectoria, la fuerza de contacto del cubo sobre el agua debe ser mayor que la fuerza de la gravedad sobre el agua para que haya una fuerza neta en la dirección centrípeta (hacia arriba). Apliquemos la segunda ley de Newton para calcular la fuerza ejercida por el cubo sobre el agua. Como el agua se mueve según una trayectoria circular, existirá una aceleración centrípeta v^2/r hacia el centro del círculo.

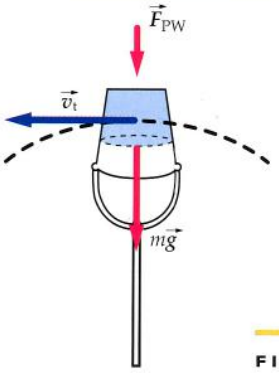


FIGURA 5.25

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Dibujar los diagramas de fuerza para el agua en la parte superior y en la parte inferior del círculo (figura 5.26). En cada caso, elegir como dirección positiva del eje x la dirección hacia el centro del círculo.

2. Aplicar $\Sigma F_r = ma_r$ al agua cuando pasa por la parte más alta del círculo a velocidad v_t. Despejar la fuerza F_c que hace el cubo sobre el agua:

$$\Sigma F_r = ma_r$$

$$F_c + mg = m\frac{v_t^2}{r} \Rightarrow F_c = \boxed{m\left(\frac{v_t^2}{r} - g\right)}$$

(*b*) El cubo puede empujar el agua, pero no puede tirar de ella. La fuerza mínima que puede ejercer es cero. Haciendo $F_c = 0$ y despejando $v_{t,\,min}$:

$$0 = m\left(\frac{v_{t,\,min}^2}{r} - g\right) \Rightarrow v_{t,\,min} = \boxed{\sqrt{rg}}$$

(*c*) Aplicar $\Sigma F_r = ma_r$ al agua cuando pasa por la parte más baja del cubo a velocidad v_b. Despejar F_c:

$$\Sigma F_r = ma_r$$

$$F_c - mg = \frac{mv_b^2}{r} \Rightarrow F_c = \boxed{m\left(\frac{v_b^2}{r} + g\right)}$$

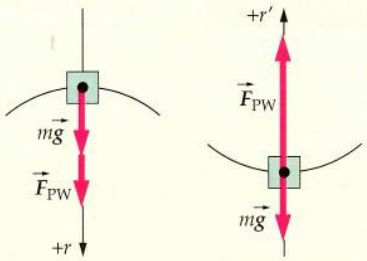


FIGURA 5.26

COMPROBACIÓN Cuando $v_b = 0$, en la parte más baja del círculo, $F_c = mg$.

OBSERVACIÓN Obsérvese que no hay ninguna fuerza llamada fuerza centrípeta en el diagrama de fuerzas. La fuerza centrípeta no es una fuerza ejercida por otro cuerpo sino que sólo se trata de la fuerza neta en la dirección centrípeta.

PROBLEMA PRÁCTICO 5.4 Estimar (*a*) la velocidad mínima en la parte alta del círculo y (*b*) el período máximo de revolución que evita que el líquido se derrame al hacer girar un cubo de agua en un círculo vertical con velocidad de módulo constante.

Ejemplo 5.10 Haciendo el mono

Un muchacho se baja de la rama de un árbol agarrándose a una cuerda de 30 m de longitud atada a otra rama situada 30 m por encima. Suponiendo despreciable la resistencia del aire, determinar el ritmo de aumento de la velocidad del muchacho cuando la cuerda forma un ángulo de 25° con la vertical durante el descenso.

PLANTEAMIENTO Describir esta situación como una cuerda sin masa de la que cuelga un cuerpo de masa m. Aplicar la segunda ley de Newton a la masa. La aceleración tangencial es el ritmo de cambio de la velocidad.

SOLUCIÓN

1. Dibujar el diagrama de fuerzas del cuerpo (figura 5.27). Sea la dirección $+r$ la dirección hacia el centro de curvatura y $+t$ la dirección de la velocidad:

2. Aplicar $\Sigma F_t = ma_t$ y utilizar el diagrama de fuerzas para determinar las expresiones para las componentes de las fuerzas:

$$\Sigma F_t = ma_t$$
$$T_t + F_{gt} = ma_t$$
$$0 + mg\,\text{sen}\,\theta = ma_t$$

3. Despejar a_t:

$$a_t = g\,\text{sen}\,\theta = (9{,}81\ \text{m/s}^2)\,\text{sen}\,25° = \boxed{4{,}1\ \text{m/s}^2}$$

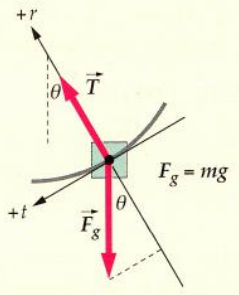


FIGURA 5.27 La dirección $+t$ va en la dirección del vector velocidad.

COMPROBACIÓN Cabe esperar que el ritmo de cambio del módulo de la velocidad sea positivo pues el muchacho va aumentando su velocidad conforme desciende. Además, ese ritmo no debería ser nunca igual o superior a $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$. El resultado del paso 3 está de acuerdo con estos razonamientos.

PROBLEMA PRÁCTICO 5.5 ¿Cuál sería el ritmo de cambio del módulo de la velocidad cuando el muchacho pasa por el punto más bajo de la trayectoria?

Ejemplo 5.11 Un péndulo

Inténtelo usted mismo

Una bola de masa m está suspendida de una cuerda de longitud L y se mueve con velocidad de módulo constante v en un círculo horizontal de radio r. La cuerda forma un ángulo θ. Determinar (*a*) la dirección de la aceleración, (*b*) la tensión de la cuerda y (*c*) la velocidad de la bola.

PLANTEAMIENTO Dos fuerzas actúan sobre la bola: su peso, mg, y la tensión, T, de la cuerda (véase la figura 5.28). La suma vectorial de estas fuerzas va en la dirección de la aceleración.

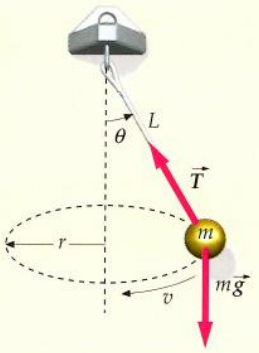


FIGURA 5.28

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	Respuestas
(*a*) 1. La bola se mueve en un círculo horizontal dando vueltas a velocidad de módulo constante. La aceleración va en la dirección centrípeta.	La aceleración es horizontal y dirigida desde la bola hacia el centro del círculo por donde se mueve.
(*b*) 1. Dibujar el diagrama de fuerzas para la bola (figura 5.29). Elegir la dirección positiva del eje x en la dirección de la aceleración de la pelota.	
2. Aplicar $\Sigma F_y = ma_y$ para la bola y obtener la tensión T.	$\Sigma F_y = ma_y \Rightarrow T\cos\theta - mg = 0$ por lo tanto, $\boxed{T = \dfrac{mg}{\cos\theta}}$
(*c*) 1. Aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ a la bola.	$\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow T\,\text{sen}\,\theta = m\dfrac{v^2}{r}$
2. Sustituir $mg/\cos\theta$ en lugar de T y obtener v.	$\dfrac{mg}{\cos\theta}\text{sen}\,\theta = m\dfrac{v^2}{r} \Rightarrow g\,\text{tg}\,\theta = \dfrac{v^2}{r}$ por lo tanto, $v = \boxed{\sqrt{rg\,\text{tg}\,\theta}}$

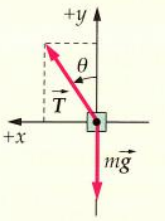


FIGURA 5.29

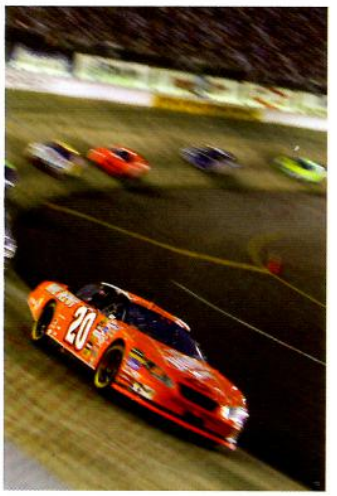
COMPROBACIÓN Cuando $\theta \to 90°$, $\cos\theta \to 0$ y $\text{tg}\,\theta \to$ infinito. En los resultados de los apartados (*b*) y (*c*), las expresiones para T y v tienden a infinito cuando $\theta \to 90°$.

OBSERVACIÓN Un objeto atado a una cuerda y moviéndose en un círculo horizontal, de modo que la cuerda forme un ángulo θ con la vertical, se denomina *péndulo cónico*.

CURVAS PERALTADAS Y NO PERALTADAS

Cuando el coche circula por una curva de una carretera horizontal, la fuerza centrípeta se origina por la fuerza de rozamiento ejercida por la carretera sobre los neumáticos del coche. Si el coche no se desliza radialmente, el rozamiento es estático. Si el coche se mueve a velocidad de módulo constante, la componente hacia delante de la fuerza de rozamiento se equilibra con las fuerzas que se oponen al movimiento del vehículo, como la fuerza de arrastre del aire y la fuerza de rozamiento a la rodadura. Si la resistencia del aire y la rodadura son despreciables y la velocidad del coche es de módulo constante, la componente en la dirección del movimiento de la fuerza de rozamiento es nula.

Si la curva está peraltada, la fuerza normal de la carretera tendrá una componente en la dirección centrípeta. El ángulo de peralte se elige de forma que no sea necesario ningún rozamiento para que el coche complete la curva a la velocidad correspondiente.



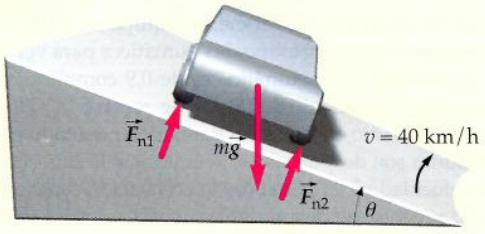
Conforme el coche toma la curva, el neumático se deforma debido a la fuerza de rozamiento producida por el asfalto. *(David Allio/Icon SMI/Corbis.)*

En 1993, los laboratorios Sandia simularon una prueba de descenso a Júpiter con una gran centrífuga que proporcionaba aceleraciones de hasta 200g. *(Sandia National Laboratory.)*

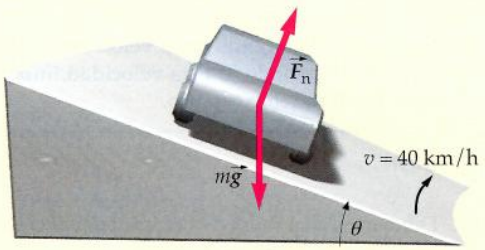
Ejemplo 5.12 Una curva con peralte

Una curva de radio 30 m tiene un ángulo de peralte θ. Es decir, la fuerza normal debido a la superficie de la carretera forma un ángulo de 30° con la vertical. Determinar el valor de θ para el cual un coche puede tomar la curva a 40 km/h aunque esté cubierta de hielo, considerando que la carretera no produzca prácticamente rozamiento.

PLANTEAMIENTO En este caso, existen sólo dos fuerzas sobre el coche: la gravedad y la fuerza normal $\vec{F}_n$ (figura 5.30). Dado que la curva tiene peralte, la fuerza normal tiene una componente horizontal que produce una aceleración centrípeta sobre el coche. El vector suma de las dos fuerzas va en la dirección de la aceleración.



(a)



(b)

FIGURA 5.30

SOLUCIÓN

1. Dibujar el diagrama de fuerzas para el coche (figura 5.31):

2. Aplicar $\Sigma F_y = ma_y$ al coche:

$$\Sigma F_y = ma_y$$
$$F_n \cos\theta - mg = 0 \Rightarrow F_n \cos\theta = mg$$

3. Aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ al coche:

$$\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow F_n \operatorname{sen}\theta = m\frac{v^2}{r}$$

4. Sustituir F_n usando el resultado del paso 2 y se obtiene θ:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{mv^2}{rmg} \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \frac{v^2}{rg}$$
$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{[(40{,}0\text{ km/h})(1\text{ h}/3{,}6\text{ ks})]^2}{(30{,}0\text{ m})(9{,}81\text{ m/s}^2)}$$
$$= \boxed{22{,}8°}$$

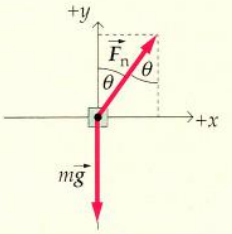


FIGURA 5.31

COMPROBACIÓN El ángulo de peralte es de 22,8°. Este valor es razonable pues un radio de 30 m es muy pequeño para una curva de autopista. Si comparamos con las curvas del Daytona International Speedway, éstas tienen un radio de 300 m y un ángulo de peralte de 31°.

OBSERVACIÓN El ángulo de peralte θ depende de v y r, pero no de la masa m; θ aumenta con v creciente y disminuye al aumentar r. Cuando el ángulo de peralte, la velocidad y el radio satisfacen la ecuación $\operatorname{tg}\theta = v^2/rg$, el coche toma la curva con suavidad sin tendencia a patinar hacia dentro o hacia afuera. Si la velocidad del coche es mayor que $\sqrt{rg\operatorname{tg}\theta}$, la carretera ejercerá una fuerza de rozamiento según la pendiente hacia abajo. Esta fuerza tiene una componente horizontal hacia el centro de la curvatura que proporciona la fuerza centrípeta adicional necesaria para evitar que el coche se mueva hacia fuera (patinar hacia arriba según la pendiente). Si la velocidad del coche es inferior a esta magnitud, la carretera ejercerá una fuerza de rozamiento hacia arriba según la pendiente para que el coche permanezca en la carretera.

SOLUCIÓN ALTERNATIVA En la resolución del problema se ha usado el criterio de escoger como dirección de un eje de coordenadas la dirección del vector aceleración, la dirección centrípeta. Sin embargo, la solución no es más difícil si elegimos como dirección de un eje la dirección de la pendiente. Esta es la opción que hemos tomado en la solución siguiente.

1. Dibujar el diagrama de fuerzas para el coche (figura 5.32). La dirección del eje x se toma en la dirección de la pendiente y el eje y se toma en la dirección perpendicular:

2. Aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ al coche:

$$\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow mg\operatorname{sen}\theta = ma_x$$

3. Dibujar un esquema y usar la trigonometría para obtener una expresión para a_x en función de a y de θ (figura 5.33):

$$a_x = a\cos\theta$$

4. Sustituir el resultado del paso 3 en el resultado del paso 2. Sustituir v^2/r por a y se obtiene θ.

$$mg\operatorname{sen}\theta = ma\cos\theta$$
$$g\operatorname{sen}\theta = \frac{v^2}{r}\cos\theta$$
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v^2}{rg} \Rightarrow \theta = \boxed{\operatorname{arctg}\frac{v^2}{rg}}$$

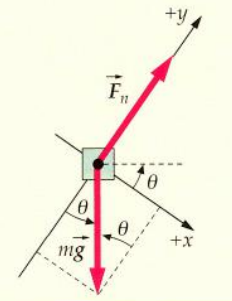


FIGURA 5.32

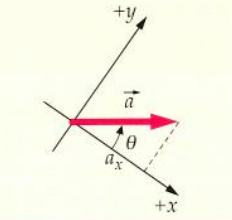


FIGURA 5.33

PROBLEMA PRÁCTICO 5.6 Determinar la componente de la aceleración normal a la superficie de la carretera.

Ejemplo 5.13 Una prueba de carretera — *Póngalo en su contexto*

Durante un trabajo de verano, un equipo de estudiantes diseña neumáticos de automóviles. Se prueba un nuevo prototipo de neumáticos para ver si el coeficiente de rozamiento estático entre el pavimento y el neumático es de 0,9 como indica el fabricante. En una prueba de deslizamiento, el automóvil fue capaz de recorrer a velocidad de módulo constante un círculo de 45,7 m de radio en 15,2 s sin patinar. Suponiendo que el arrastre con el aire y el rozamiento de rodadura son despreciables, además que la superficie es horizontal. (*a*) ¿Cuál fue el módulo de su velocidad v? (*b*) ¿Cuál fue la aceleración centrípeta? (*c*) Suponiendo que la fuerza del aire y el rozamiento son despreciables, ¿cuál es el valor mínimo del coeficiente de rozamiento estático?

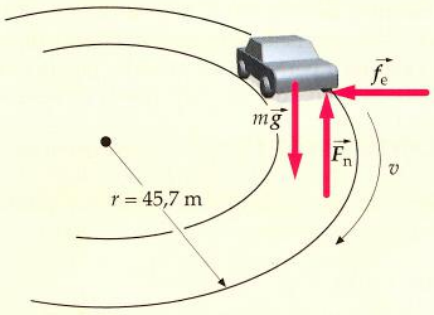


FIGURA 5.34

PLANTEAMIENTO La figura 5.34 muestra las fuerzas que actúan sobre el coche. La fuerza normal $\vec{F}_n$ equilibra el peso $m\vec{g}$. La fuerza horizontal es la fuerza de rozamiento estático, que suministra la fuerza centrípeta. Cuanto más rápido circula el coche, mayor es la fuerza centrípeta requerida. El módulo de la velocidad se determina a partir de la longitud de la circunferencia y del período T. Esta velocidad impone un límite inferior al valor máximo del coeficiente de rozamiento estático.

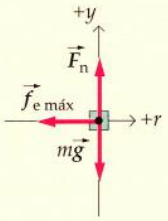


FIGURA 5.35

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Dibujar un diagrama de fuerzas para el coche (figura 5.35). La dirección positiva en la dirección r señala en la dirección opuesta al centro de curvatura:

2. Usar la expresión "el módulo de la velocidad es igual a la distancia dividida por el tiempo" para determinar la velocidad v:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi(45{,}7\text{ m})}{15{,}2\text{ s}} = \boxed{18{,}9\text{ m/s}}$$

(*b*) Utilizar v para calcular la aceleración centrípeta y tangencial:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(18{,}9\text{ m/s})^2}{(45{,}7\text{ m})} = \boxed{7{,}81\text{ m/s}^2}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \boxed{0}$$

La aceleración es 7,81 m/s² en la dirección centrípeta.

(*c*) 1. Aplicar $\Sigma F_y = ma_y$ a los movimientos vertical y radial del coche. Escoger como dirección positiva la radial hacia fuera:

$$\Sigma F_y = ma_y$$
$$F_n - mg = 0 \quad \text{por lo tanto,} \quad F_n = mg$$
$$\text{y} \quad f_{e\,máx} = \mu_e F_n = \mu_e mg$$

2. Aplicar $\Sigma F_r = ma_r$ al coche:

$$\Sigma F_r = ma_r$$
$$-f_{e\,máx} = m\left(-\frac{v^2}{r}\right) \Rightarrow f_{e\,máx} = m\frac{v^2}{r}$$

3. Sustituir el resultado del paso 1 (*a*) y despejar μ_e:

$$\mu_e mg = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow \mu_e g = \frac{v^2}{r}$$
$$\mu_e = \frac{v^2}{rg} = \frac{(18{,}9\text{ m/s})^2}{(45{,}7\text{ m})(9{,}81\text{ m/s}^2)} = \boxed{0{,}796}$$

COMPROBACIÓN Si μ_e fuera igual a 1, la fuerza hacia dentro del círculo sería mg y la aceleración centrípeta igual a g. En el ejemplo $\mu_e \approx 0{,}8$ y $a_c \approx 0{,}8g$.

OBSERVACIÓN ¿Está de acuerdo el resultado del test con el valor de 0,9 que proporciona el fabricante para el coeficiente de rozamiento estático? En realidad sí. Al calcular el módulo de la fuerza de rozamiento no tuvimos en cuenta el rozamiento con el aire y el rozamiento por rodadura. A una velocidad de 18,9 m/s, unos 68 km/h, el rozamiento con el aire es importante.

* 5.4 INTEGRACIÓN NUMÉRICA: EL MÉTODO DE EULER

Si una partícula se mueve bajo la influencia de una fuerza *constante*, su aceleración es constante, por lo que para determinar su velocidad y su posición podemos usar las fórmulas cinemáticas descritas en el capítulo 2 para el caso de aceleración constante. Consideremos ahora una partícula que se mueve en el espacio bajo la acción de una fuerza, y por consiguiente, de una aceleración, que depende de la posición y de la velocidad de la partícula. La posición, la velocidad y la aceleración de la partícula en un instante de tiempo determinan la posición y la velocidad en el siguiente instante que, a su vez, determinan la aceleración. La posición, la velocidad y la aceleración real de un objeto cambian continuamente con el tiempo. Se suele aproximar esta situación mediante el **método de Euler**, que consiste en reemplazar esta variación continua con el tiempo por pequeños intervalos de tiempo Δt, de tal forma que la aceleración en cada intervalo sea constante. Si el intervalo de tiempo es suficientemente pequeño, el cambio de la aceleración es pequeño y puede despreciarse.

Sean x_0, v_0 y a_0 la posición, la velocidad y la aceleración iniciales de la partícula en un instante de tiempo t_0. Si suponemos que durante Δt la aceleración es constante, la velocidad en el tiempo $t_1 = t_0 + \Delta t$ viene dada por

$$x_1 = x_0 + v_{0x}\,\Delta t$$

De forma análoga, si despreciamos cualquier cambio de la velocidad durante el intervalo de tiempo, la nueva posición viene dada por la ecuación

$$v_1 = v_{0x} + a_{0x}\,\Delta t$$

A partir de los valores de v_1 y x_1, calculamos la nueva aceleración a_1 usando la segunda ley de Newton y, posteriormente, usamos x_1, v_1 y a_1 para calcular x_2 y v_2:

$$x_2 = x_1 + v_{1x}\,\Delta t$$
$$v_2 = v_1 + a_{1x}\,\Delta t$$

La conexión entre la posición y la velocidad en el tiempo t_n y el tiempo $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ viene dada por

$$x_{n+1} = x_n + v_{nx}\,\Delta t \qquad 5.9$$

y

$$v_{n+1} = v_{nx} + a_{nx}\,\Delta t \qquad 5.10$$

Por lo tanto, para determinar la velocidad y la posición en un tiempo t, dividimos el intervalo de tiempo $t - t_0$ en un gran número de pequeños intervalos Δt y aplicamos las ecuaciones 5.9 y 5.10 empezando en el instante inicial t_0. Esto comporta una gran cantidad de cálculos simples y repetitivos que mediante un ordenador son fáciles de hacer. La técnica de dividir el intervalo de tiempo en pequeños intervalos de tiempo y calcular la aceleración, la velocidad y la posición en cada intervalo usando los valores del intervalo anterior se denomina integración numérica.

Para ilustrar el uso de la integración numérica, consideremos el problema de un paracaidista que salta en el aire, partiendo del reposo, desde una altura determinada, de modo que su movimiento depende únicamente de la fuerza de la gravedad y de la fuerza de resistencia del aire, que es proporcional al cuadrado de la velocidad. Tenemos que calcular la velocidad v y la distancia recorrida x en función del tiempo.

La ecuación que describe el movimiento de un objeto de masa m que parte del reposo es la ecuación 5.6 con $n = 2$:

$$mg - bv^2 = ma_x$$

donde la dirección positiva es la dirección hacia abajo. La aceleración, en estas condiciones, vale

$$a_x = g - \frac{b}{m}v^2 \qquad 5.11$$

	A	B	C	D
1	Δt =	0,5	s	
2	x0 =	0	m	
3	v0 =	0	m/s	
4	a0 =	9,81	m/s^2	
5	vt =	60	m/s	
6				
7	t	x	v	a
8	(s)	(m)	(m/s)	(m/s^2)
9	0,00	0,0	0,00	9,81
10	0,50	0,0	4,91	9,74
11	1,00	2,5	9,78	9,55
12	1,50	7,3	14,55	9,23
13	2,00	14,6	19,17	8,81
14	2,50	24,2	23,57	8,30
15	3,00	36,0	27,72	7,72
41	16,00	701,0	59,55	0,15
42	16,50	730,7	59,62	0,16
43	17,00	760,6	59,68	0,10
44	17,50	790,4	59,74	0,09
45	18,00	820,3	59,78	0,07
46	18,50	850,2	59,82	0,06
47	19,00	880,1	59,85	0,05
48	19,50	910,0	59,87	0,04
49	20,00	939,9	59,89	0,04
50				

(a)

	A	B	C	D
1	Δt =	0,5	s	
2	x0 =	0	m	
3	v0 =	0	m/s	
4	a0 =	9,81	m/s^2	
5	vt =	60	m/s	
6				
7	t	x	v	a
8	(s)	(m)	(m/s)	(m/s^2)
9	0	=B2	=B3	=$B$4*(1-C9^2/$B$5^2)
10	=A9+$B$1	=B9+C9*$B$1	=C9+D9*$B$1	=$B$4*(1-C10^2/$B$5^2)
11	=A10+$B$1	=B10+C10*$B$1	=C10+D10*$B$1	=$B$4*(1-C11^2/$B$5^2)
12	=A11+$B$1	=B11+C11*$B$1	=C11+D11*$B$1	=$B$4*(1-C12^2/$B$5^2)
13	=A12+$B$1	=B12+C12*$B$1	=C12+D12*$B$1	=$B$4*(1-C13^2/$B$5^2)
14	=A13+$B$1	=B13+C13*$B$1	=C13+D13*$B$1	=$B$4*(1-C14^2/$B$5^2)
15	=A14+$B$1	=B14+C14*$B$1	=C14+D14*$B$1	=$B$4*(1-C15^2/$B$5^2)
41	=A40+$B$1	=B40+C40*$B$1	=C40+D40*$B$1	=$B$4*(1-C41^2/$B$5^2)
42	=A41+$B$1	=B41+C41*$B$1	=C41+D41*$B$1	=$B$4*(1-C42^2/$B$5^2)
43	=A42+$B$1	=B42+C42*$B$1	=C42+D42*$B$1	=$B$4*(1-C43^2/$B$5^2)
44	=A43+$B$1	=B43+C43*$B$1	=C43+D43*$B$1	=$B$4*(1-C44^2/$B$5^2)
45	=A44+$B$1	=B44+C44*$B$1	=C44+D44*$B$1	=$B$4*(1-C45^2/$B$5^2)
46	=A45+$B$1	=B45+C45*$B$1	=C45+D45*$B$1	=$B$4*(1-C46^2/$B$5^2)
47	=A46+$B$1	=B46+C46*$B$1	=C46+D46*$B$1	=$B$4*(1-C47^2/$B$5^2)
48	=A47+$B$1	=B47+C47*$B$1	=C47+D47*$B$1	=$B$4*(1-C48^2/$B$5^2)
49	=A48+$B$1	=B48+C48*$B$1	=C48+D48*$B$1	=$B$4*(1+C49^2/$B$5^2)
50				

(b)

FIGURA 5.36 (*a*) Hoja de cálculo que se usa para calcular la posición y la velocidad de un paracaidista con una resistencia del aire proporcional a v^2. (*b*) Se muestra la misma hoja de cálculo Excel, con las fórmulas.

Conviene escribir la constante b/m en función de la velocidad límite v_t. Si $a = 0$ en la ecuación 5.11, se obtiene

$$0 = g - \frac{b}{m}v_T^2$$

$$\frac{b}{m} = \frac{g}{v_T^2}$$

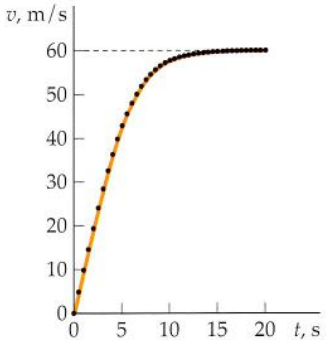
Sustituyendo g/v_T^2 por b/m en la ecuación 5.11, se llega a

$$a_x = g\left(1 - \frac{v^2}{v_T^2}\right) \qquad 5.12$$

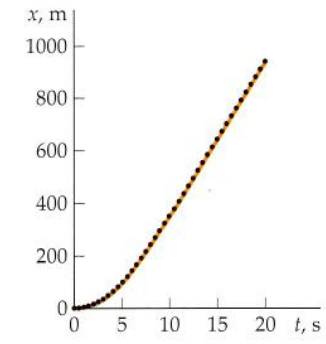
La aceleración en el tiempo t_n se calcula usando los valores de x_n y de v_n.

Para resolver la ecuación 5.12 numéricamente, tenemos que usar los valores numéricos de g y de v_t. Una velocidad límite razonable es 60 m/s. Si tomamos $x_0 = 0$, los valores iniciales son $x_0 = 0$, $v_0 = 0$, y $a_0 = g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$. Para determinar la velocidad v y la posición x transcurrido un tiempo $\Delta t = 20$ s, dividimos el intervalo de tiempo $0 < t < 20$ s en muchos intervalos pequeños Δt y aplicamos las ecuaciones 5.9, 5.10 y 5.12. Lo hacemos escribiendo un programa o usando una hoja de cálculo, como la que se muestra en la figura 5.36. Esta hoja de cálculo considera $\Delta t = 0{,}5$ s y para $t = 20$ s, obtiene $v = 59{,}89$/s y $x = 939{,}9$ m. La figura 5.37 muestra la representación gráfica de v respecto a t, y de x respecto a t para estos datos.

¿Cuál es la precisión de estos cálculos? Podemos estimarla volviendo a usar el mismo programa con otro intervalo de tiempo más pequeño. Si usamos $\Delta t = 0{,}25$ s, la mitad del valor utilizado en el primer cálculo, cuando $t = 20$ s obtenemos $v = 59{,}86$ m/s y $x = 943{,}1$ m. La diferencia en la velocidad es de un 0,05% mientras que la de la posición es un 0,3%. Estas son pues las estimaciones de la exactitud de los cálculos iniciales.



(*a*)



(*b*)

FIGURA 5.37 (*a*) Gráfico $v - t$ para un paracaidista, calculado mediante una integración numérica con $\Delta t = 0{,}5$ s. La línea horizontal discontinua muestra la velocidad límite $v_t = 60$ m/s. (*b*) Gráfico $x - t$ si $\Delta t = 0{,}5$ s.

Si la diferencia entre el valor a_{mx} para un intervalo de tiempo y el valor de a_x al comienzo del intervalo se hace más pequeña a medida que el intervalo de tiempo disminuye, podríamos pensar en la conveniencia de usar intervalos de tiempo muy pequeños, como por ejemplo $\Delta t = 0{,}000000001$ s. Hay dos razones que muestran que este procedimiento no conviene. Primera, cuanto más pequeño es el intervalo, mayor es el número de cálculos que hay que realizar, con lo cual el tiempo que necesita el programa aumenta. Segunda, el ordenador en cada paso del cálculo guarda un número determinado de dígitos significativos, por lo que en cada paso se produce un redondeo. Este es un proceso aditivo, con lo que cuantos más cálculos realicemos más significativo será el error del redondeo. Cuando hemos disminuido por primera vez el intervalo de tiempo, la precisión del resultado mejora porque a_i se aproxima a a_m para ese intervalo. Sin embargo, a medida que el intervalo disminuye, los errores de redondeo crecen y la exactitud del cálculo disminuye. Una buena regla en este tipo de cálculos es no usar más de 10^5 intervalos para una integración numérica típica.

5.5 CENTRO DE MASAS

Si lanzamos una pelota al aire, seguirá un movimiento parabólico. Pero si lanzamos un bastón al aire (figura 5.38), el movimiento es más complicado. Cada extremo del bastón se mueve de manera distinta y ambos extremos lo hacen de forma distinta a como se mueve el punto medio. Sin embargo, si nos fijamos bien veremos que hay un punto del bastón que se mueve siguiendo una curva parabólica aunque el resto de puntos no lo haga. Este punto, llamado **centro de masas**, se mueve como si toda la masa del bastón estuviera concentrada en ese punto y todas las fuerzas externas estuvieran aplicadas sobre él. Para determinar el centro de masas de un cuerpo, es útil visualizar el cuerpo como un sistema de partículas.

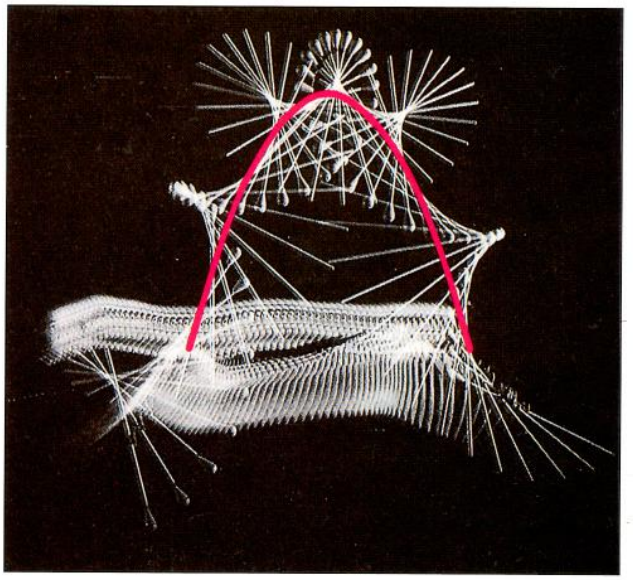


FIGURA 5.38 Fotografía estroboscópica de un bastón lanzado al aire. *(Estate of Harold E. Edgerton/Palm Press.)*

Consideremos en primer lugar un sistema simple formado por dos partículas en una dimensión (figura 5.39). Sean x_1 y x_2 las coordenadas de las partículas puntuales de masas m_1 y m_2 respecto a un origen elegido arbitrariamente. La coordenada x_{cm} del centro de masas viene definida por

$$Mx_{cm} = m_1x_1 + m_2x_2 \qquad 5.13$$

donde $M = m_1 + m_2$ es la masa total del sistema. Si se elige el origen y la dirección del eje x de tal forma que la posición de m_1 es el origen y m_2 está en la dirección positiva del eje x, entonces $x_1 = 0$ y $x_2 = d$, donde d es la distancia entre las partículas y el centro de masas viene dado por

$$Mx_{cm} = m_1x_1 + m_2x_2 = m_1(0) + m_2d$$

$$x_{cm} = \frac{m_2}{M}d = \frac{m_2}{m_1 + m_2}d \qquad 5.14$$

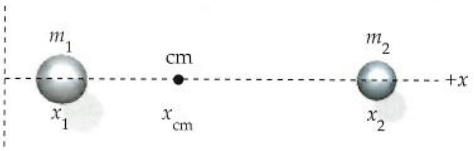


FIGURA 5.39

En el caso de sólo dos partículas, el centro de masas cae en un punto de la línea que une las dos partículas; si las partículas tienen la misma masa, entonces el centro de masas se halla justo en el punto medio entre ellas (figura 5.40*a*). Si las dos partículas tienen masas distintas, el centro de masas estará más cerca de la partícula con mayor masa (figura 5.40*b*).

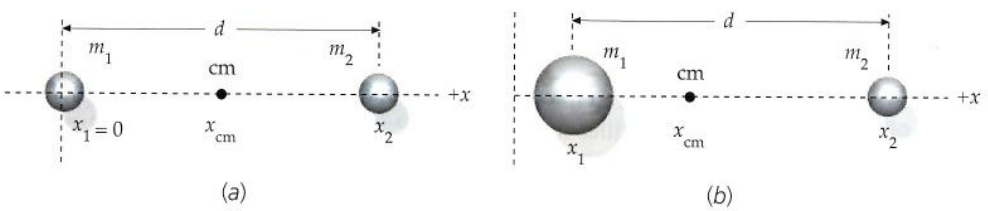


FIGURA 5.40

PROBLEMA PRÁCTICO 5.7
Una masa de 4 kg está en el origen y una masa de 2 kg está en $x = 6$ cm. Determinar x_{cm}.

Podemos generalizar de dos partículas en una dimensión a un sistema de muchas partículas en tres dimensiones. Para N partículas

$$Mx_{cm} = m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots + m_Nx_N$$

Utilizando una notación más concisa podemos escribir:

$$Mx_{cm} = \sum_i m_i x_i \qquad 5.15$$

donde $M = \sum_i m_i$ es la masa total del sistema. Igualmente,

$$My_{cm} = \sum_i m_i y_i \qquad 5.16$$

y

$$Mz_{cm} = \sum_i m_i z_i \qquad 5.17$$

El vector posición de la partícula i es $\vec{r}_i = x_i\hat{i} + y_i\hat{j} + z_i\hat{k}$. El **vector de posición del centro de masas**, $\vec{r}_{cm}$, viene definido por

$$M\vec{r}_{cm} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots = \sum_i m_i\vec{r}_i \qquad 5.18$$

DEFINICIÓN: CENTRO DE MASAS DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

donde $\vec{r}_{cm} = x_{cm}\hat{i} + y_{cm}\hat{j} + z_{cm}\hat{k}$.

Consideremos cuerpos extendidos como pelotas, bates de béisbol incluso coches. Esos cuerpos contienen un gran número de partículas con una distribución continua de masa. Para cuerpos con simetría elevada, el centro de masas coincide con el *centro de simetría*. Por ejemplo, el centro de masas de una esfera uniforme o de un cilindro uniforme está localizado en su *centro geométrico*. Para un objeto que tenga una línea o plano de simetría, el centro de masas está localizado en alguno de los puntos de esa línea o plano. Para determinar el centro de masas de un objeto continuo, basta reemplazar el sumatorio de la ecuación 5.18 por una integral:

$$M\vec{r}_{cm} = \int \vec{r}\,dm \qquad 5.19$$

DEFINICIÓN: CENTRO DE MASAS DE UN OBJETO CONTINUO

donde dm es un elemento de masa localizado en la posición $\vec{r}$, como se muestra en la figura 5.41. (Examinaremos en detalle cómo se resuelve esta integral después del ejemplo 5.15.)

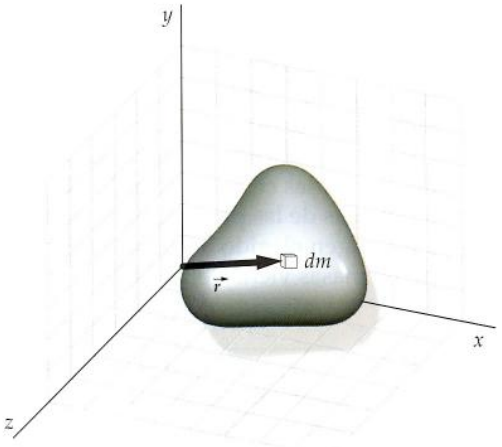


FIGURA 5.41 Elemento de masa dm localizado en $\vec{r}$ para determinar el centro de masas por integración.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Resolución de problemas de centros de masas

PLANTEAMIENTO El análisis del movimiento de uno o más objetos se simplifica si se determina el centro de masas. Resulta útil dibujar el objeto u objetos para determinar el centro de masas.

SOLUCIÓN

1. Compruebe la distribución de masas mediante ejes de simetría. Si hay ejes de simetría, el centro de masas estará localizado sobre ellos. Utilice los ejes de simetría como ejes de coordenadas.

2. Compruebe si la masa está distribuida mediante subsistemas altamente simétricos. Si es así, determine primero el centro de masas de los subsistemas individualmente y luego calcule el centro de masas del sistema tratando cada subsistema como una partícula puntual en su centro de masas.
3. Si el sistema contiene una o más partículas puntuales, coloque el origen de coordenadas sobre la localización de una de las partículas. (Si la partícula i-ésima está en el origen, entonces $\vec{r}_i = 0$.)

COMPROBACIÓN Asegúrese de que los resultados tienen sentido. En muchos casos, el centro de masas se halla cerca de la parte más grande y con más masa del objeto. El centro de masas de un sistema de varios objetos o de un objeto como un aro puede no estar colocado dentro o sobre objeto alguno.

Ejemplo 5.14 Centro de masas de la molécula de agua

Una molécula de agua está formada por un átomo de oxígeno y dos átomos de hidrógeno. El átomo de oxígeno tiene una masa de 16 unidades de masa atómica (u) y cada átomo de hidrógeno tiene una masa 1 u. Cada uno de los átomos de hidrógeno están separados una distancia media de 96 pm (96×10^{-12} m) del átomo de oxígeno y separados entre sí por un ángulo de 104,5°. Determinar el centro de masas de la molécula.

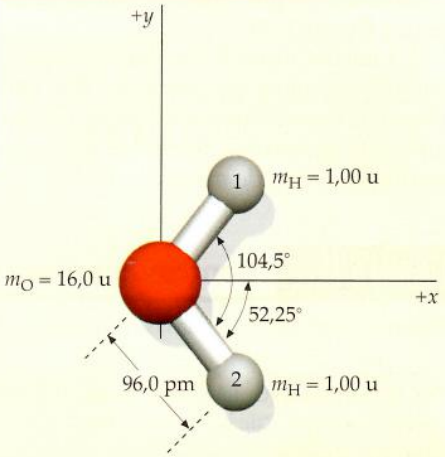


FIGURA 5.42

PLANTEAMIENTO El cálculo se simplifica si elegimos como origen la posición del átomo de oxígeno y el eje x como la bisectriz del ángulo entre los átomos de hidrógeno (figura 5.42). Por lo tanto, dada la simetría de la molécula, el centro de masas estará sobre el eje x y la línea que une el átomo de oxígeno con cada átomo de hidrógeno formará con el eje x un ángulo de 52,25°.

SOLUCIÓN

1. La posición del centro de masas viene dada por sus coordenadas, x_{cm} e y_{cm} (ecuaciones 5.15 y 5.16):

$$x_{cm} = \frac{\sum m_i x_i}{M}, \quad y_{cm} = \frac{\sum m_i y_i}{M}$$

2. Si estas expresiones se escriben explícitamente, obtenemos:

$$x_{cm} = \frac{m_{H1}x_{H1} + m_{H2}x_{H2} + m_O x_O}{m_{H1} + m_{H2} + m_O}$$

$$y_{cm} = \frac{m_{H1}y_{H1} + m_{H2}y_{H2} + m_O y_O}{m_{H1} + m_{H2} + m_O}$$

3. Hemos elegido como origen la localización del oxígeno, de modo que las dos coordenadas x e y del origen son cero. Las coordenadas x e y de los átomos de hidrógeno se calculan a partir del ángulo de 52,25° que cada átomo de hidrógeno forma con el eje x:

$$x_O = y_O = 0$$
$$x_{H1} = 96{,}0 \text{ pm} \cos 52{,}25° = 58{,}8 \text{ pm}$$
$$x_{H2} = 96{,}0 \text{ pm} \cos(-52{,}25°) = 58{,}8 \text{ pm}$$
$$y_{H1} = 96{,}0 \text{ pm} \operatorname{sen} 52{,}25° = 75{,}9 \text{ pm}$$
$$y_{H2} = 96{,}0 \text{ pm} \operatorname{sen}(-52{,}25°) = -75{,}9 \text{ pm}$$

4. Sustituyendo las coordenadas x y los valores de las masas en el paso 2, se obtiene x_{cm}:

$$x_{cm} = \frac{(1{,}00 \text{ u})(58{,}8 \text{ pm}) + (1{,}00 \text{ u})(58{,}8 \text{ pm}) + (16{,}0 \text{ u})(0)}{1{,}00 \text{ u} + 1{,}00 \text{ u} + 16{,}0 \text{ u}} = 6{,}53 \text{ pm}$$

$$x_{cm} = \frac{(1{,}00 \text{ u})(75{,}9 \text{ pm}) + (1{,}00 \text{ u})(-75{,}9 \text{ pm}) + (16{,}0 \text{ u})(0)}{1{,}00 \text{ u} + 1{,}00 \text{ u} + 16{,}0 \text{ u}} = 0{,}00 \text{ pm}$$

5. El centro de masas está en el eje x:

$$\vec{r}_{cm} = x_{cm}\hat{i} + y_{cm}\hat{j} = \boxed{6{,}53 \text{ pm } \hat{i} + 0{,}00\hat{j}}$$

COMPROBACIÓN Se puede ver que $y_{cm} = 0$ a partir de la simetría de la distribución de masa. Asimismo, el centro de masas está muy próximo al átomo de oxígeno, el de mayor masa, como era de esperar.

OBSERVACIÓN La distancia 96 pm se lee "noventa y seis picometros", donde el prefijo pico se refiera al factor 10^{-12}.

El ejemplo 5.14 también puede resolverse determinando en primer lugar el centro de masas de los dos átomos de hidrógeno aisladamente. Para un sistema de tres partículas, la ecuación 5.18 es

$$M\vec{r}_{cm} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3$$

Los dos primeros términos del segundo miembro de esta ecuación están relacionados con el centro de masas de las dos primeras partículas $\vec{r}'_{cm}$:

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = (m_1 + m_2)\vec{r}'_{cm}$$

El centro de masas del sistema de tres partículas será, por lo tanto,

$$M\vec{r}_{cm} = (m_1 + m_2)\vec{r}'_{cm} + m_3\vec{r}_3$$

Así, podemos determinar primero el centro de masas de dos de las partículas, por ejemplo, los átomos de hidrógeno, y después reemplazarlos por una sola partícula de masa total $m_1 + m_2$ en aquel centro de masas (figura 5.43).

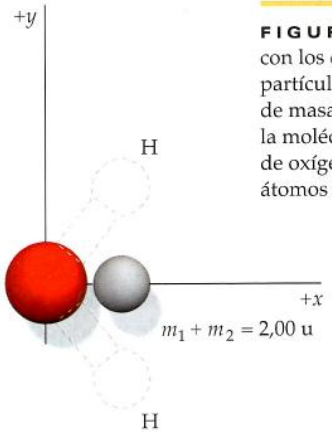


FIGURA 5.43 El ejemplo 5.14 puede considerarse con los dos átomos de H reemplazados por una sola partícula de masa $m_1 + m_2 = 2$ u sobre el eje x en el centro de masas de los átomos originales. El centro de masas de la molécula de agua se encuentra entonces entre el átomo de oxígeno en el origen y el centro de masas de los dos átomos de hidrógeno calculado previamente.

La misma técnica nos permite calcular los centros de masas de sistemas más complejos, como, por ejemplo, dos barras uniformes (figura 5.44). El centro de masas de cada barra por separado se encuentra en el centro de la barra. El centro de masas del sistema se determina tratando cada barra como una partícula puntual en su propio centro de masas.

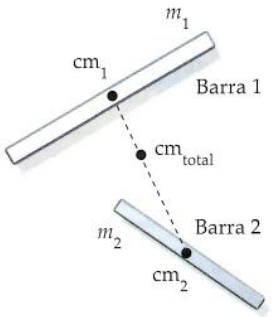


FIGURA 5.44

Ejemplo 5.15 Centro de masas de una lámina de madera

Determinar el centro de masas de la lámina de madera de la figura 5.45*a*.

PLANTEAMIENTO La lámina puede dividirse en dos partes simétricas (figura 5.45*b*). El centro de masas de cada parte es su centro geométrico. Sea m_1 la masa de la parte 1 y m_2 la masa de la parte 2. La masa total es $M = m_1 + m_2$. Las masas son proporcionales a las áreas, siendo A, A_1 y A_2 el área total y las áreas de las partes de masa m_1 y m_2, respectivamente.

SOLUCIÓN

Pasos

1. Expresar las coordenadas x e y del centro de masas en función de m_1 y m_2:

$$x_{cm} = \frac{1}{M}(m_1x_{cm1} + m_2x_{cm2})$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M}(m_1y_{cm1} + m_2y_{cm2})$$

2. Sustituir los cocientes de las áreas por las relaciones entre las masas:

$$x_{cm} = \frac{A_1}{A}x_{cm1} + \frac{A_2}{A}x_{cm2}$$

$$y_{cm} = \frac{A_1}{A}y_{cm1} + \frac{A_2}{A}y_{cm2}$$

3. Calcular las áreas y los cocientes entre las áreas usando los datos de la figura 5.45*b*:

$$A_1 = 0{,}32\ m^2; \quad A_2 = 0{,}040\ m^2$$

$$\frac{A_1}{A} = \frac{8{,}0}{9{,}0} \quad \frac{A_2}{A} = \frac{1{,}0}{9{,}0}$$

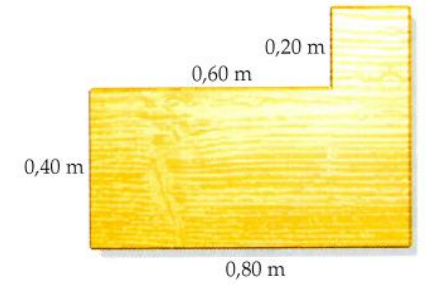
4. Expresar las coordenadas x e y del centro de masas de cada una de las partes de la lámina por inspección simple de la figura:

$$x_{cm1} = 0{,}40\ m, \quad y_{cm1} = 0{,}20\ m$$

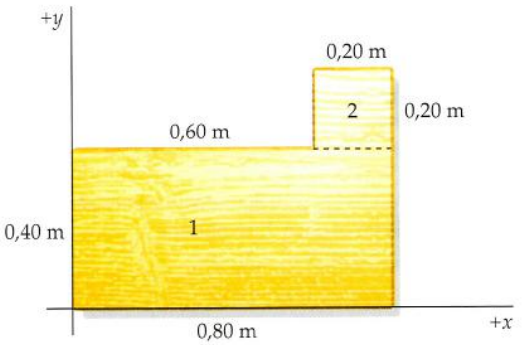
$$x_{cm2} = 0{,}70\ m, \quad y_{cm2} = 0{,}50\ m$$

5. Sustituir estos resultados en el resulado del paso 2 para calcular x_{cm} e y_{cm}:

$$x_{cm} = \boxed{0{,}43\ m}, \quad y_{cm} = \boxed{0{,}23\ m}$$



(a)



(b)

FIGURA 5.45

COMPROBACIÓN Como era de esperar, el centro de masas está muy próximo al centro de masas de la parte 1, ya que $m_1 = 8m_2$.

OBSERVACIÓN El cálculo del centro de masas es más sencillo si se coloca el origen en el centro geométrico de la parte 1 de la lámina y se dibuja el eje x señalando el centro de la parte 2.

* DETERMINACIÓN DEL CENTRO DE MASAS POR INTEGRACIÓN

En esta sección se determina el centro de masas por integración (ecuación 5.19):

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm$$

Para ilustrar la técnica de cómo establecer la integración, trataremos el problema simple de determinar el centro de masas de una barra uniforme y delgada.

Barra uniforme Primero, elegimos el sistema de coordenadas. Una buena elección es un sistema de coordenadas con el eje x a lo largo de la barra, con el origen en un extremo (figura 5.46). En la figura se muestra un elemento de masa dm de longitud dx situado a una distancia x del origen. La ecuación 5.19 nos lleva entonces a

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm = \frac{1}{M}\int x\hat{i}\, dm$$

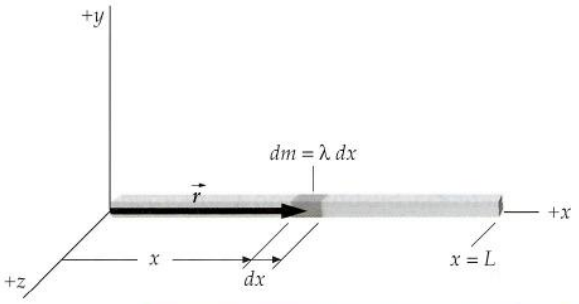


FIGURA 5.46

La masa está distribuida a lo largo del eje x dentro del intervalo $0 \le x \le L$. El barrido de dm a lo largo de toda la barra (y en la dirección positiva del eje x) se determina mediante los límites de la integral 0 y L. El cociente dm/dx es la masa por unidad de longitud λ; por lo tanto, $dm = \lambda dx$:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\hat{i}\int x\, dm = \frac{1}{M}\hat{i}\int_0^L x\lambda\, dx \qquad 5.20$$

donde

$$M = \int dm = \int_0^L \lambda\, dx \qquad 5.21$$

Si la barra es uniforme, λ es constante y puede sacarse como factor en cada una de las integrales de 5.20 y 5.21, obteniéndose

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\lambda\hat{i}\int_0^L x\, dx = \frac{1}{M}\lambda\hat{i}\frac{L^2}{2} \qquad 5.22$$

y

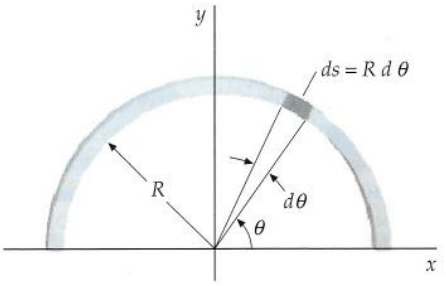
$$M = \lambda\int_0^L dx = \lambda L \qquad 5.23$$

Despejando λ de la ecuación 5.23, se obtiene $\lambda = M/L$. Entonces, para una barra uniforme la masa por unidad de longitud es igual a la masa total dividida por la longitud total. Sustituyendo λL en lugar de M en la ecuación 5.22, completamos el cálculo y llegamos al resultado esperado

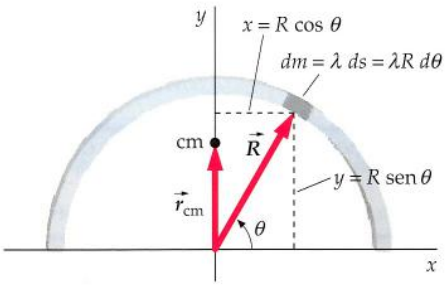
$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{\lambda L}\lambda\hat{i}\frac{L^2}{2} = \frac{1}{2}L\hat{i}$$

Aro semicircular El cálculo para determinar el centro de masas de un aro semicircular de radio R es más fácil si elegimos el origen sobre la línea de simetría del alambre (el eje y) en el centro de curvatura como indica la figura 5.47. Para determinar el centro de masas usamos la ecuación 5.19, $M\vec{r}_{cm} = \int \vec{r}\, dm$, donde $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$. La distribución de masa semicircular sugiere la conveniencia de usar coordenadas polares, para las cuales $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\text{sen}\,\theta$. Con estas sustituciones tenemos

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int (x\hat{i} + y\hat{j})\, dm = \frac{1}{M}\int R(\cos\theta\hat{i} + \text{sen}\,\theta\hat{j})\, dm$$



(a)



(b)

FIGURA 5.47 Geometría para el cálculo del centro de masas de un aro semicircular por integración.

* En coordenadas polares, las coordenadas de un punto son r y θ, donde r es el módulo del vector posición y θ el ángulo que forma el vector posición con el eje $+x$.

Ahora expresamos dm en función de $d\theta$. Primero, el elemento de masa dm tiene longitud $ds = R\,d\theta$, por lo tanto,

$$dm = \lambda\, ds = \lambda R\, d\theta$$

donde $\lambda = dm/ds$ es la masa por unidad de longitud. De esta forma tenemos

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int R(\cos\theta\,\hat{i} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{j})\lambda R\,d\theta$$

La evaluación de esta integral supone que dm recorra la distribución de masa semicircular. Esto significa que los límites de θ son $0 \leq \theta \leq \pi$. Se integra en la dirección de θ creciente, por lo que los límites van de 0 a π. Se obtiene entonces

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int_0^{\pi} R(\cos\theta\hat{i} + \operatorname{sen}\theta\hat{j})\lambda R\,d\theta = \frac{\lambda R^2}{M}\left(\hat{i}\int_0^{\pi}\cos\theta\,d\theta + \hat{j}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\theta\,d\theta\right)$$

El aro es uniforme y sabemos que $\lambda = M/\pi r$, donde πr es la longitud de la semicircunferencia. Sustituyendo λ y reordenando términos

$$\vec{r}_{cm} = \frac{R}{\pi}\left(\hat{i}\int_0^{\pi}\cos\theta\,d\theta + \hat{j}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\theta\,d\theta\right) = \frac{R}{\pi}\left(\hat{i}\operatorname{sen}\theta\Big|_0^{\pi} - \hat{j}\cos\theta\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{2}{\pi}R\hat{j}$$

El centro de masas está en el eje y a una distancia de $2R/\pi$ del origen. Curiosamente, está fuera del objeto.

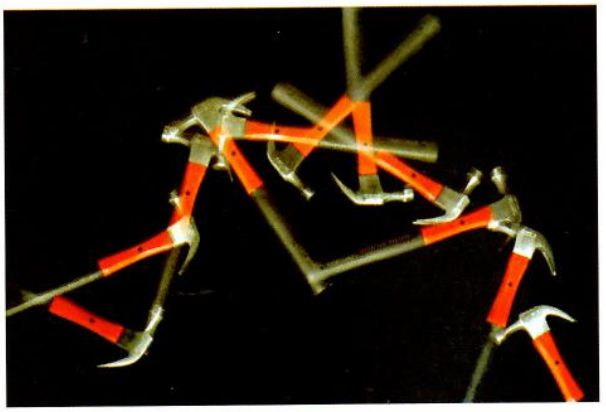


FIGURA 5.48 El centro de masas (punto negro) del martillo se mueve a lo largo de una trayectoria parabólica. *(LorenWinters/Visual Unlimited.)*

MOVIMIENTO DEL CENTRO DE MASAS

El movimiento de un objeto o de un sistema de partículas se puede describir en función del movimiento del centro de masas, que puede considerarse como el movimiento global del sistema más el movimiento de las partículas individuales en el sistema relativo al centro de masas. La figura 5.48 es una fotografía obtenida con destellos múltiples de un martillo lanzado al aire. Mientras el martillo está en el aire, el centro de masas sigue una trayectoria parabólica, la misma que seguiría una partícula puntual. Las otras partes del martillo rotan en torno a este punto cuando el martillo se mantiene en el aire.

El movimiento del centro de masas para un sistema de partículas está relacionado con la fuerza neta que actúa sobre el sistema como un todo. Podemos demostrar esto examinando el movimiento de un sistema de n partículas de masa total M. Para determinar la aceleración del centro de masas, calcularemos primero su velocidad, derivando la ecuación 5.18 ($M\vec{r}_{cm} = \sum m_i\vec{r}_i$) respecto al tiempo:

$$M\frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{r}_2}{dt} + \cdots = \sum_i m_i\frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

La derivada temporal de la posición es la velocidad y se obtiene

$$M\vec{v}_{cm} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots = \sum_i m_i\vec{v}_i \qquad 5.24$$

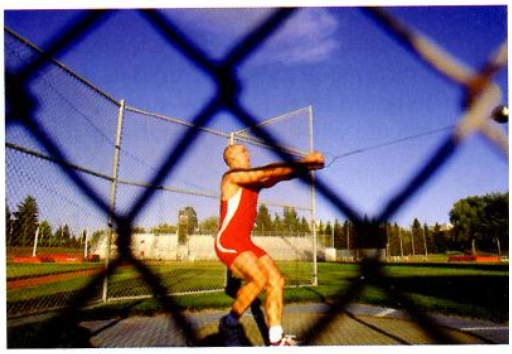
Una nueva diferenciación nos da las aceleraciones:

$$M\vec{a}_{cm} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \cdots = \sum_i m_i\vec{a}_i \qquad 5.25$$

donde $\vec{a}_i$ es la aceleración de la partícula i-ésima y $\vec{a}_{cm}$ es la aceleración del centro de masas. Sin embargo, de acuerdo con la segunda ley de Newton, $m_i\vec{a}_i$ es igual a la suma de las fuerzas que actúan sobre la partícula i, por lo que

$$\sum_i m_i\vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i$$

donde el término de la derecha es la suma de todas las fuerzas que actúan en cada partícula del sistema. Algunas de estas fuerzas son fuerzas internas (ejercidas sobre una partícula del sistema por otra partícula del sistema) y otras son fuerzas



Si la bola se mueve en un círculo horizontal a velocidad constante, su vector aceleración apunta en la dirección centrípeta (hacia el centro del círculo). La fuerza neta sobre la bola se encuentra en la dirección del vector aceleración. La componente centrípeta de la fuerza neta la produce el lanzador tirando de la cuerda hacia adentro. *(Pete Saloutos/Corbis.)*

Véase el **Apéndice de matemáticas** *para más información sobre* **Integrales**

externas (ejercidas sobre una partícula del sistema por una partícula que no está en el sistema). Así,

$$M\vec{a}_{cm} = \sum_i \vec{F}_{i\,int} + \sum_i \vec{F}_{i\,ext} \qquad 5.26$$

De acuerdo con la tercera ley de Newton, las fuerzas se presentan emparejadas acción-reacción. Así, para cada fuerza interna que actúa sobre una partícula existe una fuerza igual pero opuesta que actúa sobre otra partícula. Cuando se suman todas las fuerzas internas, cada pareja acción-reacción suma cero, de forma que $\sum \vec{F}_{i\,int} = 0$. La ecuación 5.26 se convierte en

$$\vec{F}_{neta\,ext} = \sum_i \vec{F}_{i\,ext} = M\vec{a}_{cm} \qquad 5.27$$

SEGUNDA LEY DE NEWTON PARA UN SISTEMA

Esta ecuación nos dice que la masa total M multiplicada por la aceleración del centro de masas $\vec{a}_{cm}$ es igual a la fuerza externa resultante que actúa sobre el sistema. Así, tenemos:

El centro de masas de un sistema se mueve como una partícula de masa $M = \sum m_i$ sometida a la influencia de la fuerza externa resultante que actúa sobre el sistema.

Este teorema es importante porque nos muestra cómo describir el movimiento del centro de masas de cualquier sistema de partículas. El centro de masas se comporta exactamente igual que una sola partícula puntual sometida únicamente a las fuerzas externas. Los movimientos individuales de los elementos del sistema generalmente son mucho más complejos y no vienen descritos por la ecuación 5.27. El martillo lanzado al aire de la figura 5.48 es un ejemplo. La única fuerza que actúa es la gravedad y, por lo tanto, el centro de masas del martillo se mueve según una trayectoria parabólica, como si se tratara de una partícula puntual (la rotación del martillo alrededor de su centro de masas no viene descrita por la ecuación 5.27).

Un caso especial del movimiento del centro de masas es aquel en que sobre el sistema no actúa ninguna fuerza externa neta. Por lo tanto, $\vec{a}_{cm} = 0$ y el centro de masas está en reposo o se mueve con velocidad constante. Las fuerzas internas y el movimiento pueden ser complejos, pero el comportamiento del centro de masas es simple. Además, si la fuerza externa neta no es cero, pero una componente de ella en una dirección dada, por ejemplo, la dirección x, es cero, entonces $a_{cmx} = 0$ y v_{cmx} permanece constante. Un ejemplo de esto es un proyectil en ausencia de resistencia del aire. La fuerza externa neta sobre el proyectil es la fuerza gravitatoria. Esta fuerza actúa hacia abajo, por lo que la componente de la fuerza en la dirección horizontal es cero. Se sigue entonces, que la componente horizontal de la velocidad del centro de masas es constante.

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 5.2

Un cilindro descansa sobre un papel encima de una mesa (figura 5.49). Cuando se tira del papel hacia la derecha, el cilindro rueda hacia la izquierda en *relación al papel*. ¿Cómo se mueve el centro de masas del cilindro en *relación a la mesa*?

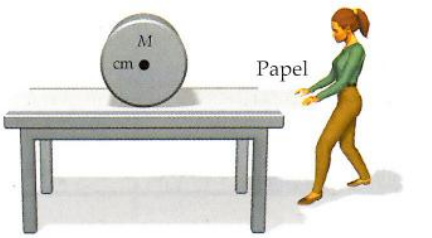


FIGURA 5.49

Ejemplo 5.16 Un proyectil que explota

Un proyectil se lanza al aire desde el nivel del suelo y debería aterrizar a 55 m. Sin embargo en el punto más alto de su trayectoria explota en dos fragmentos de igual masa. Justo después de la explosión, uno de los fragmentos tiene velocidad instantánea cero y cae directamente al suelo. ¿Dónde cae el otro fragmento? Despreciar la resistencia del aire.

PLANTEAMIENTO Sea el proyectil el sistema. Entonces, las fuerzas de explosión son todas fuerzas internas. Como la única fuerza externa que actúa sobre el sistema es la de la gravedad, el centro de masas, que está en todo momento a mitad de camino entre los fragmentos, continúa con su trayectoria parabólica como si no hubiera explosión (figura 5.50).

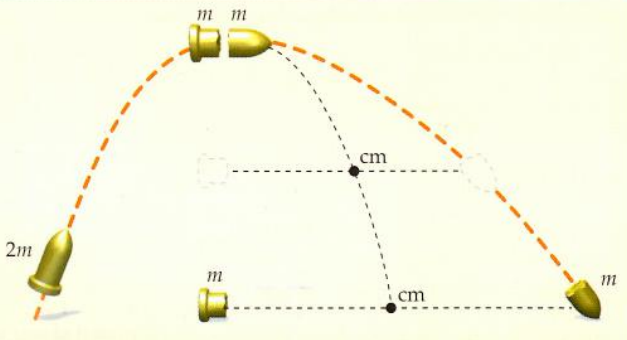


FIGURA 5.50

SOLUCIÓN

1. Sea $x = 0$ la posición inicial del proyectil. Las posiciones de aterrizaje x_1 y x_2 de los fragmentos están relacionadas con la posición final del centro de masas por:

$$(2m)x_{cm} = mx_1 + mx_2$$
$$\text{o} \quad 2x_{cm} = x_1 + x_2$$

2. En el impacto, $x_{cm} = R$ y $x_1 = 0{,}5R$, donde $R = 55$ m es el alcance del proyectil si no explota. Se obtiene entonces para x_2:

$$x_2 = 2x_{cm} - x_1 = 2R - 0{,}5R = 1{,}5R$$
$$= 1{,}5(55\text{ m}) = \boxed{83\text{ m}}$$

COMPROBACIÓN Las fuerzas de la explosión empujaron al fragmento 1 hacia atrás de forma que el fragmento 2 fue empujado hacia adelante con la misma fuerza pero con dirección contraria. Como cabía esperar, el fragmento 2 cae al suelo más allá del punto donde hubiera caído el proyectil si no hubiera explotado.

OBSERVACIÓN La figura 5.51 representa la altura en función de la distancia para los proyectiles que explotan cuando el primer fragmento posee una velocidad horizontal igual a la mitad de la velocidad horizontal inicial. Como en el ejemplo original, en el cual el primer fragmento cae verticalmente hacia abajo, el centro de masas sigue una trayectoria normal parabólica. Si ambos fragmentos tienen la misma componente vertical de la velocidad después de la explosión, ambos aterrizarán al mismo tiempo. Si justo después de la explosión, la componente vertical de la velocidad vectorial de uno de los fragmentos es menor que la del otro, el fragmento con componente vertical menor chocará primero contra el suelo. Tan pronto como lo haga, el suelo ejercerá una fuerza sobre él y la fuerza neta sobre el sistema dejará de ser sólo la gravedad. Desde este momento, nuestro análisis no es válido.

PROBLEMA PRÁCTICO 5.8 Si la masa del fragmento que cae directamente hacia abajo es el doble que la masa del otro fragmento, ¿a qué distancia del punto de lanzamiento aterrizará el más ligero?

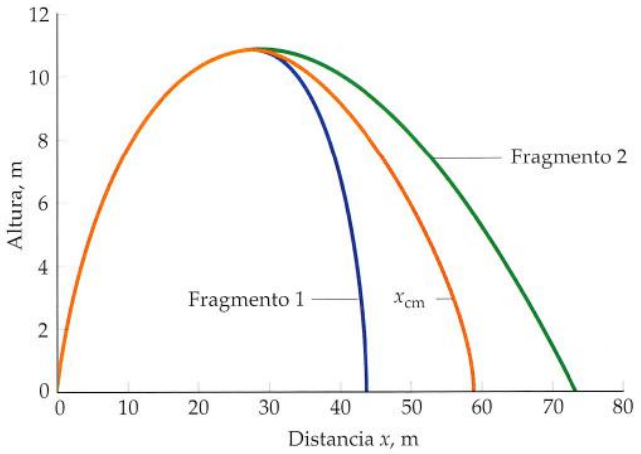


FIGURA 5.51

Ejemplo 5.17 Cambio de plazas en un bote

Pete (masa 80 kg) y Dave (masa 120 kg) se encuentran en un bote de remos (masa 60 kg). Dave está en el centro del bote, remando, y Pete en un extremo a 2 m del centro. Dave se cansa de remar y, una vez que el bote se ha detenido, intercambia su puesto con Pete. ¿Qué distancia se ha movido el bote al intercambiarse las dos personas? (Despreciar cualquier fuerza horizontal ejercida por el agua.)

PLANTEAMIENTO Sea el sistema Pete-Dave-bote. Como no hay fuerzas externas en dirección horizontal, el centro de masas no se mueve horizontalmente respecto a un sistema de referencia inercial como el agua. Aplicar la ecuación 5.15 ($Mx_{cm} = \Sigma m_i x_i$) a Dave y Pete antes y después del cambio de plazas.

SOLUCIÓN

1. Dibujar un diagrama del sistema en sus configuraciones inicial y final (figura 5.52). Hágase $L = 2$ m y $d = \Delta x_{bote}$, la distancia que el bote se desplaza hacia la derecha cuando se permutan las posiciones:

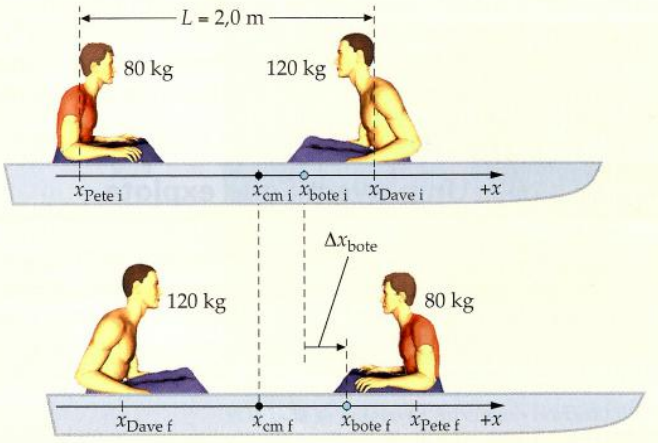


FIGURA 5.52 Pete y Dave cambian sus plazas, visto desde el sistema de referencia sujeto al agua. El punto azul indica el centro de masas del bote mientras que el negro es el centro de masas del sistema Pete-Dave-bote.

2. Aplicar la ecuación 5.15 a Dave y Pete antes y después del cambio de plazas. Los ejes de coordenadas miden las posiciones desde el sistema de referencia del agua:

$$Mx_{\text{cm i}} = m_{\text{Pete}}x_{\text{Pete i}} + m_{\text{Dave}}x_{\text{Dave i}} + m_{\text{bote}}x_{\text{bote i}}$$

y

$$Mx_{\text{cm f}} = m_{\text{Pete}}x_{\text{Pete f}} + m_{\text{Dave}}x_{\text{Dave f}} + m_{\text{bote}}x_{\text{bote f}}$$

3. Restar las dos ecuaciones anteriores. Sustituir Δx_{cm} por 0, $d + L$ por Δx_{Pete}, $d - L$ por Δx_{Dave} y d por Δx_{bote}:

$$M\Delta x_{\text{cm}} = m_{\text{Pete}}\Delta x_{\text{Pete}} + m_{\text{Dave}}\Delta x_{\text{Dave}} + m_{\text{bote}}\Delta x_{\text{bote}}$$

$$0 = m_{\text{Pete}}(d + L) + m_{\text{Dave}}(d + L) + m_{\text{bote}}d$$

4. Despejar d:

$$d = \frac{(m_{\text{Dave}} - m_{\text{Pete}})}{m_{\text{Dave}} + m_{\text{Pete}} + m_{\text{bote}}}L = \frac{(120\text{ kg} - 80\text{ kg})}{120\text{ kg} + 80\text{ kg} + 60\text{ kg}}(2{,}0\text{ m}) = \boxed{0{,}31\text{ m}}$$

COMPROBACIÓN La masa de Dave es mayor que la de Pete; por tanto, cuando permutan sus posiciones el centro de masas se desplaza hacia la popa. El centro de masas del bote tenía que moverse en dirección opuesta a fin de que el centro de masas del sistema Dave-Pete-bote permaneciera estático. El resultado del paso 4 es el desplazamiento del bote. Es positivo, como cabía esperar.

Ejemplo 5.18 Deslizamiento de un bloque

Una cuña de masa m_2 se encuentra en reposo sobre una balanza como indica la figura 5.53. Un bloque pequeño de masa m_1 se desliza por el plano inclinado sin rozamiento de la cuña. Determinar la lectura de la balanza mientras el bloque se desliza.

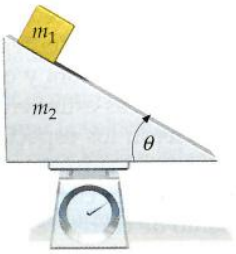


FIGURA 5.53

PLANTEAMIENTO La cuña y el bloque constituyen nuestro sistema. Como el bloque acelera hacia abajo por la cuña, el centro de masas posee componentes de aceleración hacia la derecha y hacia abajo. Las fuerzas externas que actúan sobre el sistema son los pesos del bloque y la cuña, la fuerza de rozamiento estático f_e de la balanza sobre la cuña y la fuerza normal F_n ejercida hacia arriba por la balanza. La lectura de la balanza es igual al módulo de F_n.

SOLUCIÓN

1. Dibujar un diagrama de fuerzas para el sistema balanza-bloques (figura 5.54):

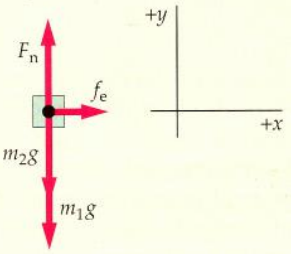


FIGURA 5.54

2. Expresar la componente vertical de la segunda ley de Newton para el sistema y despejar F_n:

$$F_n - m_1g - m_2g = Ma_{\text{cm}y} = (m_1 + m_2)a_{\text{cm}y}$$

$$F_n = (m_1 + m_2)g + (m_1 + m_2)a_{\text{cm}y}$$

3. Usando la ecuación 5.21, expresar $a_{\text{cm},y}$ en función de la aceleración del bloque a_{1y}:

$$Ma_{\text{cm}y} = m_1a_{1y} + m_2a_{2y}$$

$$(m_1 + m_2)a_{\text{cm}y} = m_1a_{1y} + 0$$

$$a_{\text{cm}y} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}a_{1y}$$

4. En el ejemplo 4.7, vimos que un bloque que se desliza hacia abajo por un plano inclinado estacionario posee la aceleración g sen θ. Determinar la componente y de esta aceleración usando trigonometría y utilizarla para determinar $a_{\text{cm},y}$:

por lo tanto, $a_{1y} = -a_1 \operatorname{sen}\theta$, donde $a_1 = g \operatorname{sen}\theta$

$$a_{1y} = -(g \operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta = -g \operatorname{sen}^2\theta$$

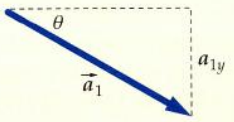


FIGURA 5.55

5. Sustituir $a_{1,y}$ por el valor obtenido en el paso 3:

$$a_{\text{cm}y} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}a_{1y} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}g \operatorname{sen}^2\theta$$

6. Sustituir $a_{\text{cm},y}$ por el valor obtenido en el paso 2 y calcular F_n:

$$F_n = (m_1 + m_2)g + (m_1 + m_2)a_{\text{cm}y}$$

$$= (m_1 + m_2)g - m_1g \operatorname{sen}^2\theta = [m_1(1 - \operatorname{sen}^2\theta) + m_2]g$$

$$= \boxed{(m_1 \cos^2\theta + m_2)g}$$

COMPROBACIÓN Para $\theta = 0$, $\cos\theta = 1$, el resultado del paso 5 es, como era de esperar, igual a la suma de los pesos. Para $\theta = 90°$, $\cos\theta = 0$, el resultado del paso 5 es, efectivamente, igual al peso de la cuña sola.

PROBLEMA PRÁCTICO 5.9 Determinar la fuerza F_x ejercida sobre la cuña por la balanza.

Temas de actualidad en Física

Reconstrucción de accidentes - Medidas y Fuerzas

Cuatro adolescentes conducían hacia una casa situada a las afueras de la ciudad, donde se celebraba Halloween. Cuando el coche empezaba a tomar una de las curvas, la conductora vio un ciervo en medio de la carretera y giró el volante bruscamente al tiempo que frenaba, lo que provocó que el coche derrapara. Deslizándose sobre la carretera llegó hasta la cuneta, salió de la carretera y cayó sobre un campo sembrado por el que continuó deslizándose hasta que se detuvo.

Un coche es remolcado tras un accidente. *(Mikael Karlsson.)*

Gracias a los airbags y a los cinturones de seguridad nadie murió, aunque todos pasaron por el hospital. El coche fue remolcado por la grúa. Sin embargo, la investigación del accidente no finalizó hasta saber si el coche iba con exceso de velocidad.

Los especialistas en reconstrucción de accidentes investigaron el escenario y utilizaron información sobre la física de los accidentes para determinar lo que sucedió antes, durante y después del accidente[1]. Después del accidente, un oficial de policía, un perito de la compañía aseguradora y otro perito contratado por el departamento de carreteras estuvieron observando el escenario del siniestro.

Lo primero que hicieron los especialistas fue fotografiar y tomar medidas de todo lo que estuviera relacionado con el accidente. Midieron la carretera, con el objeto de calcular el radio de la curva y el ángulo de peralte y compararlo con los datos del departamento de carreteras. Midieron las marcas que los neumáticos dejaron sobre la carretera y sobre el campo.[2] Utilizaron un trineo de arrastre para medir el coeficiente de rozamiento sobre el campo. Midieron las distancias verticales y horizontales desde el borde de la carretera hasta el comienzo de las marcas sobre el campo. Midieron el ángulo del pavimento con respecto a la horizontal y a lo largo de la dirección de las marcas de los neumáticos.

Utilizando toda esta información pudieron calcular una trayectoria simplificada del coche desde el momento en que salió de la carretera hasta caer sobre el campo. Conociendo esta trayectoria se pudo determinar la velocidad con que el coche salió de la carretera. Los cálculos obtenidos a partir de las marcas de derrape sobre el campo confirmaron ese resultado. Finalmente, calcularon la velocidad al inicio del derrape sobre la carretera. Para ello utilizaron el coeficiente de rozamiento cinético, pues estaba claro que las ruedas se bloquearon y no rodaron durante el derrape.

Concluyeron que el coche circulaba por debajo del límite de velocidad pero, como la mayoría de los coches, iba a una velocidad superior a la recomendada para ese trayecto.[3] El conductor fue multado por no mantener el control del vehículo.

No todos los accidentes son tan fáciles de reconstruir. En muchos de ellos, se ven involucrados otros vehículos o algún otro obstáculo. Algunos se producen por llevar neumáticos que no corresponden al tamaño del vehículo. En algunos accidentes hay que aplicar la física al interior del vehículo para averiguar si los cinturones de seguridad fueron utilizados o para comprobar quién conducía. Sin embargo, en la reconstrucción de todos ellos se empieza midiendo las fuerzas implicadas.

[1] Asociación internacional de especialistas en reconstrucción de accidentes. http://www.iaars.org/ March 2006.
[2] Marks, Christopher C. O'N., *Pavement Skid Resistance Measurement and Analysis in the Forensic Context*. International Conference on Surface Friction. 2005, Christchurch. http://www.surfacefriction.org.nz.
[3] Chowdhury, Mashrur A., Warren, Davey L., "Analysis of Advisory Speed Setting Criteria." *Public Roads*, 00333735, Dec. 91. Vol. 55, Issue 3.

Resumen

Las fuerzas de rozamiento y de arrastre son fenómenos complejos que se aproximan empíricamente mediante ecuaciones simples. La fuerza neta sobre una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria curva se dirige hacia el centro de curvatura. El centro de masas de un sistema se mueve como si el sistema fuese una sola partícula puntual sobre la que actuara la fuerza neta.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES
1. Rozamiento	Dos objetos en contacto ejercen fuerzas de rozamiento entre sí. Estas fuerzas son paralelas a las superficies de los objetos en los puntos de contacto y su dirección es opuesta a la dirección del deslizamiento o tendencia a deslizar.
Rozamiento estático	$f_e \leq \mu_e F_n$ (5.2) donde F_n es la fuerza normal de contacto y μ_e el coeficiente de rozamiento estático.
Rozamiento cinético	$f_c = \mu_c F_n$ (5.3) donde μ_c es el coeficiente de rozamiento cinético. Este coeficiente es ligeramente menor que el de rozamiento estático.
Rozamiento por rodadura	$f_r = \mu_r F_n$ (5.4) donde μ_r es el coeficiente de rozamiento por rodadura.
2. Fuerzas de arrastre	Cuando un objeto se mueve a través de un fluido, experimenta una fuerza de arrastre que se opone al movimiento. Esta fuerza crece al aumentar la velocidad del objeto. Si el cuerpo se deja caer libremente desde el reposo, su velocidad crece hasta que la fuerza de arrastre iguala a la fuerza de gravedad, después de lo cual se mueve con una velocidad constante llamada velocidad límite. Esta velocidad límite depende de la forma del cuerpo y del medio a través del cual cae.
3. Movimiento a lo largo de una curva	Una partícula que se mueve a lo largo de una curva arbitraria puede considerarse que se mueve en un arco circular durante un pequeño intervalo de tiempo. Su vector aceleración instantánea tiene una componente $a_r = v^2/r$ hacia el centro de curvatura del arco y una componente $a_t = dv/dt$ que es tangencial a la curva. Si la partícula se mueve por una trayectoria circular de radio r a velocidad de módulo constante v y $a_t = 0$, entonces el módulo de la velocidad, el radio r y el periodo T están relacionados mediante la ecuación $2\pi r = vT$.
4. *Integración numérica: método de Euler	Para estimar la posición x y la velocidad v en un instante de tiempo t, se divide primero t en muchos intervalos de tiempo pequeños Δt. La aceleración inicial a_0 se calcula a partir de los valores de la posición inicial x_0 y de la velocidad inicial v_0. La posición x_1 y la velocidad v_1 en un tiempo Δt posterior se estiman usando las relaciones $x_{n+1} = x_n + v_n \Delta t$ (5.9) y $v_{n+1} = v_n + a_n \Delta t$ (5.10) con $n = 0$. La aceleración a_{n+1} se calcula usando los valores de x_{n+1} y v_{n+1}, y así sucesivamente. Este proceso continúa hasta que se obtienen la posición y la velocidad para el tiempo t.
5. Centro de masas	
Centro de masas de un sistema de partículas	El centro de masas de un sistema de partículas se define como un punto cuyas coordenadas vienen dadas por: $Mx_{cm} = \sum_i m_i x_i$ (5.15) $My_{cm} = \sum_i m_i y_i$ (5.16) $Mz_{cm} = \sum_i m_i z_i$ (5.17)

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
Centro de masas de cuerpos continuos	Si la masa está distribuida uniformemente, el centro de masas viene dado por: $M\vec{r}_{cm} = \int \vec{r}\, dm$	5.19
Posición, velocidad y aceleración del centro de masas de un sistema de partículas	$M\vec{r}_{cm} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots$	5.18
	$M\vec{v}_{cm} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots$	5.20
	$M\vec{a}_{cm} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \cdots$	5.21
Segunda ley de Newton para un sistema de partículas	$\vec{F}_{neta\ ext} = \sum_i \vec{F}_{i\,ext} = M\vec{a}_{cm}$	5.23

Respuestas a las comprobaciones conceptuales

5.1 Sí. El coche se deslizaría hacia abajo.

5.2 Acelera hacia la derecha, ya que la fuerza externa resultante que actúa sobre el cilindro es la de rozamiento hacia la derecha que ejerce el papel. Inténtelo hacer. Aparentemente, el cilindro acelera hacia la izquierda, ya que le vemos rodar hacia atrás sobre el papel. Sin embargo, en relación a la mesa, que sirve de sistema de referencia inercial, se mueve hacia la derecha. Si se hace una marca en la mesa que señale la posición original del cilindro, se observa que el centro de masas se mueve hacia la derecha *mientras el cilindro siga en contacto con el papel.*

Respuestas a los problemas prácticos

5.1 35°

5.2 $1{,}1 \times 10^2$ N

5.3 $T = m_2(g - a) = 44$ N

5.4 (*a*) Suponiendo $r \approx 1$ m, encontramos $v_{t,\,min} \approx 3$ m/s (*b*) $T = 2\pi r/v \approx 2$ s

5.5 Cero. En ese momento el ritmo de ganancia o pérdida del módulo de la velocidad es cero. El cambio del módulo de la velocidad es instantáneamente cero.

5.6 1,60 m/s^2

5.7 $x_{cm} = 2{,}0$ cm

5.8 $2R = 1{,}1 \times 10^2$ m

5.9 $F_x = m_1 g \operatorname{sen}\theta \cos\theta$

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben aportarse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

En los datos numéricos sin coma decimal se deben considerar significativos todos los dígitos, incluidos los ceros a la derecha del último diferente de cero.

- • Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil
- •• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
- ••• Desafiante, para alumnos avanzados
- SSM La solución se encuentra en el *Manual de soluciones*

Los problemas consecutivos que están sombreados son problemas relacionados.

PROBLEMAS CONCEPTUALES

1 • En el suelo de un camión que se mueve a lo largo de una carretera horizontal hay varios objetos. Si el camión acelera, ¿qué fuerza actúa sobre los objetos para que éstos se aceleren? Explique por qué algunos objetos pueden mantenerse quietos sobre el suelo mientras que otros se deslizan sobre él. SSM

2 • Considere bloques hechos del mismo material, pero de diferentes tamaños, que descansan sobre el suelo de un camión que se mueve a lo largo de una carretera horizontal. Todo objeto situado sobre el suelo de un camión se desliza si la aceleración de éste es grande. ¿Qué relación hay entre la aceleración crítica del camión para que un objeto ligero comience a deslizarse y la que corresponde a un objeto mucho más pesado?

3 • Un bloque de masa m descansa sobre un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal. El coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y el plano es (*a*) $\mu_e \geq g$, (*b*) $\mu_e = \operatorname{tg}\theta$, (*c*) $\mu_e \leq \operatorname{tg}\theta$, (*d*) $\mu_e \geq \operatorname{tg}\theta$.

4 • Un bloque de masa m se encuentra en reposo sobre un plano inclinado 30° con la horizontal, tal como indica la figura 5.56. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones respecto a la fuerza de rozamiento estático es necesariamente cierta? (*a*) $f_e > mg$, (*b*) $f_e > mg\cos 30°$, (*c*) $f_e = mg\cos 30°$, (*d*) $f_e = mg\operatorname{sen}30°$, (*e*) ninguna es cierta.

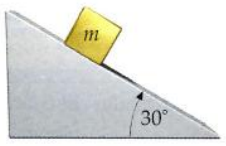


FIGURA 5.56
Problema 4

5 •• En un día helado de invierno, el coeficiente de rozamiento entre los neumáticos de un coche y la superficie de una carretera puede reducirse a la mitad de su valor en un día seco. Como resultado, la velocidad máxima a la cual puede tomarse una curva de radio R es (*a*) la misma que en un día seco, (*b*) reducida a un 71% de su valor en un día seco, (*c*) reducida al 50% de su valor en un día seco. (*d*) reducida al 25% de su valor en un día seco, (*e*) reducida a un valor desconocido que depende de la masa del coche.

6 •• Un bloque es capaz de mantenerse en un movimiento circular uniforme sobre el interior de un cono cuya superficie está perfectamente pulida (figura 5.57). Dibujar el diagrama de fuerzas sobre el bloque e identificar claramente qué fuerzas (o componentes de fuerzas) son las responsables de la aceleración centrípeta del bloque.

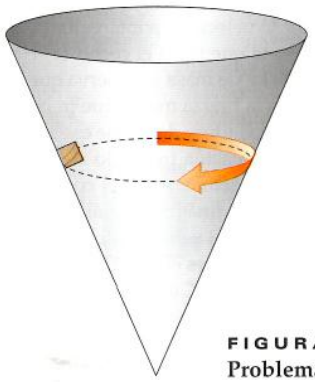


FIGURA 5.57
Problema 6

7 •• Este es un experimento muy interesante que se puede realizar en casa: se coge un bloque de madera y se pone en el suelo o sobre alguna superficie plana. Se ata el bloque a un muelle y se tira de él con un movimiento suave y constante en la dirección horizontal, de modo que, a partir de un momento, el bloque empieza a moverse, pero no de forma continua, sino que se mueve, se para, se mueve, se para, etc. Explicar por qué el bloque se mueve de esta forma.

8 • Desde un sistema de referencia inercial se observa un cuerpo que se mueve en círculo. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones, si hay alguna, son ciertas? (*a*) Una fuerza neta actúa sobre el cuerpo. (*b*) El cuerpo no puede tener una fuerza radial neta hacia afuera que actúe sobre él. (*c*) Al menos una de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo debe apuntar hacia el centro del círculo.

9 •• Una partícula se mueve en un círculo vertical con una velocidad cuyo módulo es constante. ¿Cuál de las siguientes magnitudes permanece constante? (*a*) La velocidad. (*b*) La aceleración. (*c*) La fuerza neta. (*d*) El peso aparente.

10 •• Coloque un pequeño trozo de hierro en una mesa y mantenga por encima suyo a una distancia de 1 cm un imán de cocina. El imán no atrae suficientemente a la pieza y ésta no se mueve. Repita el experimento, pero manteniendo el imán y la pieza separados 1 cm en la mano y déjelos caer al suelo. Antes de llegar al suelo, el imán y la pieza de hierro se unen debido a la fuerza magnética que ejerce el imán sobre la pieza de hierro. (*a*) Dibuje los diagramas de fuerzas que ilustren toda las fuerzas que actúan sobre el imán y sobre la pieza de hierro en cada caso. (*b*) Explique por qué el imán y la pieza de hierro se unen durante la caída por el aire, mientras que no se unen cuando están encima de la mesa.

11 ••• Boris Korsunsky, en su artículo "Brainwisters for Physics Students" (*The Physics Teacher*, 33, 550 (1995)) plantea una cuestión que supone un interesante rompecabezas: Dos bloques idénticos se atan a una cuerda sin masa que pasa por una polea tal como se muestra en la figura 5.58. Inicialmente, la cuerda está colocada de tal forma que su punto medio está en la polea y además el plano no ejerce rozamiento. Los dos bloques en reposo se colocan inicialmente, tal como muestra la figura, con la cuerda tensa y horizontal. Si se suelta el bloque 2, ¿chocará antes el bloque 1 con la polea que el bloque 2 con la pared? (Suponga que la distancia inicial del bloque 1 a la polea es la misma que la distancia del bloque 2 a la pared.) Hay una solución que es muy sencilla. SSM

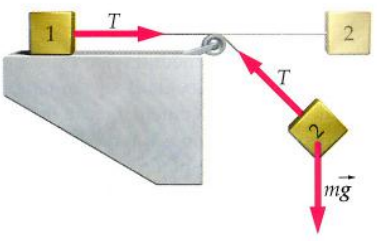


FIGURA 5.58 **Problema 11**

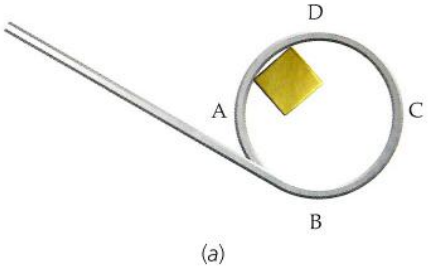
12 •• En clase, la mayoría de los profesores hacen el siguiente experimento de caída libre cuando explican las condiciones bajo las cuales el arrastre del aire se puede despreciar. Primero, se deja caer un trozo de papel y una bolita de plomo y se observa que la aceleración del papel es claramente inferior a la del plomo. Luego, se arruga el papel hasta darle forma de bola y se repite el experimento. En una distancia de un metro o dos, se observa como la aceleración del papel es ahora mayor que antes y más parecida a la de la bolita de plomo. Dar una explicación de este hecho.

13 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Jim está decidido a establecer un nuevo récord de la velocidad terminal en paracaidismo. Utilizando sus conocimientos de física planea lo siguiente. Se dejará caer de la altura más alta posible (equipándose con oxígeno) en un día cálido y adoptará la posición de cuchillo, es decir, pondrá el cuerpo estirado, vertical y con los brazos estirados hacia delante. Se equipará con un casco y ropa protectora. Explique cómo estos factores pueden ayudar a Jim a conseguir el récord. SSM

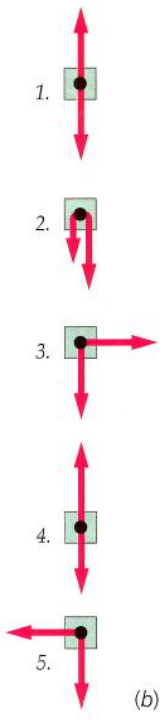
14 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Si está sentado en el asiento de un coche que circula a gran velocidad por una curva de un circuito, siente una fuerza que tiende a echarle del asiento hacia fuera. ¿Cuál es la dirección real de la fuerza que actúa sobre usted y de dónde proviene esa fuerza? (Suponga que usted está bien atado al asiento y que, por lo tanto, no resbala por él.) Explique la *sensación* de una fuerza hacia afuera sobre usted bajo la perspectiva newtoniana.

15 • La masa de la Luna es, aproximadamente, el 1% de la masa de la Tierra. La fuerza que mantiene a la Luna en su órbita alrededor de la Tierra (*a*) es muy inferior a la fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra sobre la Luna, (*b*) es mucho mayor que la fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra sobre la Luna, (*c*) es la misma que la fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra sobre la Luna, (*d*) no puedo responder; no hemos estudiado todavía la ley de Newton de la gravitación. SSM

16 •• Un bloque se desliza sobre una superficie sin rozamiento a lo largo de un rizo como indica la figura 5.59*a*. El bloque se mueve con la velocidad necesaria para que en ningún momento pierda el contacto con la pista. Asignar los puntos A, B, C y D a sus correspondientes diagramas de fuerza (figura 5.59*b*).



(*a*)



(*b*)

FIGURA 5.59 **Problema 16**

17 •• (*a*) Una piedra y una pluma están a la misma altura sobre el suelo y, al unísono, se las deja caer. Durante los primeros milisegundos, la fuerza de rozamiento sobre la piedra es inferior a la fuerza de rozamiento sobre la pluma, pero luego, durante la caída sucede lo contrario. Explíquelo. (*b*) A la luz de este resultado, explique cómo la aceleración de la piedra puede ser apreciablemente más grande que la de la pluma. Ayuda: dibujar el diagrama de fuerzas sobre cada objeto. SSM

18 •• Dos discos de masas m_1 y m_2 descansan sobre una mesa perfectamente pulida y están conectados por un muelle sin masa cuya constante de fuerza es k. Se aplica una fuerza horizontal F_1 sobre m_1 dirigida en dirección opuesta a m_2. ¿Cuál es el módulo de la aceleración del centro de masas del sistema de dos discos? (*a*) F_1/m_1, (*b*) $F_1/(m_1 + m_2)$, (*c*) $(F_1 + kx)/(m_1 + m_2)$, donde x es la longitud que se estira el muelle, (*d*) $(m_1 + m_2)F_1/m_1m_2$.

19 •• Los dos discos del problema 18 descansan sobre la mesa perfectamente pulida pero ahora sin el muelle. Se aplica una fuerza horizontal F_1 sobre m_1 dirigida en dirección opuesta a m_2 ¿Cuál es el módulo de la aceleración del centro de masas del sistema de los dos discos comparado con el de la aceleración de la masa m_1? Razónese la respuesta.

20 •• Si sólo las fuerzas externas son capaces de que un sistema de partículas se acelere, ¿cómo puede un coche acelerarse horizontalmente? Normalmente pensamos que el motor es quien suministra la fuerza que acelera el coche, pero ¿es eso cierto? ¿De dónde proceden las fuerzas que aceleran el coche?

21 •• Cuando se pisa el pedal del freno para parar un coche, las pastillas del freno presionan sobre el disco del freno de forma que el rozamiento de las pastillas reduce la velocidad de rotación de las ruedas. Sin embargo, el rozamiento de las pastillas sobre el disco *no puede ser* la fuerza que detenga el coche, pues ambas son partes internas del coche de forma que las fuerzas que existan entre ellas son internas y no afectan a su movimiento como un todo. ¿Cuál es la fuerza que detiene el coche? Dé una explicación detallada.

22 •• Dar un ejemplo de (*a*) un cuerpo tridimensional que no tiene materia en su centro de masas, (*b*) un cuerpo sólido cuyo centro de masas esté fuera de él, (*c*) una esfera sólida cuyo centro de masas no coincida con su centro geométrico, (*d*) un palo de madera cuyo centro de masas no esté en el punto medio.

23 •• **APLICACIÓN BIOLÓGICA** Cuando una persona está de pie su centro de masas se localiza en el interior de su propio volumen. Sin embargo, cuando alguien se agacha para recoger algo del suelo la localización del centro de masas cambia. ¿Dónde se localiza aproximadamente cuando la persona se inclina formando un ángulo recto? SSM

24 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** La expedición del *Apolo* (a finales de los 60 principios de los 70), en su tercer día de viaje a la Luna, separó el vehículo lunar del tercer módulo del cohete mediante una explosión provocada cuando el cohete todavía estaba cerca de la Tierra. Durante la explosión ¿cómo cambió la velocidad de cada una de las piezas? ¿Cómo cambió la velocidad del centro de masas?

25 •• Se lanza un *boomerang* y durante un momento vuela horizontalmente en línea recta a velocidad constante mientras rota rápidamente. Dibuje una serie de imágenes, vistas desde arriba, de diferente posiciones rotacionales del *boomerang* conforme se mueve paralelamente a la superficie terrestre. Sobre cada imagen indique el centro de masas del *boomerang* y una los puntos para trazar la trayectoria del centro de masas. ¿Cuál es la aceleración del centro de masas?

ESTIMACIONES Y APROXIMACIONES

26 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Hay un método muy simple que se utiliza habitualmente para determinar la resistencia aerodinámica de los coches. Cuando un coche, en una pista larga y plana, alcanza una determinada velocidad (por ejemplo de unos 96 km/h), se pone el cambio en punto muerto y se espera que el coche se pare. Se mide el tiempo que tarda el coche en disminuir la velocidad a intervalos de 8 km/h y se usa para determinar la fuerza neta que frena el coche. (*a*) Haciendo pruebas con un Toyota Tercel de 1020 kg de masa se observa que pasa de 96 km/h a 88 km/h en 3,92 s. ¿Cuál es la fuerza media que frena al coche? (*b*) Si el coeficiente de rozamiento de rodadura del coche es 0,02, ¿cuál es la fuerza de rozamiento de rodadura que actúa frenando al coche? Si suponemos que las únicas dos fuerzas que actúan sobre el coche son el rozamiento por rodadura y la resistencia aerodinámica, ¿cuál es la fuerza de resistencia aerodinámica promedio sobre el vehículo? (*c*) La fuerza de resistencia tiene la forma $(1/2)CA\rho v^2$, donde A es el área transversal del coche frente al viento, ρ es la densidad del aire y C es una constante adimensional de orden 1. Si el área transversal del coche es 1,91 m^2, determinar C a partir de los datos disponibles. (La densidad del aire es 1,21 kg/m^3; úsese en el cálculo que la velocidad del coche es 88 km/h.)

27 •• Usando el análisis dimensional, determinar las unidades y las dimensiones de la constante b en la fuerza de resistencia bv^n (*a*) si $n = 1$ y (*b*) si $n = 2$. (*c*) Newton mostró que la resistencia del aire de un objeto de área circular que cae es $\frac{1}{2}\rho\pi r^2v^2$, aproximadamente, donde la densidad del aire es $\rho = 1{,}2$ kg/m^3. Demostrar que este resultado es consistente con el análisis dimensional del apartado (*b*). (*d*) Hallar la velocidad límite de un paracaidista de 56 kg en caída libre suponiendo que su área transversal es un disco circular de 0,30 m de radio y que la densidad del aire cerca de la superficie terrestre es 1,2 kg/m^3. (*e*) La densidad de la atmósfera disminuye con la altura: a 8 km de altura la densidad es de sólo 0,514 kg/m^3. ¿Cuál sería la velocidad límite del paracaidista en caída libre a esta altura? SSM

28 •• Estimar la velocidad límite de una gota de lluvia y de una bola de granizo del tamaño de una pelota de golf. *Ayuda: ver problemas 26 y 27.*

29 •• Estimar el coeficiente de rozamiento estático mínimo necesario entre los neumáticos y el pavimento para completar un giro hacia la izquierda en una intersección de calles de una ciudad, sabiendo que el límite de velocidad es de 40 km/h.

30 •• Estimar la distancia de la máxima zancada que se puede dar cuando se camina sobre hielo. Es decir, estudiar las condiciones bajo las cuales el pie, cuando se da un paso largo, se desliza sobre el suelo. El coeficiente de rozamiento estático sobre el hielo es de 0,25.

ROZAMIENTO

31 • Un bloque de masa m se desliza a velocidad constante hacia abajo por un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal. Se verifica que (*a*) $\mu_c = mg \operatorname{sen}\theta$, (*b*) $\mu_c = \operatorname{tg}\theta$, (*c*) $\mu_c = 1 - \cos\theta$, (*d*) $\mu_c = \cos\theta - \operatorname{sen}\theta$. SSM

32 • Un bloque de madera se arrastra mediante una cuerda horizontal sobre una superficie horizontal a velocidad constante con una fuerza de 20 N. El coeficiente de rozamiento cinético entre las superficies es 0,3. La fuerza de rozamiento es (*a*) imposible de determinar sin conocer la masa del bloque, (*b*) imposible de determinar sin conocer la velocidad del bloque, (*c*) 0,3 N, (*d*) 6 N, (*e*) 20 N.

33 • Un bloque de 20 N de peso descansa sobre una superficie horizontal. Los coeficientes de rozamiento estático y cinético entre la super-

ficie y el bloque son, respectivamente, $\mu_e = 0{,}8$ y $\mu_c = 0{,}6$. Una cuerda horizontal está atada al bloque con una tensión constante T. ¿Cuál es la fuerza de rozamiento que actúa sobre el bloque si (*a*) $T = 15$ N, o (*b*) $T = 20$ N? SSM

34 • Un bloque de masa m se arrastra a velocidad constante sobre una superficie horizontal mediante una cuerda como se indica en la figura 5.60. La magnitud de la fuerza de rozamiento es (*a*) $\mu_e\, mg$, (*b*) $T \cos\theta$, (*c*) $\mu_e (T - mg)$, (*d*) $\mu_e T \operatorname{sen}\theta$, (*e*) $\mu_e (mg - T \operatorname{sen}\theta)$.

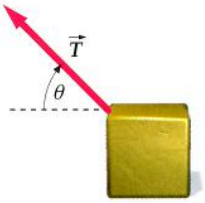


FIGURA 5.60
Problema 34

35 • Un obrero empuja con una fuerza horizontal de 500 N un cajón de 100 kg situado sobre una alfombra gruesa. Los coeficientes de rozamiento estático y cinético son, respectivamente, 0,6 y 0,4. Determinar la fuerza de rozamiento que ejerce la alfombra sobre el cajón. SSM

36 • Una caja que pesa 600 N es empujada a lo largo de un suelo horizontal con velocidad constante mediante una fuerza de 250 N paralela al suelo. ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento cinético entre la caja y el suelo?

37 • El coeficiente de rozamiento estático entre los neumáticos de un coche y la carretera es $\mu_e = 0{,}6$. Despreciar la resistencia con el aire y el rozamiento por rodadura. Si la fuerza resultante que actúa sobre el coche es la fuerza de rozamiento estático ejercida por la carretera, (*a*) ¿cuál es la aceleración máxima que puede adquirir el coche cuando se frena? (*b*) ¿Cuál es la mínima distancia a la que se detendrá el coche si inicialmente llevaba una velocidad de 30 m/s? SSM

38 • La fuerza que acelera un coche a lo largo de una carretera horizontal es la fuerza de rozamiento entre la carretera y los neumáticos. (*a*) Explicar por qué la aceleración es mayor cuando las ruedas no giran. (*b*) Si un coche acelera de 0 a 90 km/h en 12 s con aceleración constante, ¿cuál es el mínimo coeficiente de rozamiento entre las ruedas y la carretera? Suponer que la mitad del peso del coche lo soportan las ruedas tractoras.

39 •• Un bloque de 5 kg se mantiene en reposo contra una pared vertical mediante una fuerza horizontal de 100 N. (*a*) ¿Cuál es la fuerza de rozamiento ejercida por la pared sobre el bloque? (*b*) ¿Cuál es la fuerza horizontal mínima necesaria para evitar que el bloque caiga si el coeficiente de rozamiento entre la pared y el bloque es $\mu_e = 0{,}40$?

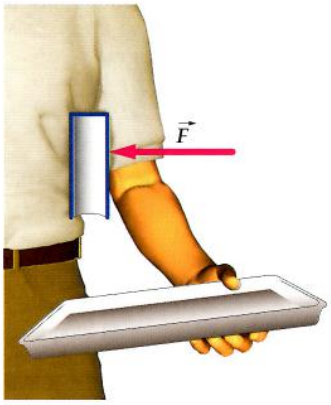


FIGURA 5.61
Problema 40

40 •• Un estudiante cansado y sobrecargado intenta mantener su libro de física bajo el brazo tal como muestra la figura 5.61. El libro tiene una masa de 3,2 kg, el coeficiente de rozamiento estático entre el libro y el brazo del muchacho es 0,320 y el coeficiente de rozamiento entre el libro y el jersey del estudiante es 0,160. (*a*) ¿Cuál es la fuerza horizontal mínima que ha de ejercer el brazo del muchacho para que el libro no caiga? (*b*) Si realiza sólo una fuerza de 61 N, ¿cuál es la aceleración del libro mientras se desliza bajo el brazo del estudiante? El coeficiente de rozamiento cinético del brazo con el libro es 0,200, mientras que el del jersey con el libro es 0,090.

41 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** En un día de nieve y con la temperatura próxima al punto de congelación, el coeficiente de rozamiento estático entre los neumáticos y una carretera con hielo es de 0,08. (*a*) ¿Cuál es la máxima inclinación que un vehículo con tracción a las cuatro ruedas puede vencer ascendiendo a velocidad constante? (*b*) ¿Cuál es el ángulo de inclinación máximo que puede tener la carretera para que el vehículo pueda descender a velocidad constante?

42 •• Una caja de 50 kg debe arrastrarse sobre un suelo horizontal. El coeficiente de rozamiento estático entre la caja y el suelo es 0,6. Un método de arrastre sería empujar la caja con una fuerza que formase un ángulo θ hacia abajo con la horizontal. Otro método sería tirar de la caja con una fuerza que formase un ángulo θ hacia arriba con la horizontal. (*a*) Explicar por qué un método requiere menos fuerza que otro. (*b*) Calcular la fuerza necesaria para mover la caja en cada uno de los métodos si $\theta = 30°$ y comparar la respuesta con los resultados que se obtendrían si el ángulo fuera $\theta = 0°$.

43 •• Un bloque de masa $m_1 = 250$ g se encuentra en reposo sobre un plano que forma un ángulo $\theta = 30°$ sobre la horizontal (figura 5.62). El coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y el plano es $\mu_c = 0{,}100$. Este bloque está unido a un segundo bloque de masa $m_2 = 200$ g que cuelga libremente de una cuerda que pasa por una polea sin rozamiento y con masa despreciable. Cuando el segundo bloque ha caído 30 cm, su velocidad es (*a*) 83 cm/s, (*b*) 48 cm/s, (*c*) 160 cm/s, (*d*) 59 cm/s, (*e*) 72 cm/s. SSM

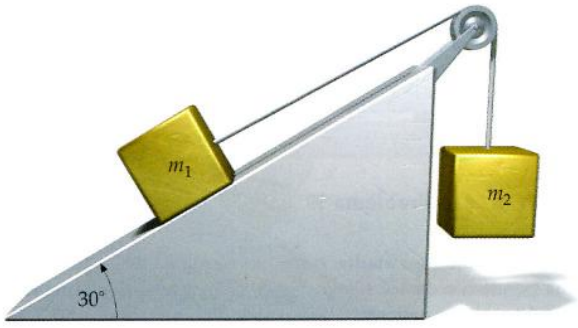


FIGURA 5.62 Problemas 43, 44, 45

44 •• Supongamos ahora que en la figura 5.62, $m_1 = 4$ kg. El coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y el plano inclinado es 0,4. (*a*) Determinar el intervalo de valores posibles para m_2 de modo que el sistema se encuentre en equilibrio estático. (*b*) ¿Cuál es la fuerza de rozamiento sobre el bloque de 4 kg si $m_2 = 1$ kg?

45 •• Volviendo a la figura 5.62, supongamos que $m_1 = 4$ kg, $m_2 = 5$ kg y que el coeficiente de rozamiento cinético entre el plano inclinado y el bloque de 4 kg es $\mu_c = 0{,}24$. Determinar la aceleración de las masas y la tensión de la cuerda.

46 •• Una tortuga de 12 kg está sobre el suelo de un camión del parque zoológico que circula a 80 km/h. El conductor frena durante 12 segundos hasta que detiene el camión. Suponiendo que la aceleración es

constante, ¿cuál es el valor mínimo del coeficiente de rozamiento estático entre la tortuga y el suelo para que ésta no resbale?

47 •• Un bloque de 150 g asciende sobre una rampa con una velocidad inicial de 7 m/s. El coeficiente de rozamiento cinético entre la rampa y el bloque es 0,23. (*a*) Si la rampa está inclinada 25° sobre la horizontal, ¿qué distancia habrá recorrido sobre la rampa hasta pararse? (*b*) Después, el bloque vuelve a bajar. ¿Cuál debería ser el coeficiente de rozamiento mínimo para que no se deslizara hacia abajo? SSM

48 •• Un automóvil asciende por una carretera de pendiente 15° a una velocidad de 30 m/s. El coeficiente de rozamiento estático entre los neumáticos y la carretera es 0,7. (*a*) ¿Qué distancia mínima recorrerá el coche antes de pararse? (*b*) ¿Qué distancia mínima recorrería si descendiera por la misma pendiente?

49 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un coche de tracción trasera soporta un 40% de su peso sobre sus dos ruedas de tracción y posee un coeficiente de rozamiento estático de 0,7 con una carretera horizontal. (*a*) ¿Cuál es la aceleración máxima del vehículo? (*b*) ¿Cuál es el tiempo más corto posible para que este coche alcance una velocidad de 100 km/h? (Suponer que la potencia del motor es ilimitada.)

50 •• Un estudiante, A, afirma que él puede colocar un bloque de 2 kg sobre el lado exterior de una vagoneta, como indica la figura 5.63, y que el bloque no caerá al suelo, comprometiéndose a no utilizar ningún tipo de ganchos, cuerdas, grapas, imanes, pegamentos, adhesivos, etc. Cuando otro estudiante, B, acepta la apuesta, el primero empuja la vagoneta en la dirección indicada. El coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y la vagoneta es 0,6. (*a*) Determinar la aceleración mínima para que A gane la apuesta. (*b*) ¿Cuál es el módulo de la fuerza de rozamiento en este caso? (*c*) Determinar la fuerza de rozamiento sobre el bloque si a es dos veces la aceleración mínima necesaria para que el bloque no caiga. (*d*) Demostrar que un bloque de cualquier masa no caerá si la aceleración es $a \geq g/\mu_e$, siendo μ_e el coeficiente de rozamiento estático.

FIGURA 5.63 Problema 50

51 •• Dos bloques atados por una cuerda se deslizan hacia abajo por una pendiente de 10° (figura 5.64). El bloque 2 tiene una masa de $m_2 = 0{,}25$ kg y un coeficiente de rozamiento cinético $\mu_c = 0{,}2$. Para el bloque superior, $m_1 = 0{,}8$ kg y $\mu_c = 0{,}3$. Determinar (*a*) el módulo y dirección de la aceleración de los bloques y (*b*) la tensión de la cuerda.

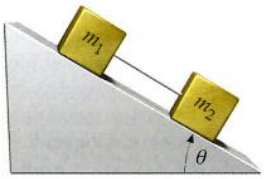


FIGURA 5.64 Problemas 51 y 52

52 •• Dos bloques de masas m_1 y m_2 se deslizan juntos hacia abajo, como se muestra en la figura 5.64. Los bloques están unidos por una cuerda de masa despreciable. Los coeficientes de rozamiento entre los bloques y la superficie son μ_1 y μ_2 para los bloques 1 y 2, respectivamente. (*a*) Determinar la aceleración de ambos bloques. (*b*) Determinar la tensión de la cuerda sobre cada bloque. Mostrar que esas fuerzas valen 0 cuando $\mu_1 = \mu_2$ y dar una explicación no matemática a este hecho.

53 •• Un bloque de masa m descansa sobre una superficie horizontal. El coeficiente de rozamiento estático es 0,6. El bloque está sometido a la fuerza $\vec{F}$ que forma un ángulo θ con la horizontal mediante una cuerda de masa despreciable, como indica la figura 5.65. El valor mínimo de la fuerza necesaria para mover el bloque depende del ángulo θ. (*a*) Analizar cualitativamente en qué forma esta fuerza depende de θ. (*b*) Calcular la fuerza para los ángulos $\theta = 0°$, 10°, 20°, 30°, 40°, 50° y 60°, y hacer un gráfico de F en función de θ para $mg = 400$ N. Según este gráfico, ¿cuál es el ángulo más eficaz que debe formar la dirección de la fuerza para mover el bloque? SSM

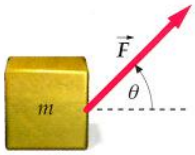


FIGURA 5.65 Problemas 53 y 54

54 •• Un bloque de masa m está sobre una superficie horizontal con un coeficiente estático de rozamiento con esa superficie μ_e (figura 5.65). Demostrar que, en general, (*a*) la fuerza mínima para mover el bloque hay que aplicarla tirando con un ángulo $\theta_{mín} = \text{arctg}\,\mu_e$, y (*b*) la fuerza mínima necesaria para que el bloque empiece a moverse es $F_{min} = (\mu_e/\sqrt{1+\mu_e^2})mg$. (*c*) Si el bloque ya se mueve, ¿qué hay que hacer para aplicar la mínima fuerza posible y que sea suficiente para mantener el movimiento?, ¿aumentar, disminuir o mantener el ángulo que forma la fuerza con la horizontal?

55 •• Responder a las mismas cuestiones que plantea el problema 54, pero suponer que la fuerza $\vec{F}$ está dirigida hacia abajo formando un ángulo θ con la horizontal.

56 •• Un cuerpo de 100 kg es empujada a lo largo de una superficie sin rozamiento por una fuerza $\vec{F}$ de tal modo que su aceleración es $a_1 = 6$ m/s² (véase figura 5.66). Un cuerpo de 20 kg se desliza por la parte superior del cuerpo de 100 kg con una aceleración $a_2 = 4$ m/s². (Por lo tanto, se desliza hacia atrás respecto al cuerpo de 100 kg.) (*a*) ¿Cuál es la fuerza de rozamiento ejercida por el cuerpo de 100 kg sobre el cuerpo de 20 kg? (*b*) ¿Cuál es la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo de 100 kg? ¿Cuánto vale la fuerza F? (*c*) Una vez que el cuerpo de 20 kg se ha caído del cuerpo de 100 kg, ¿cuál es la aceleración que adquiere este último? (Suponer que la fuerza F no cambia.)

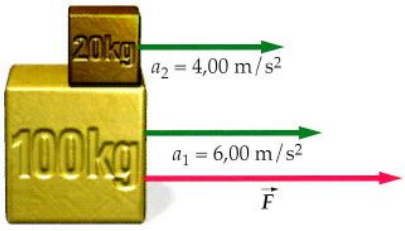


FIGURA 5.66 Problema 56

57 •• Un bloque de 60 kg se desliza por la parte superior de otro bloque de 100 kg con una aceleración de 3 m/s² por la acción de una fuerza horizontal F de 320 N, como indica la figura 5.67. El bloque de 100 kg se apoya sobre una superficie horizontal sin rozamiento, pero hay rozamiento entre los dos bloques. (*a*) Determinar el coeficiente de

FIGURA 5.67 Problema 57

rozamiento cinético entre los bloques. (*b*) Calcular la aceleración del bloque de 100 kg durante el tiempo en que el bloque de 60 kg mantiene el contacto.

58 •• El coeficiente de rozamiento estático entre un neumático de caucho y la superficie de la carretera es 0,85. ¿Cuál es la máxima aceleración de un camión de 1000 kg con tracción en las cuatro ruedas, si la carretera forma un ángulo de 12° con la horizontal y el camión está (*a*) subiendo y (*b*) descendiendo?

59 •• Un bloque de 2 kg está situado sobre otro de 4 kg, que a su vez se apoya sobre una mesa sin rozamiento (figura 5.68). Los coeficientes de rozamiento entre los dos bloques son $\mu_e = 0{,}3$ y $\mu_c = 0{,}2$. (*a*) ¿Cuál es la fuerza máxima F que puede aplicarse al bloque de 4 kg de tal modo que el bloque de 2 kg no se deslice? (*b*) Si F es la mitad de este valor máximo, determinar la aceleración de cada bloque y la fuerza de rozamiento que actúa sobre cada uno de ellos. (*c*) Si F es el doble de este valor determinado en (*a*), calcular la aceleración de cada bloque.

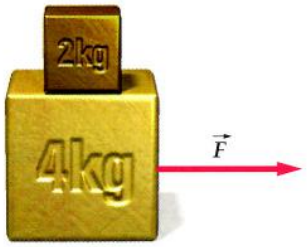


FIGURA 5.68 Problema 59

60 ••• Un bloque de 10 kg descansa sobre un soporte de 5 kg como se muestra en la figura 5.69. Los coeficientes de rozamiento entre el bloque y el soporte son $\mu_e = 0{,}40$ y $\mu_c = 0{,}30$. El soporte se apoya sobre una superficie sin rozamiento. (*a*) ¿Cuál es la fuerza máxima F que puede aplicarse sin que el bloque de 10 kg se deslice sobre el soporte? (*b*) ¿Cuál es la aceleración correspondiente del soporte?

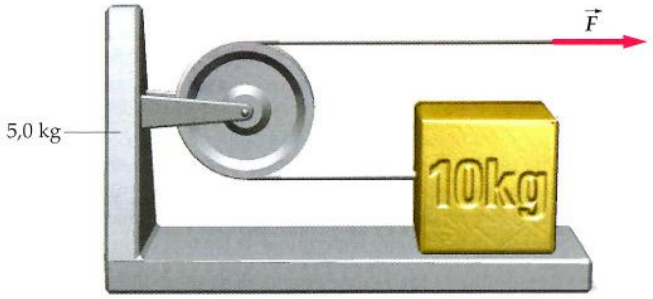


FIGURA 5.69 Problema 60

61 ••• En la feria del condado, usted y sus amigos empujan hacia arriba un cerdo de 75 kg sobre una plataforma inclinada, desde la parte más baja. El coeficiente de rozamiento entre el cerdo y la plataforma es 0,07. (*a*) Todos ustedes empujan a la vez, paralelamente a la plataforma y pretenden acelerar al cerdo desde el reposo hasta 5 m/s² a lo largo de una distancia de 1,5 m, el punto en que se suelta al cerdo. El cerdo continúa hasta que llega subiendo hasta que llega a la parte más alta de la plataforma, 45 cm más allá desde donde lo dejaron. ¿Cuál es el ángulo de inclinación de la plataforma? (*b*) Desde la parte más alta, el cerdo da media vuelta y empieza a bajar resbalando. ¿Con qué velocidad llega a la parte más baja de la plataforma?

62 ••• Un bloque de 100 kg en un plano inclinado 18° está atado a otro de masa m con una cuerda, tal como se muestra en la figura 5.70. Los coeficientes de rozamiento estático y cinético del bloque y del plano son respectivamente 0,4 y 0,2. (*a*) Determinar el intervalo de valores de m para el cual el bloque del plano inclinado no se moverá a menos que sea perturbado por un golpe, en cuyo caso *bajará* por la pendiente. (*b*) Determinar el intervalo de valores de m para el cual el bloque no se moverá a menos que sea golpeado, en cuyo caso subirá por la pendiente.

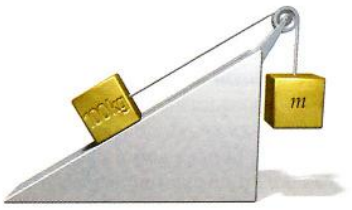


FIGURA 5.70 Problema 62

63 ••• Un bloque de 0,5 kg de masa descansa sobre la superficie inclinada de una cuña de 2 kg como la que se muestra en la figura 5.71. Se ejerce una fuerza horizontal $\vec{F}$ sobre la cuña de modo que ésta resbala sobre una superficie sin rozamiento. (*a*) Si el coeficiente de rozamiento estático entre la cuña y el bloque es $\mu_e = 0{,}8$ y el ángulo de la superficie inclinada es 35°, determinar los valores máximo y mínimo de F para los cuales el bloque no resbala. (*b*) Repetir el apartado (*a*) con $\mu_e = 0{,}4$.

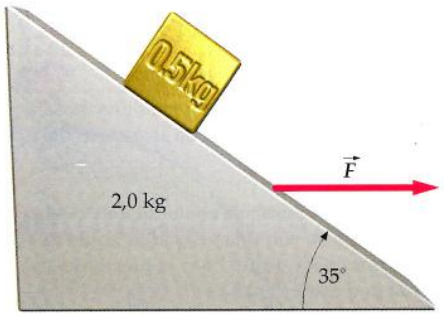


FIGURA 5.71 Problema 63

64 ••• **HOJA DE CÁLCULO** Se empuja por un suelo de madera con una fuerza horizontal constante de 70 N un bloque también de madera de 10 kg de masa, inicialmente parado. Suponiendo que el coeficiente de rozamiento cinético varía con la velocidad según $\mu_c = 0{,}11/(1 + 2{,}3 \times 10^{-4} v^2)^2$. Diseñe un programa de hoja de cálculo usando el método de Euler que calcule y represente gráficamente la velocidad del bloque y su desplazamiento en función del tiempo para t comprendido entre 0 y 10 s. Compare el resultado con el que hubiera obtenido para un coeficiente de rozamiento cinético independiente de v igual a 0,11.

65 ••• **MÚLTIPLES PASOS** Para determinar el coeficiente de rozamiento cinético de un bloque de madera sobre la superficie de una mesa horizontal, se reciben las instrucciones siguientes: tomar el bloque y empujarlo por la superficie; mediante un reloj, medir el tiempo que le cuesta pararse (Δt) y la distancia que recorre antes de pararse (Δx). (*a*) Utilizando las leyes de Newton y el diagrama de fuerzas del bloque, demostrar que $\mu_c = 2\Delta x/[(\Delta t)^2 g]$. (*b*) Si el bloque resbala 1,37 m durante 0,97 s antes de pararse, calcular μ_c. (*b*) ¿Cuál es la velocidad inicial del bloque?

66 •• **HOJA DE CÁLCULO** (*a*) Un bloque se desliza sobre un plano inclinado. El coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y el plano es μ_c. Mostrar que un gráfico de $a_x/\cos\theta$ frente tg θ (donde a_x es la aceleración de descenso sobre el plano y θ el ángulo de inclinación del plano) sería una línea recta con pendiente g y ordenada en el origen $-\mu_c g$. (*b*) Los datos siguientes corresponden a la aceleración de un bloque que baja por un plano inclinado en función del ángulo de inclinación:*

θ (grados)	Aceleración (m/s²)
25,0	1,69
27,0	2,10
29,0	2,41
31,0	2,89
33,0	3,18
35,0	3,49
37,0	3,78
39,0	4,15
41,0	4,33
43,0	4,72
45,0	5,11

Usando un programa de una **hoja de cálculo**, representar gráficamente estos datos y ajustar una línea recta de modo que se pueda determinar μ_c y g. ¿Cuál es el porcentaje de error en g si se compara con el valor comúnmente aceptado de 9,81 m/s²?

FUERZAS DE ARRASTRE

67 • Una pelota de ping-pong posee una masa de 2,3 g y una velocidad límite de 9 m/s. La fuerza de arrastre es del tipo bv^2. ¿Cuál es el valor de b? SSM

68 • Una pequeña partícula contaminante cae hacia la Tierra a través del aire en reposo con una velocidad límite de 0,3 mm/s. La partícula posee una masa de $10^{-10}g$ y la fuerza de arrastre es de la forma bv. ¿Cuál es el valor de b?

69 •• Una demostración típica de aula consiste en dejar caer un filtro de café con forma de cesta y medir el tiempo necesario para que recorra una cierta distancia. Un profesor deja caer uno de ellos desde una altura h sobre el suelo y mide el tiempo Δt que tarda en caer. ¿Cuánto recorrerán un paquete de n filtros idénticos durante el mismo intervalo? Considerar que los filtros son tan ligeros que alcanzan instantáneamente la velocidad terminal. Suponer que la fuerza de arrastre varía con el cuadrado de la velocidad y suponer que los filtros se dejan caer con el asa hacia arriba. SSM

70 •• Una paracaidista de 60 kg de masa puede frenarse a sí misma hasta 90 km/h orientando su cuerpo horizontalmente, mirando hacia abajo con los brazos y las piernas extendidas. En esta posición, ella presenta la máxima área de la sección transversal, maximizando así la fuerza de arrastre que actúa sobre ella. (*a*) ¿Cuánto vale el módulo de la fuerza de arrastre que actúa sobre ella? (*b*) Si la fuerza de arrastre es bv^2, ¿cuánto vale b? (*c*) En un momento dado adopta la forma de "cuchillo", orientando su cuerpo verticalmente con sus brazos hacia abajo. Suponga que esto reduce en un 55% el valor de b de los apartados (*a*) y (*b*). ¿Cuál es el valor de la aceleración cuando adopta la forma de "cuchillo"?

71 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Un automóvil de 800 kg desciende por una larga pendiente del 6% (esto significa que el cambio de la altura es el 6 % de la distancia horizontal recorrida). La fuerza de arrastre que se opone al movimiento del coche tiene la forma $F_a = 100\ \text{N} + (1{,}2\ \text{N}\cdot\text{s}^2/\text{m}^2)v^2$. Despreciar el rozamiento de rodadura. ¿Cuál es la velocidad límite del automóvil al descender por esta pendiente?

72 ••• **APROXIMACIÓN** Las partículas pequeñas esféricas experimentan una fuerza de resistencia viscosa dada por la ley de Stokes, $F_d = 6\pi\eta r v$, donde r es el radio de la partícula, v su velocidad y η es el coeficiente de viscosidad del medio fluido donde caen las esferitas. (*a*) Estimar la velocidad límite de una partícula contaminante esférica de radio 10^{-5} m y densidad 2000 kg/m³. (*b*) Suponiendo que el aire está en reposo y que $\eta = 1{,}8\times10^{-5}\ \text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$, estimar el tiempo que esta partícula tarda en caer por una chimenea de 100 m de altura.

73 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Una muestra de aire que contiene partículas contaminantes, del tamaño y densidad especificados en el problema 72, se toma en un tubo de ensayo de 8,0 cm de longitud. Este tubo se coloca en una centrifugadora, de modo que el punto medio del tubo de ensayo se encuentra a 12 cm del centro de la centrifugadora, la cual gira a razón de 800 revoluciones por minuto. (*a*) Estimar el tiempo necesario para que prácticamente todas las partículas contaminantes se sedimenten en el fondo del tubo de ensayo. (*b*) Comparar este tiempo con el necesario para que una partícula contaminante caiga 8,0 cm bajo la acción de la gravedad, sometida a la fuerza de arrastre viscosa del aire. SSM

MOVIMIENTO A LO LARGO DE UNA TRAYECTORIA CURVA

74 • Una barra rígida con una pelota de 0,05 kg en uno de sus extremos rota alrededor del otro extremo de tal forma que la pelota viaja con una velocidad cuyo módulo es constante describiendo un círculo vertical de 0,2 m de radio. ¿Cuál es el módulo de la velocidad máxima que puede tener la pelota de forma que la fuerza de la barra sobre la pelota no supere los 10 N?

75 • Una piedra de masa 95 g se hace girar en un círculo horizontal en el extremo de una cuerda de 85 cm de longitud. El tiempo necesario para que la piedra dé una revolución completa es 1,22 s. Determinar el ángulo que forma la cuerda con la horizontal. SSM

76 •• Una piedra de 0,20 kg atada a una cuerda de 0,8 m de longitud gira en el plano horizontal. La cuerda forma un ángulo de 20° con la horizontal. Determinar el módulo de la velocidad de la piedra.

77 •• Una piedra de 0,75 kg atada a una cuerda gira en un círculo horizontal de 35 cm como en el péndulo cónico del ejemplo 5.11. La cuerda forma un ángulo de 30° con la vertical. (*a*) Determinar el módulo de la velocidad de la piedra. (*b*) Determinar la tensión de la cuerda.

78 •• **APLICACIÓN BIOLÓGICA** Un piloto de masa 50 kg sale de un rizo vertical según un arco circular tal que su aceleración hacia arriba es de 3,5g. (*a*) ¿Cuál es la fuerza neta que actúa sobre el piloto en la parte más

* Datos tomados de Dennis W. Phillips, "Science Friction Adventure–Part II," *The Physics Teacher*, 553 (1990).

baja del círculo? (*b*) Utilizar las leyes de Newton para explicar por qué el piloto sufriría un desmayo. Hay que tener en cuenta que en esta situación un gran volumen de sangre se concentraría en la parte inferior de su cuerpo. ¿Cómo describiría este fenómeno un observador que estuviese en un sistema de referencia inercial?

79 •• Un piloto de avión de masa 80 kg se lanza hacia abajo para describir un rizo siguiendo un arco de circunferencia cuyo radio es 300 m. En la parte inferior de la trayectoria, donde el módulo de su velocidad es de 180 km/h, (*a*) ¿cuáles son la dirección y el módulo de su aceleración? (*b*) ¿Cuál es la fuerza neta que actúa sobre el piloto en la parte más baja del círculo? (*c*) ¿Cuál es la fuerza ejercida por el asiento sobre el piloto?

80 •• Un pequeño objeto de masa m_1 se mueve con una velocidad cuyo módulo es v en una trayectoria circular de radio r sobre una masa horizontal sin rozamiento (figura 5.72). Está sujeta a una cuerda que pasa a través de un orificio (sin rozamiento) situado en el centro de la mesa. Una segunda masa m_2 está sujeta en el otro extremo de la cuerda. Deducir una expresión para r en función de m_1 y m_2 y el tiempo T de una revolución.

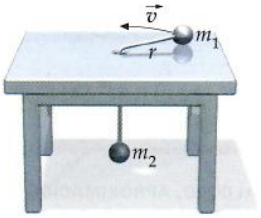


FIGURA 5.72 Problema 80

81 •• Un bloque de masa m_1 está sujeto a una cuerda de longitud L_1 fija por un extremo. El bloque se mueve en un círculo horizontal sobre una mesa sin rozamiento. Un segundo bloque de masa m_2 se une al primero mediante una cuerda de longitud L_2 y se mueve también en círculo, como indica la figura 5.73. Determinar la tensión en cada una de las cuerdas si el período del movimiento es T. SSM

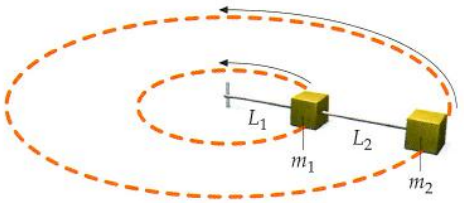


FIGURA 5.73 Problema 81

82 •• **MÚLTIPLES PASOS** Una partícula se mueve sobre una circunferencia de 4 cm de radio. Tarda 8 s en dar una vuelta completa. (*a*) Dibujar la trayectoria de la partícula a escala e indicar las posiciones a intervalos de 1 s. (*b*) Dibujar los vectores de desplazamiento correspondientes a estos intervalos de 1 s. Estos vectores también indican las direcciones de los vectores velocidad media durante los mismos intervalos. (*c*) Hallar gráficamente el módulo de la variación de la velocidad media $|\Delta\vec{v}|$ correspondiente a dos intervalos de 1 s consecutivos. Comparar $|\Delta\vec{v}|/\Delta t$, medida así, con la aceleración instantánea calculada a partir de $a_c = v^2/r$.

83 •• Un hombre hace oscilar circularmente a su hijo como indica la figura 5.74. Si la masa del niño es de 25 kg, el radio del círculo 0,75 m y el período de revolución de 1,5 s, (*a*) ¿cuál es el módulo y dirección de la fuerza que debe ejercer el hombre sobre el niño? (Suponer en los cálculos que el niño es una partícula puntual.) (*b*) ¿Cuál es el módulo y dirección de la fuerza que ejerce el niño sobre el hombre?

FIGURA 5.74 Problema 83 *(David de Lossy/The Image Bank.)*

84 •• La cuerda de un péndulo cónico tiene 50 cm de longitud y la masa del cuerpo pendular es 0,25 kg. (*a*) Determinar el ángulo que forman la cuerda y la horizontal cuando la tensión de la cuerda es seis veces mayor que el peso del cuerpo pendular. (*b*) En estas condiciones, ¿cuál es el período del péndulo?

85 •• Una moneda de 100 g se coloca sobre una plataforma giratoria horizontal que gira a razón de una revolución por segundo. La moneda está situada a 10 cm del eje de rotación de la plataforma. (*a*) ¿Qué fuerza de rozamiento actúa sobre la moneda? (*b*) La moneda se desliza y sale despedida de la plataforma cuando se coloca a una distancia radial superior a 16 cm del eje de rotación. ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento estático?

86 •• Una bola de masa 0,25 kg está sujeta a una barra vertical por una cuerda de 1,2 m de longitud. Suponer que la cuerda está sujeta al centro de la bola. Si la bola se mueve en círculo horizontal con la cuerda formando un ángulo de 20° con la vertical, calcular (*a*) la tensión de la cuerda, (*b*) el módulo de la velocidad de la bola.

87 ••• Una pequeña cuenta de collar con una masa de 100 g se desliza a lo largo de un alambre semicircular de radio 10 cm que gira alrededor de un eje vertical a razón de 2 vueltas por segundo, como se indica en la figura 5.75. Determinar los valores de θ para los cuales la cuenta permanece estacionaria respecto al alambre giratorio.

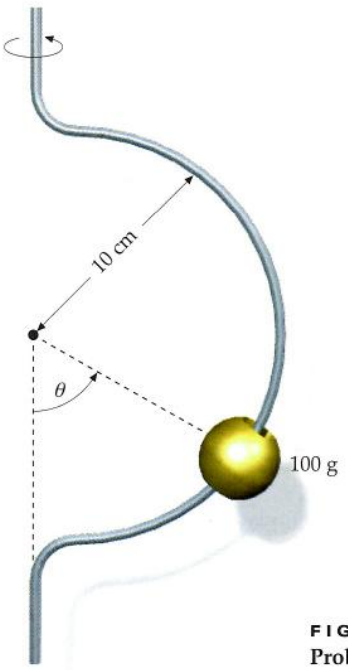


FIGURA 5.75 Problema 87

FUERZA CENTRÍPETA

88 • Un coche acelera a lo largo de la curva de la vía de salida de una autopista. El radio de la curva es de 80 m. Un pasajero de 70 kg se sujeta al reposabrazos de la puerta del coche con una fuerza de 220 N para no deslizarse en su asiento. (Se supone que la vía de salida no tiene peralte y se desprecia el rozamiento sobre el asiento.) ¿Cuál es el módulo de la velocidad del coche?

89 • El radio de curvatura del rizo vertical de una montaña rusa es de 12,0 m. En lo alto del rizo, la fuerza que el asiento ejerce sobre un pasajero de masa m es $0{,}4mg$. Determinar el módulo de la velocidad de la vagoneta en ese punto. SSM

90 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** En un aeropuerto fuera de servicio un coche de 2000 kg huye a una velocidad cuyo módulo es constante de 100 km/h. A esa velocidad la fuerza de arrastre del aire es de 500 N. Suponer que el rozamiento por rodadura es despreciable. (*a*) ¿Cuánto vale la fuerza de rozamiento estático que ejerce la pista sobre el coche y cuál es el valor mínimo del coeficiente de rozamiento estático necesario para mantener esa velocidad? (*b*) El coche se mueve ahora con una trayectoria curva de radio r con el mismo módulo de velocidad. ¿Para qué valor de r el ángulo entre la fuerza de rozamiento estático y el vector velocidad será igual a 45°?, ¿y para qué valor será de 88°? ¿Cuál es el valor mínimo del coeficiente de rozamiento estático necesario para que el coche no derrape?

91 •• Un estudiante montado en una bicicleta sobre una superficie horizontal, recorre un círculo de radio 20 m. La fuerza resultante ejercida por la carretera sobre la bicicleta (fuerza normal más fuerza de rozamiento) forma un ángulo de 15° con la vertical. (*a*) ¿Cuál es la velocidad del estudiante? (*b*) Si la fuerza de rozamiento es la mitad de su valor máximo, ¿cuál es el coeficiente de rozamiento estático?

92 •• Un avión vuela en un círculo horizontal con una velocidad cuyo módulo es de 480 km/h. Para seguir esta trayectoria inclina las alas un ángulo de 40° (véase la figura 5.76). Sobre las alas se produce una fuerza ascensional que mantiene el aparato en el aire. ¿Cuál es el radio de la trayectoria del avión?

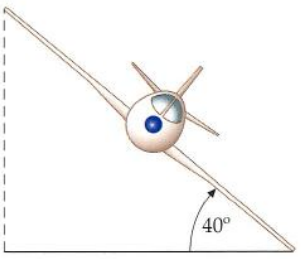


FIGURA 5.76 Problema 92

93 •• Un coche de 750 kg toma una curva de radio 160 m a 90 km/h. ¿Cuál debe ser el ángulo de peralte de la curva para que la única fuerza entre el pavimento y los neumáticos esté en la dirección normal? *Ayuda: ¿qué información nos proporciona este requisito sobre la fuerza de rozamiento?*

94 •• Una curva de radio 150 m tiene un peralte con un ángulo de 10°. Un coche de 800 kg toma la curva a 85 km/h sin patinar. Determinar (*a*) la fuerza normal que actúa sobre los neumáticos ejercida por el pavimento, (*b*) la fuerza de rozamiento ejercida por el pavimento sobre los neumáticos del coche, y (*c*) el coeficiente de rozamiento estático mínimo entre el pavimento y los neumáticos.

95 •• En otra ocasión, el coche del problema 94 toma la curva a 38 km/h. Determinar (*a*) la fuerza normal ejercida por el pavimento sobre los neumáticos y (*b*) la fuerza de rozamiento ejercida entre el pavimento y los neumáticos.

96 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un ingeniero de caminos recibe la siguiente consulta. Hay que diseñar una sección curva de carretera que cumpla las siguientes condiciones: con hielo sobre la carretera, cuando el coeficiente de rozamiento estático entre la carretera y el caucho es 0,08, un coche en reposo no debe deslizarse hacia la cuneta, y un coche que circule a menos de 60 km/h no debe deslizarse hacia el exterior de la curva. ¿Cuál debe ser el radio mínimo de curvatura de la curva y el ángulo de peralte de la carretera?

97 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Una carretera está peraltada de modo que un coche de 950 kg que se desplace a 40 km/h pueda tomar una curva de 30 m de radio incluso cuando la carretera esté tan helada que el coeficiente de rozamiento sea aproximadamente cero. Determinar en qué intervalo de velocidades puede un coche tomar esta curva sin patinar, si el coeficiente de rozamiento estático entre la carretera y las ruedas es de 0,3.

*INTEGRACIÓN NUMÉRICA: MÉTODO DE EULER

* 98 •• **HOJA DE CÁLCULO, APROXIMACIÓN** Desde un globo aerostático se tira una pelota de béisbol verticalmente hacia abajo con una velocidad inicial de 35 km/h. La pelota alcanza la velocidad terminal de 150 km/h. Suponiendo que la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad, use el método de Euler para estimar la velocidad de la bola transcurridos 10 s de su lanzamiento. ¿Cuál es la incertidumbre del resultado? Si se deja caer una segunda bola, esta vez con velocidad inicial nula, ¿cuánto tiempo le cuesta alcanzar el 99% de su velocidad límite? ¿Qué distancia recorre durante este tiempo?

* 99 •• **HOJA DE CÁLCULO, APROXIMACIÓN** Se lanza verticalmente hacia arriba una pelota de béisbol con una velocidad inicial de 150 km/h. Al caer, su velocidad límite también es 150 km/h. (*a*) Use el método de Euler para estimar la altura de la bola 3,5 s después del lanzamiento. (*b*) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza? (*c*) ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzar la altura máxima? (*d*) ¿Cuánto tarda en volver al suelo? (*e*) ¿El tiempo que tarda la pelota en subir es menor, igual o mayor que el que tarda en bajar? SSM

* 100 ••• **HOJA DE CÁLCULO, APROXIMACIÓN** Un bloque de 0,80 kg colocado sobre una superficie horizontal sin rozamiento mantiene comprimido 30 cm un muelle de 50 N/m de constante elástica, que se considera sin masa. El bloque se suelta y el muelle lo empuja 30 cm. Use el método de Euler con $\Delta t = 0{,}005$ s para estimar el tiempo que tarda el muelle en empujar el bloque esos 30 cm. ¿A qué velocidad se mueve el bloque pasado este tiempo? ¿Qué certeza se tiene sobre el valor de esta velocidad?

CÁLCULO DEL CENTRO DE MASAS

101 • Tres masas puntuales de 2 kg cada una están localizadas sobre el eje x. Una está en el origen, otra en $x = 0{,}20$ m y la otra en $x = 0{,}50$ m. Hallar el centro de masas del sistema.

102 • El hacha de piedra de la figura 5.77, en donde se muestran sus dimensiones, está formada por una piedra simétrica de 8 kg atada al extremo de un palo homogéneo de 2,5 kg. ¿A qué distancia del mango del hacha se encuentra su centro de masas?

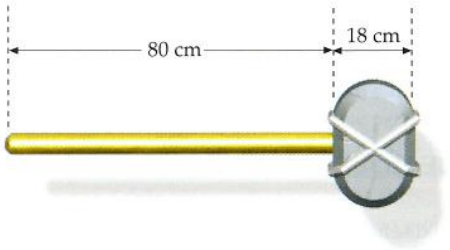


FIGURA 5.77 Problema 102

103 • Tres bolas A, B y C de masas 3 kg, 1 kg y 1 kg, respectivamente, están conectadas por barras de masa despreciable. Las bolas están localizadas en la forma indicada en la figura 5.78. ¿Cuáles son las coordenadas del centro de masas?

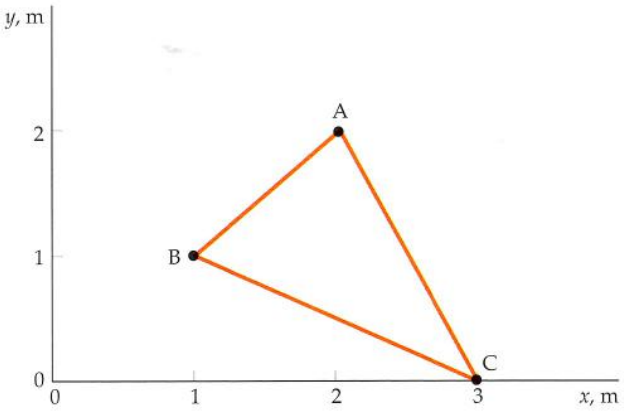


FIGURA 5.78 Problemas 103 y 115

104 • Por simetría, localizar el centro de masas de un triángulo equilátero de lado a, que tiene un vértice sobre el eje y y los otros dos en $(-a/2, 0)$ y $(+a/2, 0)$.

105 •• Determinar el centro de masas de una pieza de madera contrachapada que tiene la forma de la figura 5.79. Podemos considerar que la pieza está formada por dos piezas, un cuadrado de 3 m de lado y de masa m_1 y un rectángulo de 1 m × 2 m con una masa $-m_2$. Considere que el eje de coordenadas está situado en el extremo inferior izquierdo de la pieza. SSM

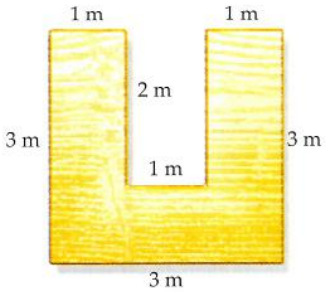


FIGURA 5.79 Problema 105

106 •• Una lata de masa M y altura H tiene forma cilíndrica y está llena de agua. La masa inicial de agua es M, la misma de la lata. Se perfora un agujero en la base de la lata por el que se va el agua. (*a*) Si la altura del agua en la lata es x, ¿cuál es el centro de masas del sistema lata + agua? (*b*) ¿Cuál es la mínima altura del centro de masas mientras se escapa el agua?

107 •• Dos barras idénticas y uniformes, cada una con longitud L, están unidas por sus extremos formando un ángulo de 90°. Determinar la posición del centro de masas del conjunto (en función de L) tomando de origen el punto de unión entre las barras. *Ayuda: no es necesario saber la masa de las barras pero es conveniente suponer que cada una de las barras tiene una masa m. Luego, las masas se cancelan.* SSM

108 ••• Repetir el análisis del problema 107, pero ahora suponiendo que las barras forman un ángulo θ. ¿Concuerda el resultado obtenido cuando ponemos 90° como valor de θ con el del problema 107? ¿Se obtienen resultados razonables cuando el ángulo es de 0° o de 180°?

* **109** •• **ENCONTRAR EL CENTRO DE MASAS POR INTEGRACIÓN** Demostrar que el centro de masas de un disco semicircular uniforme de radio R está en un punto que dista $4R/(3\pi)$ del centro del círculo.

* **110** •• Hallar la localización del centro de masas de una barra no uniforme de 0,4 m de longitud si su densidad varía linealmente de 1 g/cm en un extremo a 5 g/cm en el otro extremo. Especifica la localización tomando el origen en el extremo con menos masa.

* **111** ••• Se tiene una varilla fina y uniforme curvada en forma de arco circular de radio R y ángulo θ_m (ver figura 5.80). Demostrar que el centro de masas está situado sobre el eje x a una distancia $x_{cm} = R \text{ sen } \theta_m/\theta_m$ donde θ_m se expresa en radianes. Compruebe su respuesta verificando que se obtiene el valor conocido cuando el ángulo es de 180°. Verifique su respuesta con la que se da en el texto (apartado Cálculo del centro de masas por integración) para el caso en que $\theta_m = 90°$.

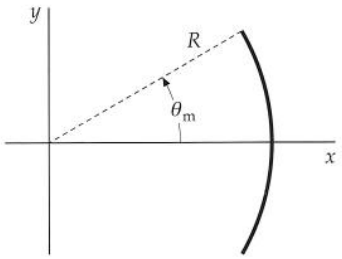


FIGURA 5.80 Problema 111

* **112** ••• Un alambre largo, fino, de longitud L tiene una densidad lineal de masa dada por $A - Bx$, donde A y B son constantes positivas y x es la distancia desde el extremo con más masa. (*a*) Una condición para que este problema sea realista es que $A > BL$. Explique por qué. (*b*) Determine x_{cm} en función de L, A y B. ¿Si $B = 0$ su respuesta tiene sentido? Razone la respuesta.

MOVIMIENTO DEL CENTRO DE MASAS

113 • Dos masas de 3 kg cada una tienen las velocidades $\vec{v}_1 = (2{,}0 \text{ m/s})\hat{i} + (3{,}0 \text{ m/s})\hat{j}$ y $\vec{v}_2 = (4{,}0 \text{ m/s})\hat{i} - (6{,}0 \text{ m/s})\hat{j}$. Determinar la velocidad del centro de masas del sistema. SSM

114 • Un automóvil de 1500 kg se mueve hacia el oeste con una velocidad de 20 m/s y un camión de 3000 kg se mueve hacia el este con una velocidad de 16 m/s. Calcular la velocidad del centro de masas del sistema.

115 • Una fuerza $\vec{F} = 12\ \text{N}\ \hat{i}$ se aplica a la bola de 3 kg de la figura 5.78 del problema 103. ¿Cuál es la aceleración del centro de masas?

116 •• Un bloque de masa m está sujeto a una cuerda y suspendido dentro de una caja hueca de masa M. La caja descansa sobre una balanza que mide el peso del sistema. (*a*) Si la cuerda se rompe, ¿cambia la lectura de la balanza? Razonar la respuesta. (*b*) Suponer que la cuerda se rompe y la masa m cae con aceleración constante g. Determinar la aceleración del centro de masas, tanto en dirección como en módulo. (*c*) Utilizando el resultado de (*b*), determinar la lectura de la balanza, mientras m se encuentra en caída libre.

117 •• Un muelle vertical de constante de fuerza k está sujeto a la parte inferior de una plataforma y sobre su parte superior descansa una cápsula sin masa, como indica la figura 5.81. La plataforma reposa sobre una balanza. Una bola de masa m_b se deja caer en la cápsula desde una altura despreciable. ¿Cuál es la lectura de la balanza cuando (*a*) el muelle se comprime la longitud $d = m_b g/k$, (*b*) la bola alcanza momentáneamente el reposo con el muelle comprimido, (*c*) la bola alcanza de nuevo el reposo en su posición original? SSM

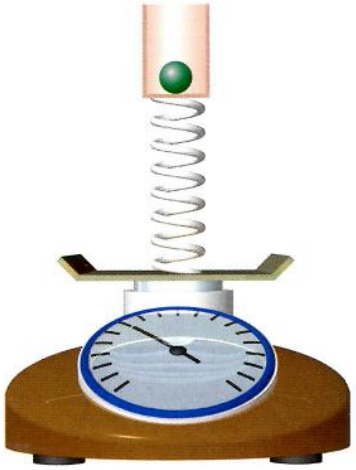


FIGURA 5.81 Problema 117

118 ••• En la máquina de Atwood de la figura 5.82, la cuerda pasa por un cilindro fijo, sin rozamiento, de masa m_c. (*a*) Determinar la aceleración del centro de masas del sistema formado por los dos bloques y el cilindro. (*b*) Utilizar la segunda ley de Newton (para sistemas) para determinar la fuerza F ejercida por el soporte. (*c*) Determinar la tensión de la cuerda que conecta los bloques y demostrar que $F = m_c g + 2\,T$.

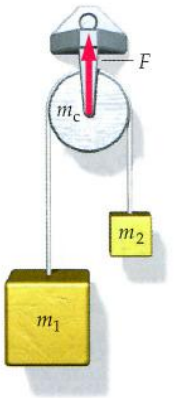


FIGURA 5.82 Problema 118

119 ••• Se parte de la situación de equilibrio del problema 117. El sistema conjunto (balanza, muelle, bandeja y bola) está sometido ahora a una aceleración constante ascendente a (por ejemplo, en un ascensor). Repetir el diagrama de fuerzas y los cálculos del problema 117.

PROBLEMAS GENERALES

120 • Al diseñar su nueva casa en California, usted tiene en cuenta que debe soportar aceleraciones horizontales de hasta $0{,}5g$. ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento estático mínimo que debe existir entre el suelo de la casa y su valioso jarrón Tuscan para que éste no se deslice sobre el suelo en esas condiciones?

121 • Un bloque de 4,5 kg se desliza hacia abajo por un plano inclinado que forma un ángulo de 28° con la horizontal. Partiendo del reposo, el bloque se mueve una distancia de 2,4 m en 5,2 segundos. Determinar el coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano.

122 •• Una maqueta de avión de masa 0,4 kg está sujeta a una cuerda horizontal y vuela en un círculo horizontal de radio 5,7 m. (El peso del avión está equilibrado por la fuerza ascensional del aire sobre las alas del modelo.) El avión da 1,2 revoluciones cada 4 s. (*a*) Calcular la velocidad v del avión. (*b*) Determinar la tensión de la cuerda.

123 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Un cajón de libros ha de subirse a un camión con la ayuda de unas planchas inclinadas 30°. La masa del cajón es 100 kg y el coeficiente de rozamiento por deslizamiento entre el cajón y las planchas es 0,5. Para esta operación varias personas empujan *horizontalmente* con una fuerza total $\vec{F}$. Una vez que el cajón comienza a moverse, ¿qué valor debe tomar F para que el cajón siga subiendo con velocidad constante?

124 •• Sobre un objeto actúan tres fuerzas tal como se muestra en la figura 5.83. (*a*) Si F_1, F_2 y F_3 representan los módulos de las fuerzas que actúan sobre el objeto, demostrar que $F_1/\text{sen}\,\theta_{23} = F_2/\text{sen}\,\theta_{31} = F_3/\text{sen}\,\theta_{12}$. (*b*) Demostrar que $F_1^2 = F_2^2 + F_3^2 + 2F_2F_3\cos\theta_{23}$.

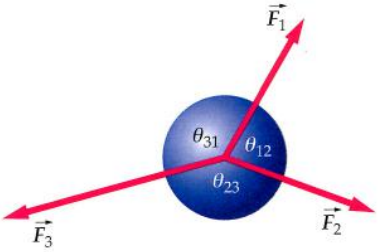


FIGURA 5.83 Problema 124

125 •• En un carrusel de feria, un pasajero se sienta en un compartimiento que gira con una velocidad cuyo módulo es constante en un círculo vertical de radio $r = 5$ m. Las cabezas de los pasajeros sentados apuntan siempre hacia el centro del círculo. (*a*) Si el carrusel completa un círculo en 2 s, determinar la aceleración del pasajero. (*b*) Calcular el ritmo de rotación más lento (es decir, el tiempo más largo T_m para completar un círculo) del carrusel para el cual el cinturón de seguridad del asiento no ejerce fuerza alguna sobre el pasajero en la parte más alta del recorrido.

126 •• Una carretilla de juguete se mueve sobre ruedas sin rozamiento, arrastrada por una cuerda bajo una tensión T. La masa de la carretilla es m_1. Una carga de masa m_2 reposa sobre el suelo plano de la carretilla con un coeficiente de rozamiento estático μ_e. La carretilla es arrastrada hacia arriba por una rampa que está inclinada un ángulo θ por encima de la horizontal. La cuerda está situada paralelamente a la rampa. ¿Cuál es la máxima tensión T que puede aplicarse sin que la carga se deslice?

127 ••• Un trineo que pesa 200 N descansa sobre un plano inclinado 15°. El coeficiente de rozamiento estático es 0,5 (figura 5.84). (*a*) ¿Cuál es el módulo de la fuerza normal sobre el trineo? (*b*) ¿Cuál es el módulo del rozamiento estático sobre el trineo? (*c*) El trineo es ahora arrastrado hacia arriba a velocidad constante por un niño. Éste pesa 500 N y tira de la cuerda con una fuerza constante de 100 N. La cuerda forma un ángulo de 30° con el plano inclinado y es de masa despreciable. ¿Cuál es el módulo de la fuerza de rozamiento cinético sobre el trineo? (*d*) ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento cinético entre el trineo y el plano inclinado? (*e*) ¿Cuál es el módulo de la fuerza ejercida sobre el niño por el plano inclinado?

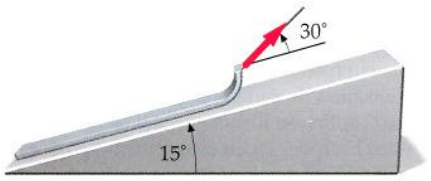


FIGURA 5.84 Problema 127

128 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** En 1976, Gerard O'Neill propuso la construcción de grandes estaciones espaciales habitables situadas en órbita alrededor de la Tierra y de la Luna. Dado que permanecer en condiciones de ingravidez tiene efectos médicos adversos, propuso que las estaciones tuvieran la forma de largos cilindros que girasen alrededor de su eje, de modo que proporcionaran a sus habitantes una sensación de gravedad. Esta idea hizo mella entre los escritores y guionistas de historias de ciencia ficción; así por ejemplo, la serie de TV *Babylon 5* contempla una estación como la propuesta por O'Neill que tiene una longitud de 8 km y un diámetro de 1 km. A causa de la rotación, alguien que esté dentro de la colonia tendrá sensación de gravidez por el hecho de estar en un sistema de referencia acelerado. (*a*) Demostrar que la "aceleración de la gravedad" experimentada por un habitante hipotético de la colonia de O'Neill es igual a su aceleración centrípeta. (*Ayuda: considere que alguien "está mirando" la colonia desde fuera*) (*b*) Si suponemos que la estación orbital tiene varias cubiertas que están situadas a distancias distintas del eje de rotación, mostrar cómo la "aceleración de la gravedad" se hace más débil cuanto más cerca se está del eje de rotación. (*c*) ¿Cuántas vueltas por minuto debería dar la estación *Babylon 5* para producir una aceleración parecida a la de la gravedad (9,8 m/s^2) en el punto más alejado del eje del cilindro de la estación?

129 •• Una niña se desliza por un tobogán inclinado 30° en un tiempo t_1. El coeficiente de rozamiento cinético entre ella y el tobogán es μ_c. Un día descubre que si se sienta en un pequeño trineo sin rozamiento, se desliza en el mismo tobogán en un tiempo $\frac{1}{2}t_1$. Determinar μ_c.

130 ••• La posición de una partícula de masa $m = 0{,}8$ kg en función del tiempo es $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} = (R \operatorname{sen} \omega t)\,\hat{i} + (R \cos \omega t)\,\hat{j}$, en donde $R = 4{,}0$ m y $\omega = 2\pi$ s^{-1}. (*a*) Demostrar que la trayectoria seguida por esta partícula es un círculo de radio R con su centro en el origen. (*b*) Calcular el vector velocidad y demostrar que $v_x/v_y = -y/x$. (*c*) Determinar el vector aceleración y demostrar que su dirección es radial y su módulo v^2/R. (*d*) Determinar el módulo y dirección de la fuerza neta que actúa sobre la partícula.

131 ••• **MÚLTIPLES PASOS** En un parque de atracciones, la gente se sostiene contra las paredes de un cilindro giratorio. Cuando el suelo se hunde, la fuerza de rozamiento mantiene a los participantes en contacto con la pared. Considere que la masa de una persona es de 75 kg. (*a*) Dibuje el diagrama de fuerzas de la persona. (*b*) Utilice dicho diagrama para determinar, junto con las leyes de Newton, la fuerza de rozamiento sobre la persona. (*c*) Si el radio del cilindro es de 4 m y el coeficiente de rozamiento estático entre la persona y la pared es de 0,55, determinar el número mínimo de revoluciones por minuto necesario para evitar el deslizamiento sobre la pared. ¿Valdrá esta respuesta para cualquier otra persona? Razónese la respuesta.

132 ••• Un bloque de masa m_1 situada sobre una plataforma horizontal está conectada por una cuerda delgada que pasa por una polea sin rozamiento ni masa a un bloque de masa m_2 de 2,5 kg que cuelga lateralmente a una distancia de 1,5 m sobre el suelo (figura 5.85). El sistema se deja libre desde el reposo en el tiempo $t = 0$ y el bloque de masa de 2,5 kg choca contra el suelo en el instante $t = 0{,}82$ s. El sistema se sitúa de nuevo en su posición inicial, pero ahora se coloca un bloque de masa de 1,2 kg en la parte superior del bloque de masa m_1. Se libera el sistema desde el reposo y el bloque de masa de 2,5 kg choca contra el suelo 1,3 s más tarde. Determinar la masa m_1 y el coeficiente de rozamiento cinético entre m_1 y la plataforma.

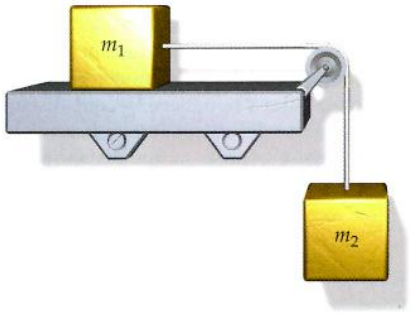


FIGURA 5.85 Problema 132

133 ••• Sally afirma que la ardillas realmente no vuelan sino que saltan y utilizan los pliegues de la piel que conectan las patas delanteras con las traseras como una especie de paracaídas que les permite planear de árbol en árbol. Liz decide comprobar la afirmación de Sally calculando la velocidad terminal de caída de las ardillas. Si la constante b de la fuerza de arrastre es proporcional al área frontal que el objeto opone al flujo de aire, utilizar los resultados del ejemplo 5.12 y algunas hipótesis sobre el tamaño de la ardilla para estimar la velocidad terminal (hacia abajo) de la ardilla. ¿Concuerda el cálculo de Liz con la afirmación de Sally?

134 •• **APLICACIÓN BIOLÓGICA** Después de saltar del avión, pero antes de que tire de la cuerda para abrir el paracaídas, un paracaidista alcanza una velocidad de 180 km/h. Cuando se abre el paracaídas, la fuerza de arrastre aumenta en un factor 10 y esto produce una fuerte sacudida sobre el paracaidista. (*a*) Si la masa del paracaidista es de 60 kg, determinar la aceleración cuando se abre el paracaídas. (*b*) Si aceleraciones bruscas de $5g$ son peligrosas para la estructura del cuerpo humano, ¿es esta una práctica segura?

135 • Determinar la localización del centro de masas del sistema Tierra-Luna relativo a la Tierra. ¿Se encuentra dentro o fuera de la superficie terrestre?

136 •• Una placa circular de radio r tiene un orificio circular cortado en ella de radio $R/2$ (figura 5.86). Hallar el centro de masas de la placa. Sugerencia: *el orificio puede representarse por dos discos superpuestos; uno de masa m y el otro de masa* $-m$.

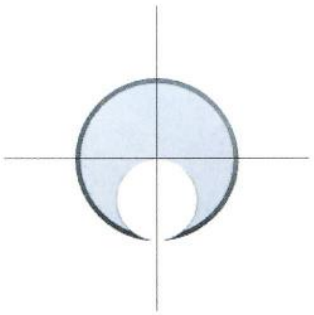


FIGURA 5.86 Problema 136

CAPÍTULO 6

LA NIEVE SE FUNDE BAJOS LOS ESQUÍS DEBIDO AL ROZAMIENTO CINÉTICO ENTRE LA NIEVE Y LOS ESQUÍS. EL ESQUIADOR SE DESLIZA, MONTAÑA ABAJO, SOBRE UNA FINA CAPA DE AGUA LÍQUIDA. *(Gentileza de Rossignol Ski Company.)*

Trabajo y energía cinética

6.1 Trabajo realizado por una fuerza constante

6.2 Trabajo realizado por una fuerza variable

Movimiento rectilíneo

6.3 El producto escalar

*6.4 Teorema del trabajo-energía cinética

Trayectorias curvilíneas

6.5 Trabajo del centro de masas

? ¿Cómo afecta la forma de la pendiente o la distancia que debe recorrer el esquiador a la velocidad de llegada a la meta? (Véase el ejemplo 6.12.)

Hasta ahora hemos analizado el movimiento utilizando conceptos como posición, velocidad, aceleración y fuerza. Sin embargo, algunos tipos de movimientos son difíciles de describir directamente mediante las leyes de Newton. (Un ejemplo de este tipo de movimiento es la velocidad con la que un esquiador desciende sobre una colina con pendiente curva.) En este capítulo y en el siguiente, estudiaremos diversos métodos alternativos para analizar el movimiento mediante dos conceptos científicos fundamentales: energía y trabajo. A diferencia de la fuerza, que es una magnitud vectorial, energía y trabajo son magnitudes físicas escalares asociadas a las partículas y a los sistemas de partículas. Como veremos en breve, estos nuevos conceptos nos proporcionan potentes métodos para resolver un amplio espectro de problemas.

En este capítulo, analizaremos el concepto de trabajo y cómo están relacionados el trabajo y la energía cinética, que es la energía asociada al movimiento de los cuerpos. También discutiremos los conceptos de potencia y trabajo sobre el centro de masas.

6.1 TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA CONSTANTE

FIGURA 6.1 La energía se transfiere de la persona al muelle cuando el muelle se estira. La energía transferida es igual al trabajo realizado por la persona sobre el muelle.

Normalmente, se piensa que el trabajo es algo que requiere un esfuerzo físico o mental, como estudiar para un examen, llevar una mochila o ir en bicicleta. Pero en física, el trabajo es la transferencia de energía mediante una fuerza. Así, si usted estira un muelle tirando de él con la mano (figura 6.1), la energía transferida por usted al muelle es igual al trabajo realizado por la fuerza de su mano sobre el muelle. La energía transferida al muelle se pone de manifiesto cuando usted deja ir el muelle y éste se contrae rápidamente y oscila.

El trabajo es una magnitud física escalar, que puede ser positiva, negativa o con valor cero. El trabajo realizado por el cuerpo A sobre el B es positivo si la energía se transfiere de A a B y negativo cuando la energía se transfiere de B a A. Si no se transfiere energía, el trabajo realizado es cero. En el caso del muelle, el trabajo realizado por usted sobre el muelle es positivo porque la energía se transfiere de usted al muelle. Sin embargo, suponga que usted mueve la mano de forma que el muelle se contrae lentamente hasta su posición de equilibrio. Durante la contracción, el muelle pierde energía —la energía se transfiere del muelle a usted— y el trabajo que usted realiza sobre el muelle es negativo.

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 6.1

Para la contracción del muelle, ¿cómo es el trabajo realizado por la persona, positivo o negativo?

Normalmente, se dice que trabajo es fuerza por desplazamiento. Desafortunadamente, la afirmación "trabajo es fuerza por distancia" es demasiado simple y engañosa. Se realiza trabajo sobre un cuerpo cuando el punto de aplicación de la fuerza se mueve a lo largo de un desplazamiento. Por ejemplo, imagine que usted empuja una caja sobre el suelo con una fuerza constante horizontal $\vec{F}$ en la dirección del desplazamiento $\Delta x\hat{i}$ (figura 6.2*a*). Puesto que la fuerza actúa sobre la caja en la misma dirección que se produce el desplazamiento, el trabajo W realizado por la fuerza sobre la caja es

$$W = F\,|\Delta x|$$

Ahora imagínese que usted tira de un muelle que está sujeto a la caja, de forma que la fuerza actúa sobre la caja formando un ángulo con la dirección del desplazamiento como se ilustra en la figura 6.2*b*. En este caso, el trabajo realizado sobre la caja por la fuerza viene dado por la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento tantas veces como indica el módulo del desplazamiento:

$$W = F_x\Delta x = F\cos\theta\,|\Delta x| \qquad 6.1$$

TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA CONSTANTE

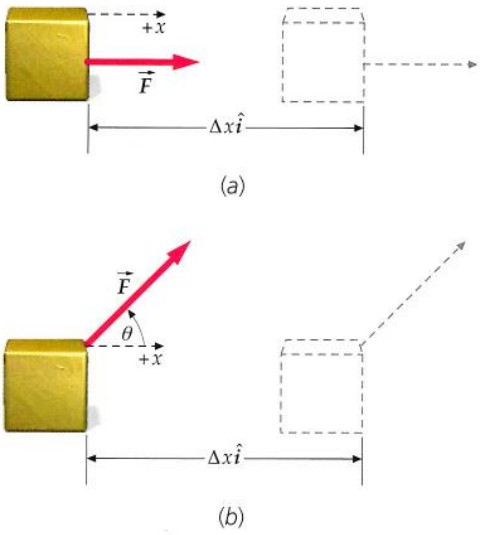


FIGURA 6.2

donde F es el módulo de la fuerza constante, $|\Delta x|$ es el módulo del desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza y θ es el ángulo que forman las direcciones de la fuerza y la dirección del desplazamiento. El desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza es idéntico al desplazamiento de cualquier otro punto de la caja pues la caja es rígida y se mueve sin rotar. Si usted levanta o baja una caja ejerciendo una fuerza $\vec{F}$ sobre ella, estará haciendo trabajo sobre la caja. Consideremos la dirección positiva del eje y, y sea $\Delta y\hat{j}$ el desplazamiento de la caja. El trabajo realizado por usted sobre la caja es positivo si Δy y F_y tienen el mismo signo y será negativo si tienen signos contrarios. Pero si usted está simplemente sosteniendo la caja en una posición fija, entonces, de acuerdo con la definición de trabajo, usted no está haciendo trabajo sobre la caja porque Δy es cero (figura 6.3). En este caso, aunque usted esté aplicando una fuerza sobre la caja, el trabajo que realiza sobre la caja es cero.

La unidad de trabajo y energía del SI es el **joule** (J), igual al producto de un newton por un metro:

$$1\,\text{J} = 1\,\text{N}\cdot\text{m} \qquad 6.2$$

(En el sistema habitual utilizado en los Estados Unidos la unidad de trabajo es el pie-libra: $1\text{ft}\cdot\text{lb} = 1{,}356$ J.) Otra unidad útil de trabajo y energía en física atómica y nuclear es el **electronvolt** (eV):

$$1\,\text{eV} = 1{,}602\times10^{-19}\,\text{J} \qquad 6.3$$

FIGURA 6.3

Los múltiplos comúnmente utilizados son el keV (10^3 eV) y el MeV (10^6 eV). El trabajo necesario para extraer un electrón de un átomo es del orden de varios eV, mientras que el trabajo necesario para extraer un protón o un neutrón de un núcleo atómico es del orden de varios MeV.

PROBLEMA PRÁCTICO 6.1
Se ejerce una fuerza de 12 N sobre un bloque bajo un ángulo $\theta = 20°$, como indica la figura 6.2*b*. ¿Qué trabajo realiza la fuerza sobre el bloque, si éste se desplaza 3 m a lo largo de la mesa?

Cuando hay varias fuerzas que realizan trabajo sobre un sistema, el trabajo total se calcula sumando el trabajo realizado por cada una de las fuerzas:

$$W_{\text{total}} = F_{1x}\,\Delta x_1 + F_{2x}\,\Delta x_2 + F_{3x}\,\Delta x_3 + \cdots \qquad 6.4$$

Podemos describir el sistema como una sola partícula si el sistema se mueve de tal manera que todas las partes del sistema realizan desplazamientos idénticos. Cuando varias fuerzas hacen trabajo sobre esa partícula, los desplazamientos de los puntos de aplicación son idénticos. Sea Δx el desplazamiento de un punto de aplicación de una de las fuerzas. Entonces

$$W_{\text{total}} = F_{1x}\,\Delta x + F_{2x}\,\Delta x + \cdots = (F_{1x} + F_{2x} + \cdots)\Delta x = F_{\text{neta}\,x}\,\Delta x \qquad 6.5$$

Si una partícula está obligada a moverse en el eje x, la fuerza neta que experimenta únicamente tiene una componente x. Es decir, $\vec{F}_{\text{neta}} = F_{\text{neta}\,x}\,\hat{i}$. Por consiguiente, la componente x de la fuerza neta multiplicada por el desplazamiento de cualquier parte del objeto es igual al trabajo total realizado sobre el objeto.

Ejemplo 6.1 La grúa que carga

Un camión de masa 3000 kg se carga en un buque mediante una grúa que ejerce una fuerza ascendente de 31 kN sobre el camión. Esta fuerza, que es suficientemente grande para vencer la fuerza de la gravedad y empezar a levantar el camión, se aplica a lo largo de una distancia de 2 m. Determinar (*a*) el trabajo realizado por la grúa, (*b*) el trabajo realizado por la gravedad, y (*c*) el trabajo neto realizado sobre el camión.

PLANTEAMIENTO En los apartados (*a*) y (*b*), la fuerza que actúa sobre el camión es constante y el desplazamiento es rectilíneo, de forma que podemos utilizar la ecuación 6.1, eligiendo $+y$ como la dirección del desplazamiento.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Dibujar el camión es su posición inicial y final. Elegir la dirección $+y$ en la dirección del desplazamiento (figura 6.4)

2. Calcular el trabajo realizado por la fuerza aplicada:

$$W_{\text{ap}} = F_{\text{ap}\,y}\,\Delta y = (31\text{ kN})(2{,}0\text{ m}) = \boxed{62\text{ kJ}}$$

(*b*) Calcular el trabajo realizado por la gravedad:
(*Nota*: el vector $\vec{g}$ se dirige hacia abajo y la dirección de $+y$ es hacia arriba. En consecuencia $g_y = g\cos 180° = -g$.)

$$W_g = mg_y\,\Delta y = (3000\text{ kg})(-9{,}81\text{ N/kg})(2{,}0\text{ m}) = \boxed{-59\text{ kJ}}$$

(*c*) El trabajo total realizado sobre el camión es la suma del trabajo realizado por cada fuerza:

$$W_{\text{total}} = W_{\text{ap}\,y} + W_g = 62\text{ kJ} + (-59\text{ kJ}) = \boxed{3\text{ kJ}}$$

COMPROBACIÓN En el apartado (*a*), la fuerza se aplica en la misma dirección que el desplazamiento. En el apartado (*b*), la fuerza se aplica en la dirección opuesta al desplazamiento, por lo que se espera que el trabajo sea negativo. Los resultados confirman estas observaciones.

OBSERVACIÓN En el apartado (*c*), podríamos haber calculado el trabajo total calculando primero la fuerza resultante sobre el camión y luego utilizar la ecuación 6.5.

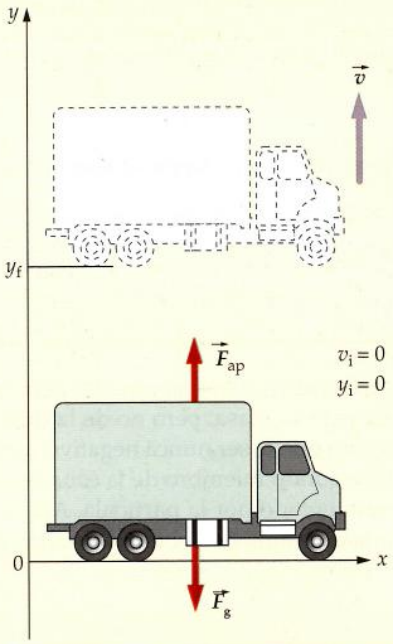


FIGURA 6.4

TEOREMA DEL TRABAJO-ENERGÍA CINÉTICA

El concepto de energía es uno de los más unificadores de la ciencia. En todos los procesos físicos está presente la energía. La **energía** de un sistema mide su capacidad de hacer trabajo.

Se utilizan diferentes términos para hacer referencia a la energía asociada a diferentes condiciones o estados. Así, la **energía cinética** está asociada al movimiento. La *energía potencial* es energía asociada a la configuración del sistema, como la distancia de separación entre dos sistemas que se atraen. La *energía térmica* está asociada con el movimiento aleatorio de átomos, moléculas o iones dentro de un sistema y está estrechamente relacionada con la temperatura del sistema. En este capítulo, nos centraremos en la energía cinética. La energía potencial y la térmica se estudiarán en el capítulo 7.

Cuando las fuerzas que actúan sobre una partícula realizan trabajo, el resultado es el cambio asociado al movimiento de la partícula —la energía cinética. Para obtener la relación entre energía cinética y trabajo, veamos qué sucede si una fuerza constante neta $\vec{F}_{\text{neta}}$ actúa sobre una partícula de masa m que se mueve a lo largo del eje x. Aplicando la segunda ley de Newton:

$$F_{\text{neta}\,x} = ma_x$$

Si la fuerza es constante, la aceleración es constante y el desplazamiento está relacionado con la velocidad inicial v_i y con la velocidad final v_f mediante la fórmula válida cuando la aceleración es constante (ecuación 2.16).

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a_x \Delta x$$

A partir de la expresión anterior, se obtiene para a_x

$$a_x = \frac{1}{2\Delta x}(v_f^2 - v_i^2)$$

Sustituyendo a_x en $F_{\text{neta}\,x} = ma_x$ y multiplicando ambos miembros por Δx, se tiene

$$F_{\text{neta}\,x}\,\Delta x = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2$$

Como el primer miembro es el trabajo total realizado sobre la partícula, entonces

$$W_{\text{total}} = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2 \qquad 6.6$$

La magnitud $\frac{1}{2}mv^2$ recibe el nombre de **energía cinética** K de la partícula:

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 \qquad 6.7$$

DEFINICIÓN: ENERGÍA CINÉTICA

Obsérvese que la energía cinética depende sólo del módulo de la velocidad de la partícula y de su masa, pero no de la dirección de movimiento. Además, la energía cinética no puede ser nunca negativa y sólo es cero cuando la partícula está en reposo.

El segundo miembro de la ecuación 6.6 representa el cambio de energía cinética experimentado por la partícula. Así, la ecuación 6.6 nos da la relación entre el trabajo total realizado sobre una partícula y el cambio de energía cinética de dicha partícula.

$$W_{\text{total}} = \Delta K \qquad 6.8$$

TEOREMA TRABAJO-ENERGÍA CINÉTICA

Este resultado se conoce con el nombre de **teorema trabajo-energía cinética**. Este teorema nos dice que cuando W_{total} es positivo, la energía cinética aumenta, lo que significa que la partícula se mueve más rápido al final del desplazamiento que al inicio. Cuando W_{total} es negativo, la energía cinética disminuye. Cuando W_{total} es cero, la energía cinética no cambia.

Como el trabajo total es igual al cambio de su energía cinética, las unidades de energía y las de trabajo son las mismas. Hay tres unidades habitualmente utilizadas para la energía: el joule (J), el pie-libra (ft-lb) y el electronvolt (eV).

La demostración del teorema trabajo-energía cinética que hemos presentado aquí sólo es válida si la fuerza neta permanece constante. Sin embargo, como se verá más adelante en este capítulo, este teorema es válido incluso cuando la fuerza neta varía y el movimiento no se realiza a lo largo de una línea recta.

¡ Obsérvese que la energía cinética sólo depende del módulo de la velocidad de la partícula y no de la velocidad como vector. Si la velocidad cambia de dirección, pero no de módulo, la energía cinética no cambia.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Resolución de problemas donde interviene el trabajo y la energía cinética

PLANTEAMIENTO La elección de la dirección $+y$ o $+x$ puede ayudarnos a resolver fácilmente un problema de trabajo y energía cinética.

SOLUCIÓN

1. Dibujar la partícula, primero en su posición inicial y luego en su posición final. Por conveniencia, el objeto se puede representar como un punto o una caja. Marcar las posiciones inicial y final del objeto.
2. Colocar uno o más ejes de coordenadas en el dibujo.
3. Dibujar flechas para las velocidades inicial y final, y marcarlas adecuadamente.
4. Colocar un vector para cada fuerza que actúa sobre el objeto en su posición inicial. Acompáñese a cada vector con su marca correspondiente.
5. Calcular el trabajo total realizado sobre la partícula debido a las fuerzas e igualar el resultado al cambio de energía cinética de las partículas.

COMPROBACIÓN Asegúrese de que presta atención a los signos negativos durante los cálculos. Por ejemplo, el trabajo puede ser positivo o negativo dependiendo de la dirección del desplazamiento en relación a la dirección de la fuerza.

Ejemplo 6.2 La fuerza sobre un electrón

En un tubo de televisión*, se acelera un electrón desde el reposo hasta una energía cinética de 2,5 keV a lo largo de una distancia de 2,5 cm. (La fuerza que acelera el electrón es una fuerza eléctrica debida al campo eléctrico que se genera en el tubo.) Determinar la fuerza que actúa sobre el electrón suponiendo que es constante y tiene la dirección del movimiento.

PLANTEAMIENTO El electrón puede describirse como una partícula. Sus energías cinéticas inicial y final son conocidas y la fuerza eléctrica es simplemente la fuerza que actúa sobre el electrón. Aplicar el teorema del trabajo-energía cinética para despejar la fuerza.

* El tubo de televisión es un tipo de tubo de rayos catódicos.

SOLUCIÓN

1. Haga un dibujo de un electrón en su posición inicial y final. Incluya el desplazamiento, las velocidades inicial y final y la fuerza (figura 6.5):

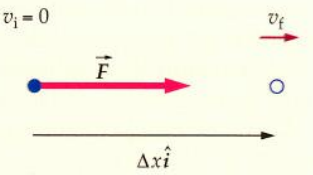


FIGURA 6.5

2. Iguale el trabajo al cambio de la energía cinética:

$$W_{\text{total}} = \Delta K$$
$$F_x \Delta x = K_f - K_i$$

3. Despeje la fuerza utilizando el factor de convesión $1{,}6 \times 10^{-19}$ J = 1,0 eV:

$$F_x = \frac{K_f - K_i}{\Delta x} = \frac{2500 \text{ eV} - 0}{0{,}025 \text{ m}} \times \frac{1{,}6 \times 10^{-19} \text{ J}}{1{,}0 \text{ eV}}$$
$$= \boxed{1{,}6 \times 10^{-14} \text{ N}}$$

COMPROBACIÓN La masa de un electrón es sólo de $9{,}1 \times 10^{-31}$ kg. Por eso, no es sorprendente que una fuerza pequeña sea capaz de comunicarle una gran velocidad y, por tanto, un importante cambio de energía cinética.

OBSERVACIÓN (*a*) 1 J = 1 N · m, así 1 J/m = 1 N. (*b*) 1 eV es la energía cinética adquirida por una partícula de carga $-e$ (un electrón, por ejemplo) cuando se acelera desde el polo negativo al positivo de una batería de 1 V a través del vacío.

Ejemplo 6.3 Una carrera de trineos

Durante sus vacaciones de invierno un profesor participa en una carrera de trineos tirados por personas en un lago helado. Para iniciar la carrera tira de su trineo (masa total 80 kg) con una fuerza de 180 N que forma un ángulo de 40° con la horizontal. Determinar (*a*) el trabajo realizado y (*b*) la velocidad final del trineo después de un recorrido Δx = 5 m, suponiendo que parte del reposo y que no existe rozamiento.

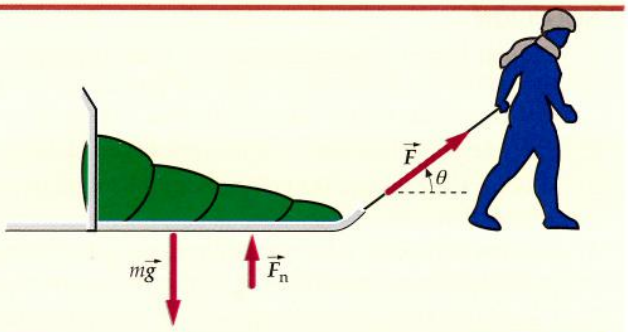


FIGURA 6.6

PLANTEAMIENTO El trabajo realizado por el profesor es $F_x \Delta x$, donde elegimos la dirección del desplazamiento como dirección positiva de x. Éste es también el trabajo total realizado sobre el trineo, ya que las otras fuerzas, mg y F_n, no tienen componentes x. La velocidad final del trineo se puede determinar a partir del teorema trabajo-energía cinética del trineo (figura 6.6). Calculamos el trabajo realizado por cada fuerza sobre el trineo y lo igualamos al cambio de energía cinética del trineo.

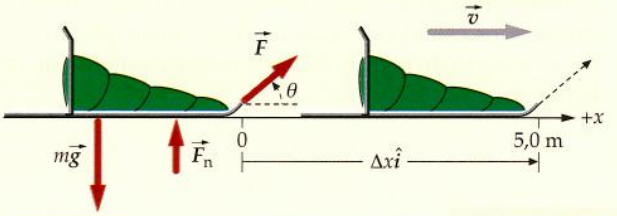


FIGURA 6.7

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Hacer un esquema del trineo en su posición inicial y en su posición tras haberse movido 5 m. Dibujar el eje x en la dirección del movimiento (figura 6.7):

2. El trabajo realizado por el profesor sobre el trineo es $F_x \Delta x$. (También es el trabajo total realizado en el trineo, ya que las otras fuerzas que actúan lo hacen en la dirección perpendicular al movimiento (figura 6.7) y su trabajo es cero:

$$W_{\text{total}} = W_{\text{prof}} = F_x \Delta x = F \cos\theta \, \Delta x$$
$$= (180 \text{ N})(\cos 40°)(5{,}0 \text{ m}) = 689 \text{ J}$$
$$= \boxed{6{,}9 \times 10^2 \text{ J}}$$

(*b*) Aplicar el teorema trabajo-energía cinética y resolver despejando la velocidad final:

$$W_{\text{total}} = \tfrac{1}{2} m v_f^2 - \tfrac{1}{2} m v_i^2$$
$$v_f^2 = v_i^2 + \frac{2W_{\text{total}}}{m}$$
$$= 0 + \frac{2(689 \text{ J})}{80 \text{ kg}} = 17{,}2 \text{ m}^2/\text{s}^2$$
$$v_f = \sqrt{17{,}2 \text{ m}^2/\text{s}^2} = 4{,}151 \text{ m/s} = \boxed{4{,}2 \text{ m/s}}$$

COMPROBACIÓN En el apartado (*b*) se ha utilizado que $1\ \text{J/kg} = 1\ \text{m}^2/\text{s}^2$. Esto es correcto porque

$$1\ \text{J/kg} = 1\ \text{N}\cdot\text{m/kg} = (1\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2)\cdot\text{m/kg} = 1\ \text{m}^2/\text{s}^2$$

OBSERVACIÓN La raíz cuadrada de 17,2 es 4,147 que se redondea a 4,1. Sin embargo, la respuesta correcta del apartado (*b*) es 4,2 m/s. Esto es correcto porque este valor se calculó tomando la raíz cuadrada de 17,235999970178 que era el resultado que aparecía en la pantalla de la calculadora como valor de v_f.

PROBLEMA PRÁCTICO 6.2 ¿Cuál será el módulo de la fuerza que deberá ejercer el profesor si el trineo parte con una velocidad de 2 m/s y su velocidad final es de 4,5 m/s después de recorrer una distancia de 5 m formando un ángulo de 40°?

Véase el **Apéndice de matemáticas** *para más información sobre* **Integrales**

6.2 TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA VARIABLE. MOVIMIENTO RECTILÍNEO

Muchas fuerzas varían con la distancia. Por ejemplo, un muelle estirado o comprimido ejerce una fuerza proporcional a la distancia estirada o comprimida. La fuerza gravitatoria que la Tierra ejerce sobre un vehículo espacial varía en razón inversa con el cuadrado de la distancia que separa los dos cuerpos. ¿Cómo podemos calcular el trabajo realizado por fuerzas de este tipo?

En la figura 6.8, se representa una fuerza constante F_x en función de la posición x. El trabajo realizado sobre una partícula cuyo desplazamiento es Δx viene representado por el área comprendida bajo la curva fuerza en función de la posición, indicada por el sombreado de la figura 6.8. Se puede aproximar una fuerza variable por una serie de fuerzas esencialmente constantes (figura 6.9). Para cada pequeño intervalo Δx_i, la fuerza es aproximadamente constante. Por tanto, el trabajo realizado es, aproximadamente, igual al área del rectángulo de altura F_{xi} y anchura Δx_i. El trabajo realizado por una fuerza variable será entonces la suma de las áreas de los rectángulos en el límite en que la anchura de los rectángulos tiende a cero:

$$W = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_i F_{xi}\,\Delta x_i = \text{área bajo la curva de } F_x \text{ en función de } x \qquad 6.9$$

Este límite es la integral de $F_x\,dx$. Así, el trabajo realizado por una fuerza variable F_x que actúa sobre una partícula cuando ésta se desplaza de x_1 a x_2 es

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx = \text{área bajo la curva de } F_x \text{ en función de } x \qquad 6.10$$

TRABAJO DE UNA FUERZA VARIABLE—MOVIMIENTO RECTILÍNEO

Si la fuerza dibujada en la figura 6.9 es la fuerza neta sobre una partícula, entonces cada término $F_{xi}\,\Delta x_i$, en la suma de la ecuación 6.9, representa el trabajo total realizado sobre la partícula por una fuerza constante cuando la partícula se desplaza una distancia Δx_i. Entonces, $F_{xi}\,\Delta x_i$ es igual al cambio de la energía cinética ΔK_i de la partícula durante el desplazamiento Δx_i (ver ecuación 6.8). Además, el cambio de la energía cinética total de la partícula durante el desplazamiento total es igual a la suma de los cambios de la energía cinética en cada desplazamiento. De aquí se deduce que el trabajo total es igual al cambio de energía cinética del desplazamiento completo. Así, $W_{\text{total}} = \Delta K$ es válido tanto para fuerzas variables como para fuerzas constantes.

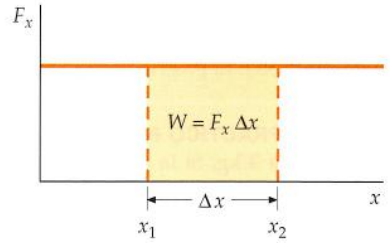


FIGURA 6.8 El trabajo realizado por una fuerza constante viene representado gráficamente por el área comprendida bajo la curva correspondiente, F_x en función de x.

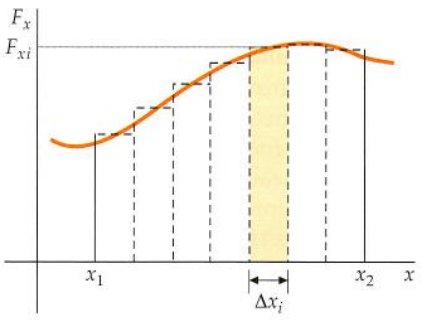


FIGURA 6.9 Una fuerza variable puede aproximarse mediante una serie de fuerzas constantes en intervalos pequeños. El trabajo realizado por una fuerza constante en cada intervalo es el área del rectángulo bajo la curva de esta fuerza. La suma de estas áreas rectangulares es la suma del trabajo realizado por la serie de fuerzas constantes, que se aproxima a la fuerza variable. En el límite de Δx_i infinitesimalmente pequeño, la suma de las áreas de los rectángulos es igual al área comprendida bajo la curva completa.

Ejemplo 6.4 Trabajo realizado por una fuerza variable

Una fuerza $\vec{F} = F_x\hat{i}$ varía en función de x, como se indica en la figura 6.10. Determinar el trabajo realizado por la fuerza cuando actúa sobre una partícula que se mueve de $x = 0$ a $x = 6$ m.

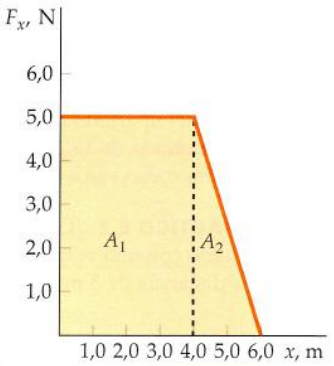


FIGURA 6.10

PLANTEAMIENTO El trabajo es el área bajo la curva desde $x = 0$ m a $x = 6$ m. Como la curva consta de segmentos rectilíneos, lo más fácil es separar el área en dos partes, una sería el rectángulo de área A_1 y la otra el triángulo de área A_2, y luego utilizar la fórmulas geométricas para encontrar el trabajo. (Otra forma alternativa es realizar las integrales, como en el ejemplo 6.5.)

SOLUCIÓN

1. El trabajo se determina calculando al área bajo la curva F_x en función de x: $W = A_{\text{total}}$
2. Esta área es la suma de las dos áreas indicadas. El área de un triángulo se calcula multiplicando la base por la mitad de la altura:
$$W = A_{\text{total}} = A_1 + A_2$$
$$= (5{,}0\text{ N})(4{,}0\text{ m}) + \tfrac{1}{2}(5{,}0\text{ N})(2{,}0\text{ m})$$
$$= 20\text{ J} + 5{,}0\text{ J} = \boxed{25\text{ J}}$$

COMPROBACIÓN Si la fuerza fuese de 5 N sobre toda la distancia de 6 m, el trabajo sería (5 N)·(6 m) = 30 J. El paso 2 da 25 J, que es ligeramente inferior que 30 J, como era de esperar.

PROBLEMA PRÁCTICO 6.3 La fuerza indicada es la única fuerza que actúa sobre una partícula de masa 3 kg. Si la partícula parte del reposo en $x = 0$, ¿a qué velocidad se mueve cuando alcanza el valor $x = 6$ m?

TRABAJO REALIZADO POR UN MUELLE QUE OBEDECE LA LEY DE HOOKE

La figura 6.11 muestra un bloque conectado a un muelle sobre una superficie horizontal cuyo rozamiento es despreciable. Si el muelle se comprime o estira, el muelle ejerce una fuerza sobre el bloque. Recuérdese que la fuerza ejercida por el muelle sobre el bloque viene dada por la ecuación 4.7, es decir

$$F_x = -kx \qquad \text{(ley de Hooke)} \qquad 6.11$$

Donde k es una constante positiva y x es el alargamiento del muelle. Si el muelle se alarga, entonces x es positivo y la componente F_x es negativa. Si el muelle se comprime, entonces x es negativa y la componente F_x es positiva.

Como la fuerza varía con x, podemos utilizar la ecuación 6.10 para calcular el trabajo realizado por la fuerza del muelle sobre el bloque cuando éste realiza un desplazamiento desde $x = x_i$ hasta $x = x_f$. (Además de la fuerza del muelle hay otras dos fuerzas que actúan sobre el bloque: la fuerza de la gravedad, $m\vec{g}$, y la fuerza normal de la superficie, $\vec{F}_n$. Sin embargo, ninguna de esas dos fuerzas realiza trabajo porque ninguna de ellas tiene componente en la dirección del desplazamiento. La única fuerza que realiza trabajo sobre el bloque es la fuerza del muelle.) Sustituyendo F_x de la ecuación 6.11 en la ecuación 6.10, obtenemos

$$W_{\text{muelle}} = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)dx = -k\int_{x_i}^{x_f} x\,dx = -k\left(\frac{x_f^2}{2} - \frac{x_i^2}{2}\right) \qquad 6.12$$

que reagrupando da:

$$W_{\text{muelle}} = \tfrac{1}{2}kx_i^2 - \tfrac{1}{2}kx_f^2 \qquad 6.13$$

TRABAJO REALIZADO POR UN MUELLE

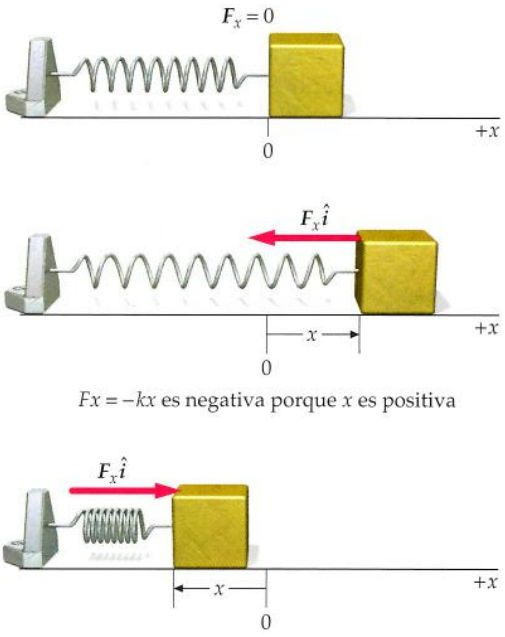


FIGURA 6.11 Muelle horizontal. (*a*) Cuando el muelle no se estira, no ejerce fuerza sobre el bloque. (*b*) Cuando el muelle se estira siendo x positiva, ejerce una fuerza sobre el bloque de módulo kx en la dirección $-x$. (c) Cuando el muelle se contrae siendo x negativa, ejerce una fuerza sobre el bloque de módulo $k|x|$ en la dirección $+x$.

La integral de la ecuación 6.12 se puede calcular utilizando la geometría a fin de calcular el área bajo la curva (figura 6.12*a*). Esto da

$$W_{\text{muelle}} = A_1 + A_2 = |A_1| - |A_2| = \tfrac{1}{2}kx_f^2 - \tfrac{1}{2}kx_i^2$$

que es idéntica a la ecuación 6.13.

PROBLEMA PRÁCTICO 6.4
Utilizando la geometría, calcular el área bajo la curva de la figura 6.12*b* y mostrar que se obtiene la misma expresión que la de la ecuación 6.13.

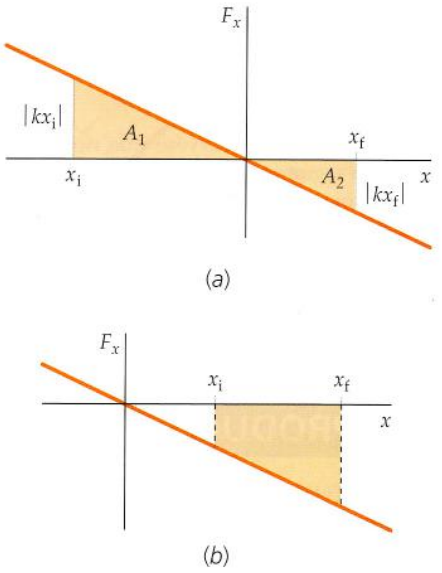


FIGURA 6.12

Supóngase que se tira de un muelle inicialmente en reposo (figura 6.13) estirándolo hasta que alcanza una longitud x_f. ¿Cuánto trabajo hace la fuerza $\vec{F}_{\text{SH}}$ que ejerce la mano? La fuerza de la mano sobre el muelle es kx. (Es igual y opuesta a la fuerza que realiza el muelle sobre la mano.) Conforme x aumenta de 0 a x_f, la fuerza sobre el muelle aumenta linealmente desde 0 a $F_{\text{SHx}} = kx_f$, de forma que tiene un valor medio* de $\frac{1}{2}kx_f$. El trabajo realizado por esta fuerza es igual al producto de este valor medio por x_f. Entonces, el trabajo W realizado por la mano sobre el muelle es

$$W = \tfrac{1}{2}kx_f^2$$

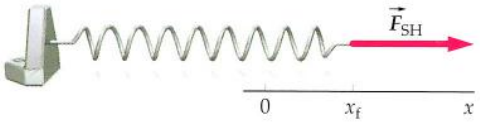


FIGURA 6.13

Ejemplo 6.5 Trabajo de un muelle realizado sobre un bloque

Un bloque de 4 kg apoyado sobre una mesa sin rozamiento está sujeto a un muelle horizontal con $k = 400$ N/m. El muelle está originalmente comprimido con el bloque en la posición $x_1 = -5$ cm (figura 6.14). Calcular (*a*) el trabajo realizado por el muelle cuando el bloque se desplaza desde $x_1 = -5$ cm hasta su posición de equilibrio $x_2 = 0$ y (*b*) la velocidad del bloque en la posición $x_2 = 0$.

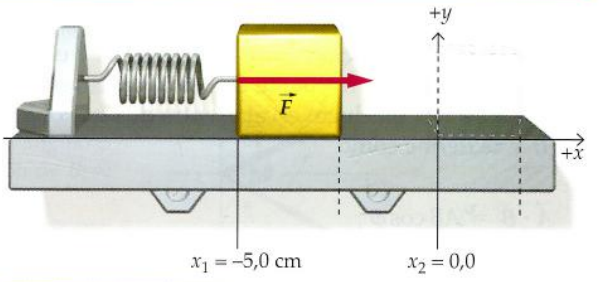


FIGURA 6.14

PLANTEAMIENTO Hacer un gráfico de F_x en función de x. El trabajo realizado sobre el bloque cuando éste se desplaza de x_1 a x_2 es igual al área bajo la curva de F_x en función de x entre estos límites (área sombreada en la figura 6.15), que puede calcularse integrando la fuerza sobre esta distancia. El trabajo realizado es igual a la variación de energía cinética, que coincide con la energía cinética final, ya que el valor inicial de esta magnitud es cero. La velocidad del bloque en el punto $x = 0$ puede calcularse a partir de la energía cinética del bloque.

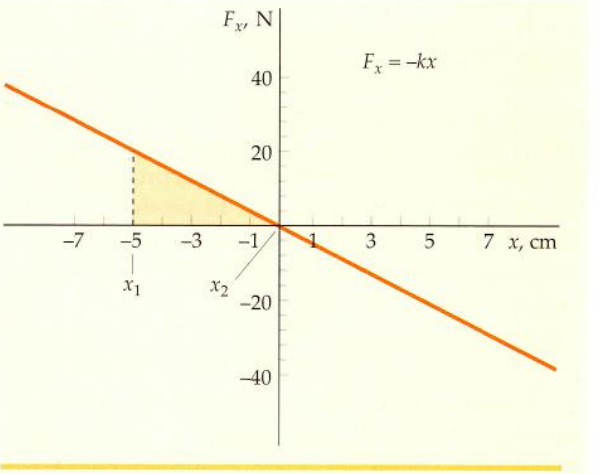


FIGURA 6.15

SOLUCIÓN

(*a*) El trabajo W realizado por el muelle sobre el bloque es la integral de $F_x\,dx$ desde $x_1 = -5$ cm a $x_2 = 0$:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx = \int_{x_1}^{x_2} -kx\,dx = -k\int_{x_1}^{x_2} x\,dx$$
$$= -\tfrac{1}{2}kx^2\Big|_{x_1}^{x_2} = -\tfrac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$
$$= -\tfrac{1}{2}(400\text{ N/m})[(0{,}000\text{ m})^2 - (0{,}050\text{ m})^2]$$
$$= \boxed{0{,}50\text{ J}}$$

(*b*) Aplicando el teorema trabajo-energía cinética y despejando v_2:

$$W_{\text{total}} = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2$$

por lo tanto,

$$v_2^2 = v_1^2 + \frac{2W_{\text{total}}}{m} = 0 + \frac{2(0{,}50\text{ J})}{4{,}0\text{ kg}} = 0{,}25\text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$v_2 = \boxed{0{,}50\text{ m/s}}$$

*Generalmente, valor medio se refiere a un promedio temporal, pero aquí nos referimos a un promedio sobre posiciones.

COMPROBACIÓN El trabajo realizado es positivo. La fuerza y el desplazamiento van en la misma dirección. Como el trabajo es positivo se espera que la velocidad aumente. Los resultados así lo confirman.

OBSERVACIÓN Obsérvese que no puede resolverse determinando la aceleración, aplicando la segunda ley de Newton, y después utilizando las ecuaciones cinemáticas de aceleración constante. La fuerza que el muelle ejerce sobre el bloque, $F_x = -kx$, varía con la posición y, por lo tanto, la aceleración también es variable, con lo que la condición de aceleración constante no se cumple.

PROBLEMA PRÁCTICO 6.5 Determinar la velocidad del bloque cuando alcanza la distancia $x = 3$ cm si parte de $x = 0$ con velocidad $v_x = 0{,}5$ m/s.

6.3 PRODUCTO ESCALAR

El trabajo se basa en la componente de la fuerza que va en la dirección del desplazamiento del cuerpo. Para un movimiento rectilíneo, es fácil calcular la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento. Sin embargo, cuando la trayectoria es curvilínea, la fuerza y el desplazamiento pueden tener cualquier dirección. En ese caso, podemos utilizar la operación conocida como producto escalar, que nos proporcionará la componente de una fuerza dada en la dirección del desplazamiento. El producto escalar consiste en un producto de vectores que da como resultado una magnitud escalar.

Consideremos una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria arbitraria como la que se muestra en la figura 6.16*a*. La componente $F_{\parallel}$ en la figura 6.16*b* está relacionada con el ángulo ϕ entre $\vec{F}$ y $d\ell$ por la expresión $F_{\parallel} = F\cos\phi$, de tal modo que el trabajo realizado por $\vec{F}$ en un desplazamiento $d\ell$ es

$$dW = F_{\parallel} d\ell = F\cos\phi\, d\ell$$

Este tipo de combinación entre dos vectores y el coseno del ángulo comprendido entre ambos es muy frecuente en física y recibe el nombre de **producto escalar** de dos vectores. El producto escalar entre dos vectores cualesquiera $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se escribe $\vec{A}\cdot\vec{B}$ y se define como

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\phi \qquad 6.14$$

DEFINICIÓN: PRODUCTO ESCALAR

donde A y B son los módulos de los vectores y ϕ es el ángulo comprendido entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$. (El ángulo entre dos vectores se define como el ángulo entre sus direcciones en el espacio.)

El producto escalar $\vec{A}\cdot\vec{B}$ puede considerarse como el producto de A y la componente de $\vec{B}$ en la dirección de $\vec{A}$ ($A \times B\cos\phi$), o como el producto de B por la componente de $\vec{A}$ en la dirección de ($B \times A\cos\phi$) (ver figura 6.17). Las propiedades del producto escalar se resumen en la tabla 6.1. El producto escalar también puede escribirse en función de las componentes rectangulares de los dos vectores usando vectores unitarios:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\cdot(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

El producto escalar de un vector unitario por sí mismo, como $\hat{i}\cdot\hat{i}$, es 1 (esto se debe a que $\hat{i}\cdot\hat{i} = |\hat{i}||\hat{i}|\cos(0) = 1 \times 1 \times \cos(0) = 1$) de modo que un término como $A_x\hat{i}\cdot B_x\hat{i} = A_xB_x\hat{i}\cdot\hat{i}$ es igual a $A_x B_x$. Por otro lado, como los vectores $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$ son mutuamente perpendiculares, el producto escalar de

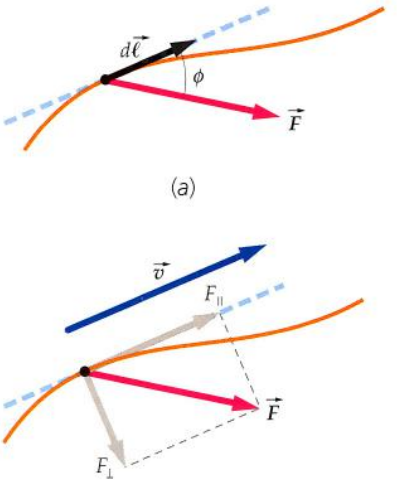


FIGURA 6.16 (*a*) Una partícula se desplaza a lo largo de una curva en el espacio. (*b*) La componente de la fuerza $F_{\perp}$ afecta a la dirección del movimiento, pero no a la velocidad. La componente tangencial $F_{\parallel}$ cambia el módulo de la velocidad, pero no su dirección. $F_{\parallel}$ es igual a la masa m por la aceleración tangencial dv/dt. La componente paralela de la fuerza realiza un trabajo $F_{\parallel}d\ell$ mientras que la componente perpendicular no realiza trabajo.

Tabla 6.1 Propiedades del producto escalar

Si	se cumple
$\vec{A}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares	$\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$ (pues $\phi = 90°$, $\cos\phi = 0$)
$\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos	$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB$ (pues $\phi = 0°$, $\cos\phi = 1$)
$\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$	$\vec{A} = 0$ o $\vec{B} = 0$ o $\vec{A} \perp \vec{B}$
Además	
$\vec{A}\cdot\vec{A} = A^2$	porque $\vec{A}$ es paralelo a sí mismo
$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$	propiedad conmutativa de la multiplicación
$(\vec{A} + \vec{B})\cdot\vec{C} = \vec{A}\cdot\vec{C} + \vec{B}\cdot\vec{C}$	propiedad distributiva de la multiplicación

dos de ellos, como $\hat{i}\cdot\hat{j}$, es cero. (Esto se debe a que $\hat{i}\cdot\hat{j} = |\hat{i}||\hat{j}|\cos(90°) = 1\times 1\times\cos(90°) = 0$.) Por lo tanto, productos como $A_x\hat{i}\cdot B_y\hat{j}$ (llamados términos cruzados) son igual a cero. El resultado es

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \qquad 6.15$$

La componente de un vector a lo largo de un eje puede escribirse como el producto escalar del vector por el vector unitario sobre dicho eje. Por ejemplo, la componente A_x se obtiene del producto

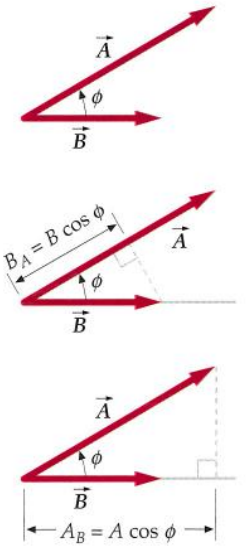
$$\vec{A}\cdot\hat{i} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\cdot\hat{i} = A_x \qquad 6.16$$

Esta relación sugiere un procedimiento algebraico para obtener una ecuación para las componentes, a partir de una ecuación vectorial. Multiplicando la ecuación vectorial $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$ por $\hat{i}$ se obtiene $(\vec{A} + \vec{B})\cdot\hat{i} = \vec{C}\cdot\hat{i}$, que conduce a $A_x + B_x = C_x$.

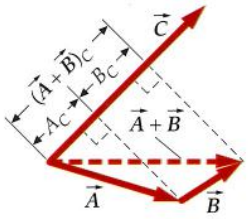
La regla para diferenciar el producto escalar es

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{dt} \qquad 6.17$$

Esta regla es análoga a la regla para diferenciar el producto de dos magnitudes escalares. La regla para diferenciar el producto escalar puede obtenerse diferenciando ambos lados de la ecuación 6.15.



(a)



(b)

FIGURA 6.17 (*a*) El producto escalar $\vec{A}\cdot\vec{B}$ es el producto de A por la proyección de $\vec{B}$ sobre $\vec{A}$ o el producto de B sobre la proyección de $\vec{A}$ sobre $\vec{B}$. Es decir, $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\phi = AB_A = BA_B$. (*b*) $(\vec{A} + \vec{B})\cdot\vec{C} = (\vec{A} + \vec{B})_C C$ (la proyección de $\vec{A} + \vec{B}$ en la dirección de $\vec{C}$ por C). Sin embargo, $(\vec{A} + \vec{B})_C = A_C + B_C$, por lo que $(\vec{A} + \vec{B})\cdot\vec{C} = (A_C + B_C)C = A_CC + B_CC = \vec{A}\cdot\vec{C} + \vec{B}\cdot\vec{C}$. Es decir, en el producto escalar, el producto es distributivo respecto de la suma.

Ejemplo 6.6 Uso del producto escalar

(*a*) Determinar el ángulo formado por los vectores $\vec{A} = (3{,}00\hat{i} + 2{,}00\hat{j})$ m y $\vec{B} = (4{,}00\hat{i} - 3{,}00\hat{j})$ m (figura 6.18). (*b*) Calcular la componente de $\vec{A}$ en la dirección de $\vec{B}$.

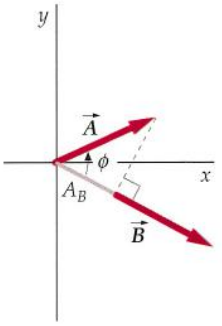


FIGURA 6.18

PLANTEAMIENTO Para el apartado (*a*), calculamos el ángulo a partir de la definición de producto escalar. Como nos dan las componentes de los vectores, calculamos el producto escalar y los valores de los módulos. Luego, utilizamos esos valores para calcular el ángulo ϕ a partir de la definición del producto escalar. La componente de $\vec{A}$ en la dirección de $\vec{B}$ se determina a partir del producto escalar de $\vec{A}\cdot\hat{B}$, donde $\hat{B} = \vec{B}/B$.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Escribir el producto escalar de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en función de A, B y $\cos\phi$, y despejar $\cos\phi$:

$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\phi$, por lo tanto,

$$\cos\phi = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB}$$

2. Determinar $\vec{A}\cdot\vec{B}$ a partir de sus componentes:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y = (3{,}00\text{ m})(4{,}00\text{ m}) + (2{,}00\text{ m})(-3{,}00\text{ m})$$
$$= 12{,}0\text{ m}^2 - 6{,}00\text{ m}^2 = 6{,}0\text{ m}^2$$

3. Los módulos de los vectores se obtienen del producto escalar del vector por sí mismo:

$$\vec{A}\cdot\vec{A} = A^2 = A_x^2 + A_y^2 = (3{,}00\text{ m})^2 + (2{,}00\text{ m})^2 = 13{,}0\text{ m}^2$$

de modo que $A = \sqrt{13{,}0}$ m

y

$$\vec{B}\cdot\vec{B} = B^2 = B_x^2 + B_y^2 = (4{,}00\text{ m})^2 + (-3{,}00\text{ m})^2 = 25{,}0\text{ m}^2$$

por lo tanto, $B = 5{,}00$ m

4. Sustituir estos valores en la ecuación obtenida en el paso 1 para $\cos\phi$ y determinar ϕ:

$$\cos\phi = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB} = \frac{6{,}0\text{ m}^2}{(\sqrt{13}\text{ m})(5{,}00\text{ m})} = 0{,}333$$

$$\phi = \boxed{71°}$$

(*b*) La componente de $\vec{A}$ en la dirección de $\vec{B}$ es el producto escalar de $\vec{A}$ por el vector unitario $\hat{B} = \vec{B}/B$:

$$A_B = \vec{A}\cdot\hat{B} = \vec{A}\cdot\frac{\vec{B}}{B} = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{B} = \frac{6{,}0\text{ m}^2}{5{,}00\text{ m}} = \boxed{1{,}2\text{ m}}$$

COMPROBACIÓN La componente de $\vec{A}$ en la dirección de $\vec{B}$ es $A\cos\phi = (\sqrt{13}\text{ m})\cos 71° = 1{,}2\text{ m}$. Este resultado verifica el resultado del apartado (*b*).

PROBLEMA PRÁCTICO 6.6 (*a*) Determinar $\vec{A}\cdot\vec{B}$ para $\vec{A} = (3{,}0\hat{i} + 4{,}0\hat{j})\text{m}$ y $\vec{B} = (2{,}0\hat{i} + 8{,}0\hat{j})\text{m}$. (*b*) Determinar A, B y el ángulo formado entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ para estos dos vectores.

TRABAJO EN LA NOTACIÓN DEL PRODUCTO ESCALAR

En la notación del producto escalar, el trabajo dW realizado por una fuerza $\vec{F}$ sobre una partícula que experimenta un desplazamiento $d\vec{\ell}$ es

$$dW = F_{\|}d\ell = F\cos\phi\, d\ell = \vec{F}\cdot d\vec{\ell} \qquad 6.18$$

TRABAJO INFINITESIMAL

donde $d\ell$ es el módulo de $d\vec{\ell}$ y $F_{\|}$ es la componente de $\vec{F}$ en la dirección de $d\vec{\ell}$. El trabajo realizado sobre la partícula cuando se desplaza del punto 1 al 2 es

$$W = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{\ell} \qquad 6.19$$

DEFINICIÓN DE TRABAJO

(Si la fuerza se mantiene constante, el trabajo puede expresarse como $W = \vec{F}\cdot\vec{\ell}$, donde $\vec{\ell}$ es el desplazamiento neto.) En el capítulo 3, vimos que el desplazamiento se expresaba como $\Delta\vec{r} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j}$; $\vec{\ell}$ y $\Delta\vec{r}$ son diferentes símbolos para la misma magnitud.)

Cuando varias fuerzas $\vec{F}_i$ actúan sobre una partícula cuyo desplazamiento es $d\vec{\ell}$, el trabajo total es

$$dW_{\text{total}} = \vec{F}_1\cdot d\vec{\ell} + \vec{F}_2\cdot d\vec{\ell} + \cdots = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots)\cdot d\vec{\ell} = (\Sigma\vec{F}_i)\cdot d\vec{\ell} \qquad 6.20$$

Ejemplo 6.7 Caja que hacemos subir por una pendiente

Se empuja una caja por la pendiente de una rampa con una fuerza horizontal $\vec{F}$ de 100 N. Por cada 5 m que se recorre, la caja sube 3 m. Calcular el trabajo realizado por $\vec{F}$ cada 5 m de recorrido de la caja por la rampa (a) calculando directamente el producto escalar a partir de las componentes de $\vec{F}$ y del desplazamiento $\vec{\ell}$, (*b*) multiplicando el producto de los módulos de $\vec{F}$ y de $\vec{\ell}$ por el coseno del ángulo que forman sus direcciones, (*c*) calculando $F_{\|}$ (la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento) y multiplicándola por el módulo del desplazamiento, y (*d*) determinando la componente del desplazamiento en la dirección de la fuerza y multiplicándola por el módulo de la fuerza.

PLANTEAMIENTO Dibujar un esquema de la caja en su posición inicial y final. Utilizar un sistema de coordenadas con el eje x horizontal. Expresar los vectores fuerza y desplazamiento en sus componentes y efectuar el producto escalar. Determinar la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento y viceversa.

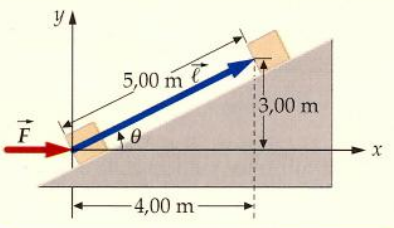


FIGURA 6.19

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Hacer un dibujo de la situación (figura 6.19).

2. Expresar $\vec{F}$ y $\vec{\ell}$ mediante sus componentes y realizar el producto escalar:

$$\vec{F} = (100\hat{i} + 0\hat{j})\text{N}$$
$$\vec{\ell} = (4{,}00\hat{i} + 3{,}00\hat{j})\text{m}$$
$$W = \vec{F}\cdot\vec{\ell} = F_x\Delta x + F_y\Delta y = (100\text{ N})(4{,}00\text{ m}) + 0(3{,}00\text{ m})$$
$$= \boxed{4{,}00\times 10^2\text{ J}}$$

(*b*) Calcular $F\ell\cos\phi$, donde ϕ es el ángulo entre los dos vectores. Igualar esta expresión con el resultado del apartado (*a*) y determinar $\cos\phi$; al final, calcular el trabajo:

$$\vec{F}\cdot\vec{\ell} = F\ell\cos\phi \quad \text{y} \quad \vec{F}\cdot\vec{\ell} = F_x\Delta x + F_y\Delta y$$

por lo tanto

$$\cos\phi = \frac{F_x\Delta x + F_y\Delta y}{F\ell} = \frac{(100\text{ N})(4{,}00\text{ m}) + 0}{(100\text{ N})(5{,}00\text{ m})} = 0{,}800$$

y

$$W = F\ell\cos\phi = (100\text{ N})(5{,}00\text{ m})0{,}800 = \boxed{4{,}00\times10^2\text{ J}}$$

(*c*) Determinar $F_{\|}$ y multiplicarlo por ℓ:

$$F_{\|} = F\cos\phi = (100\text{ N})0{,}800 = 80{,}0\text{ N}$$

$$W = F_{\|}\ell = (80{,}0\text{ N})(5{,}00\text{ m}) = \boxed{4{,}00\times10^2\text{ J}}$$

(*d*) Multiplicar F y $\ell_{\|}$, donde $\ell_{\|}$ es la componente de $\vec{\ell}$ en la dirección de $\vec{F}$:

$$\ell_{\|} = \ell\cos\phi = (5{,}00\text{ m})0{,}800 = 4{,}00\text{ m}$$

$$W = F\ell_{\|} = (100\text{ N})(4{,}00\text{ m}) = \boxed{4{,}00\times10^2\text{ J}}$$

COMPROBACIÓN Los cuatro métodos de cálculo dan el mismo resultado para el trabajo.

OBSERVACIÓN En este problema, es más fácil calcular el trabajo usando el procedimiento del apartado (*a*). En otros casos, puede resultar conveniente utilizar cualquiera de los otros métodos explicados en este problema. Conviene familiarizarse con cualquiera de estos procedimientos para poder usar el que más convenga en función del problema que se pretenda resolver.

Ejemplo 6.8 Desplazamiento de una partícula

Inténtelo usted mismo

Una partícula experimenta un desplazamiento $\vec{\ell} = (2{,}00\hat{i} - 5{,}00\hat{j})$ m. Durante el desplazamiento, una fuerza constante $\vec{F} = (3{,}00\hat{i} + 4{,}00\hat{j})$ N actúa sobre la partícula. Determinar (*a*) el trabajo realizado por la fuerza y (*b*) la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento.

PLANTEAMIENTO El trabajo W se determina calculando $W = \vec{F}\cdot\vec{\ell} = F_x\Delta x + F_y\Delta y$. Combinándolo con la relación $\vec{F}\cdot\vec{\ell} = F_{\|}\ell$, podemos determinar la componente de $\vec{F}$ en la dirección del desplazamiento.

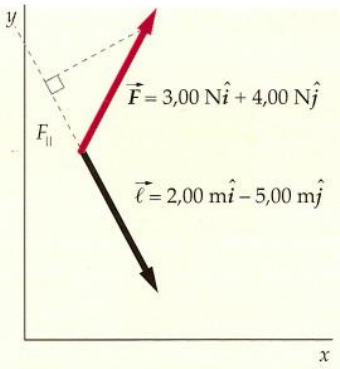


FIGURA 6.20

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	Respuestas
(*a*) 1. Hacer un esquema que muestre $\vec{F}$, $\vec{\ell}$ y $F_{\|}$ (figura 6.20).	
2. Calcular el trabajo realizado W.	$W = \vec{F}\cdot\vec{\ell} = \boxed{-14{,}0\text{ J}}$
(*b*) 1. Calcular $\vec{\ell}\cdot\vec{\ell}$ y utilizar el resultado para determinar la distancia ℓ.	$\vec{\ell}\cdot\vec{\ell} = 29{,}0\text{ m}^2$, por tanto, $\ell = \sqrt{29{,}0}\text{ m}$
2. Usando $\vec{F}\cdot\vec{\ell} = F_{\|}\ell$, calcular $F_{\|}$.	$F_{\|} = \vec{F}\cdot\vec{\ell}/\ell = \boxed{-2{,}60\text{ N}}$

COMPROBACIÓN A partir de la figura 6.20 se observa como el ángulo entre $\vec{F}$ y $\vec{\ell}$ está entre 90° y 180°; por tanto, uno espera que $F_{\|}$ y el trabajo sean negativos.

OBSERVACIÓN En ningún momento se dice que el movimiento se realiza a lo largo de un camino concreto. Como la fuerza es constante, el trabajo depende del desplazamiento neto $\vec{\ell}$, pero no del camino tomado. El camino bien podría ser una línea recta o una trayectoria curva (figura 6.21) y no cambiaría ninguno de los resultados.

FIGURA 6.21

PROBLEMA PRÁCTICO 6.7 Determinar el módulo de $\vec{F}$ y el ángulo ϕ entre $\vec{F}$ y $\vec{\ell}$.

Ejemplo 6.9 Diferenciación de un producto escalar

Demostrar que $\vec{a} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} d(v^2)/dt$, donde $\vec{a}$ es la aceleración y $\vec{v}$ es el vector velocidad de módulo v.

PLANTEAMIENTO Se utiliza la regla para diferenciar el producto escalar, ya que $v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$.

SOLUCIÓN

Aplicar al producto $\vec{v} \cdot \vec{v}$ la regla para diferenciar productos escalares:

$$\frac{d}{dt}v^2 = \frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = 2\vec{a} \cdot \vec{v}$$

por lo tanto, $\vec{a} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}v^2$

COMPROBACIÓN La velocidad v tiene dimensiones de longitud sobre tiempo, por tanto, dv^2/dt tiene dimensiones de longitud al cuadrado sobre tiempo al cubo. La aceleración $\vec{a}$ tiene dimensiones de longitud sobre tiempo al cuadrado, por tanto, $\vec{a} \cdot \vec{v}$ tiene dimensiones de longitud al cuadrado sobre tiempo al cubo. Entonces, ambos lados $\vec{a} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} d(v^2)/dt$ tienen las mismas unidades (longitud al cuadrado sobre tiempo al cubo).

OBSERVACIÓN Este ejemplo atañe únicamente a parámetros cinemáticos, por lo que la relación resultante es estrictamente cinemática. Asimismo, el resultado es válido siempre, ya que sólo se ha utilizado la definición de aceleración y el cálculo de la derivada de un producto.

En el ejemplo 6.9 hemos obtenido la relación cinemática

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}v^2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right) \qquad 6.21$$

En la sección 6.4, esta ecuación se utiliza para deducir el teorema trabajo-energía cinética para partículas que se mueven a lo largo de trayectorias curvas bajo la influencia de fuerzas no necesariamente constantes.

POTENCIA

En la definición de trabajo no se dice nada acerca del tiempo que se tarda en realizar el trabajo. Por ejemplo, si se empuja una caja cuesta arriba a velocidad constante, se hace el mismo trabajo sobre la caja independientemente de lo que se tarde en desplazar la caja. En física, el ritmo al cual una fuerza realiza un trabajo se denomina potencia P. Como el trabajo es una medida de la energía transferida por una fuerza, la potencia es el ritmo al que se transmite la energía.

Consideremos una partícula con velocidad instantánea $\vec{v}$. En un intervalo corto de tiempo dt, la partícula se desplaza $d\vec{\ell} = \vec{v}\,dt$. El trabajo realizado por una fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre la partícula durante este intervalo de tiempo es

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \vec{F} \cdot \vec{v}\,dt$$

La potencia suministrada por la partícula es

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \qquad 6.22$$

DEFINICIÓN: POTENCIA

Obsérvese la diferencia entre potencia y trabajo. Dos motores que elevan una determinada carga a igual distancia consumen la misma energía, pero el que la levanta en menos tiempo es más potente.

La potencia es una magnitud escalar, al igual que el trabajo y la energía. La unidad del SI de la potencia es un joule por segundo, que se llama **watt** (W):

$$1\,\text{W} = 1\,\text{J/s}$$

En el sistema utilizado habitualmente en los EEUU, la unidad de energía es el pie-libra y la unidad de potencia es el pie-libra por segundo. Un múltiplo muy usado de esta unidad es el caballo de fuerza (hp):

$$1\ \text{hp} = 550\ \text{ft} \cdot \text{lb/s} \approx 746\ \text{W}$$

El producto de la unidad de potencia y la unidad de tiempo es una unidad de energía. Las compañías eléctricas facturan por la energía consumida, no por la potencia, normalmente en kilowatts-hora (kW · h). Un kilowatt -hora de energía es la energía transferida en una hora a un ritmo constante de un kilowatt, o bien

$$1\ \text{kW} \cdot \text{h} = (10^3\ \text{W})(3600\ \text{s}) = 3{,}6 \times 10^6\ \text{W} \cdot \text{s} = 3{,}6\ \text{MJ}$$

Ejemplo 6.10 Potencia de un motor

Un pequeño motor mueve un ascensor que eleva una carga de ladrillos de peso 500 N a una altura de 10 m en 20 s (figura 6.22) a velocidad constante. La plataforma pesa 300 N. ¿Cuál es la potencia mínima que debe suministrar el motor?

PLANTEAMIENTO Como la aceleración es cero, el módulo de la fuerza hacia arriba ejercida por el motor es igual al peso de los ladrillos más la plataforma, 800 N. La potencia transmitida por el motor es la suministrada por $\vec{F}$.

SOLUCIÓN

La potencia viene dada por $\vec{F} \cdot \vec{v}$:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv\cos\phi = Fv\cos(0) = Fv$$
$$= (800\ \text{N})\frac{10\ \text{m}}{20\ \text{s}} = \boxed{4{,}0 \times 10^2\ \text{W}}$$

COMPROBACIÓN El trabajo realizado por la fuerza es (800 N)(10 m) = 8000 J. Este trabajo realizado en 20 s nos da un trabajo de 400 W.

OBSERVACIÓN (1) El ascensor podría comunicar una aceleración sobre los ladrillos y la plataforma. Por ejemplo, si los ladrillos y la plataforma parten del reposo se acelerarían hasta alcanzar la velocidad constante. En ese caso, la potencia resultante sería mayor que 400 W. Sin embargo, al llegar al final del trayecto se tendría que desacelerar para acabar en reposo. En ese caso, la potencia resultante sería inferior a 400 W. El valor medio de la potencia suministrada por el motor sería de 400 W. (2) Esta potencia mínima resultante de 400 W es algo superior a medio caballo de vapor.

PROBLEMA PRÁCTICO 6.8 Calcular la potencia media suministrada por el motor necesaria para elevar los ladrillos y la plataforma una altura de 10 m en 40 s. ¿Cuál sería el trabajo realizado por el motor? ¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza de la gravedad?

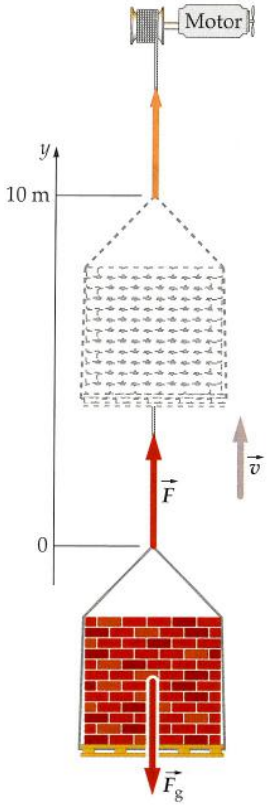


FIGURA 6.22

Ejemplo 6.11 Potencia y energía cinética

Demostrar que la potencia transmitida sobre una partícula por la fuerza neta que actúa sobre ella es igual a la tasa de cambio de la energía cinética de la partícula.

PLANTEAMIENTO La potencia transmitida por la fuerza neta viene dada por $\vec{F}_{\text{neta}} \cdot \vec{v}$. Demostrar que $\vec{F}_{\text{neta}} \cdot \vec{v} = dK/dt$, donde $K = \frac{1}{2}mv^2$.

SOLUCIÓN

1. Sustituir en $\vec{F}_{\text{neta}}$ aplicando la segunda ley de Newton: $\vec{F}_{\text{neta}} \cdot \vec{v} = m\vec{a} \cdot \vec{v}$
2. El producto $\vec{a} \cdot \vec{v}$ está relacionado con la derivada de v^2 respecto al tiempo (ecuación 6.21): $\frac{d}{dt}v^2 = \frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = 2\vec{a} \cdot \vec{v}$

3. Introducir el resultado del paso 2 en el resultado del paso 1: $\vec{F}_{\text{neta}} \cdot \vec{v} = m\vec{a} \cdot \vec{v} = m\frac{1}{2}\frac{d}{dt}v^2$
4. La masa m es constante, por lo que conjuntamente con el $\frac{1}{2}$ puede introducirse dentro de la derivada: $\vec{F}_{\text{neta}} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$
5. La función que se deriva es precisamente la energía cinética: $\boxed{P_{\text{neta}} = \vec{F}_{\text{neta}} \cdot \vec{v} = \frac{dK}{dt}}$

COMPROBACIÓN El joule es la unidad de energía, por tanto, dK/dt tiene unidades de joules por segundo o watts. El watt es la unidad de potencia, por tanto, el resultado es dimensionalmente consistente.

Del ejemplo 6.11 se ha visto que

$$P_{\text{neta}} = \vec{F}_{\text{neta}} \cdot \vec{v} = \frac{dK}{dt} \qquad 6.23$$

que relaciona la potencia proporcionada por la fuerza neta con el ritmo con el que cambia la energía cinética de un cuerpo cualquiera que pueda ser descrito mediante una partícula.

6.4 TEOREMA TRABAJO-ENERGÍA CINÉTICA. TRAYECTORIAS CURVILÍNEAS

El teorema trabajo-energía cinética a lo largo de una curva arbitraria puede establecerse integrando los dos términos de $\vec{F}_{\text{neta}} \cdot \vec{v} = dK/dt$ (ecuación 6.23) con respecto del tiempo. Esto nos conduce a

$$\int_1^2 \vec{F}_{\text{neta}} \cdot \vec{v}\, dt = \int_1^2 \frac{dK}{dt} dt \qquad 6.24$$

Como $d\vec{\ell} = \vec{v}\, dt$, donde $d\vec{\ell}$ es el desplazamiento durante el tiempo dt, y teniendo en cuenta, además, que $(dK/dt)dt = dK$, la ecuación 6.24 puede expresarse

$$\int_1^2 \vec{F}_{\text{neta}} \cdot d\vec{\ell} = \int_1^2 dK$$

donde la integral de la izquierda es el trabajo total W_{total} realizado sobre la partícula. La integral de la derecha es sencilla, y así se obtiene

$$\int_1^2 \vec{F}_{\text{neta}} \cdot d\vec{\ell} = K_2 - K_1 \quad (\text{o } W_{\text{total}} = \Delta K) \qquad 6.25$$

ECUACIÓN TRABAJO-ENERGÍA CINÉTICA EN TRES DIMENSIONES

La ecuación 6.25 se obtiene directamente de la segunda ley de Newton del movimiento.

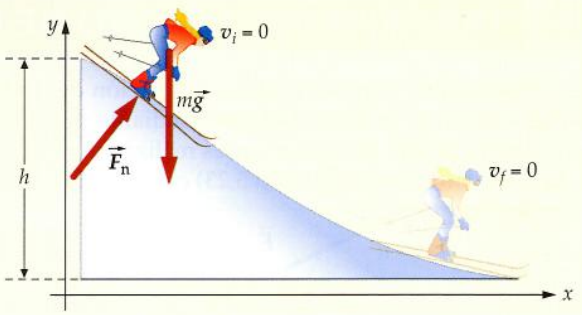
Ejemplo 6.12 Trabajo realizado sobre una esquiadora

Póngalo en su contexto

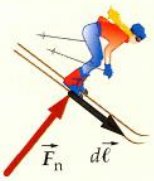
Dos esquiadoras visitan una estación de esquí que tiene dos pistas, una para principiantes y otra para expertos. Ambas pistas comienzan en la parte alta de un telearrastre y acaban en el punto donde comienza el telearrastre. Sea h la distancia vertical entre el comienzo y el final de ambas pistas. Naturalmente, la pista para principiantes es más larga y con pendientes menos pronunciadas que la pista para esquiadores expertos. Las dos esquiadoras, una de las cuales es mucho mejor esquiadora que la otra, están probando unos esquís experimentales que no tienen rozamiento. Para hacer las cosas más interesantes, la menos experta apuesta con su amiga que si una va por la pista para expertos y la otra por la de principiantes, ambas llegaran al final común de las dos pistas a la misma velocidad. La experta acepta la apuesta (olvidándose que su amiga está siguiendo un curso de física) con la condición de que ambas comiencen desde el reposo en el mismo punto en la parte alta del telearrastre y que bajen toda la pista sin frenar. ¿Quién gana la apuesta, suponiendo que la resistencia con el aire es despreciable?

(PhotoDisc/Getty.)

PLANTEAMIENTO Dado que las dos amigas se deslizan con los esquís, pueden considerarse como dos partículas. Sobre cada una de las esquiadoras actúan dos fuerzas, la gravedad $m\vec{g}$ y la fuerza normal $\vec{F}_n$. (El teorema trabajo-energía cinética sólo funciona para partículas.)



(a)



(b)

FIGURA 6.23

SOLUCIÓN

1. Hacer un esquema de las fuerzas que actúan sobre una cualquiera de las esquiadoras dibujando los dos vectores e incluyendo los ejes de coordenadas (figura 6.23*a*). El teorema trabajo-energía cinética, con $v_i = 0$, relaciona la velocidad final v_f con el trabajo total:

2. La velocidad final está relacionada con la energía cinética final, que a su vez está relacionada con el trabajo total por el teorema trabajo-energía cinética: $W_{total} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$

3. Para cada esquiadora, el trabajo total es el trabajo realizado por la fuerza normal más el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria: $W_{total} = W_n + W_g$

4. La fuerza $m\vec{g}$ sobre las esquiadoras es constante, pero la fuerza normal $\vec{F}_n$ no lo es. Calcular primero el trabajo realizado por $\vec{F}_n$. Así, calcular el trabajo dW_n realizado sobre una de las esquiadoras por $\vec{F}_n$ para un desplazamiento infinitesimal $d\vec{\ell}$ (figura 6.23*b*) en una posición arbitraria a lo largo del descenso: $dW_n = \vec{F}_n \cdot d\vec{\ell} = F_n \cos\phi \, d\ell$

5. Determinar el ángulo ϕ entre las direcciones de $\vec{F}_n$ y $d\vec{\ell}$. El desplazamiento $d\vec{\ell}$ es paralelo a la pendiente: $\phi = 90°$

6. Calcular el trabajo realizado por $\vec{F}_n$ durante todo el descenso: $W_n = \int F_n \cos 90° \, d\ell = \int (0) d\ell = 0$

7. La fuerza de la gravedad es constante; por lo tanto, el trabajo realizado por la gravedad es $W_g = \vec{F}_g \cdot \vec{\ell}$, donde $\vec{\ell}$ es el desplazamiento neto desde el inicio de la pista al final (figura 6.24): $W_g = m\vec{g} \cdot \vec{\ell} = -mg\,\hat{j} \cdot (\Delta x\,\hat{i} + \Delta y\,\hat{j}) = -mg\,\Delta y$

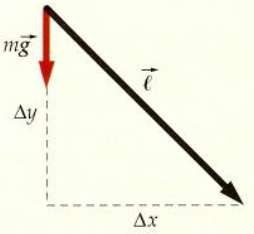


FIGURA 6.24

8. Las esquiadoras descienden por la pendiente, por lo que Δy es negativo. De la figura 6.23*a*, vemos que $\Delta y = -h$: $\Delta y = -h$

9. Sustituyendo, se obtiene: $W_g = mgh$

10. Aplicar el teorema trabajo-energía cinética para determinar v_f: $W_n + W_g = \Delta K$

11. La velocidad final depende sólo de h, que es la misma para los dos descensos. Ambas esquiadoras tendrán la misma velocidad final. $0 + mgh = \frac{1}{2}mv_f^2 - 0$ por lo tanto, $v_f = \sqrt{2gh}$

La esquiadora menos experta ha ganado la apuesta, ya que ambas han llegado a la misma velocidad.

COMPROBACIÓN La fuerza que genera el movimiento es la fuerza de la gravedad. Esta fuerza es proporcional a la masa, como también lo será el trabajo realizado. Como la energía cinética es proporcional a la masa, la masa se anula en la ecuación del teorema del trabajo-energía cinética. Así, es de esperar que la velocidad final sea independiente de la masa.

OBSERVACIÓN La esquiadora más experta invertirá un tiempo menor en llegar a la línea de llegada, pero la apuesta no era ésta. Lo que se ha demostrado en este ejercicio es que el trabajo realizado por la fuerza de la gravedad es igual a mgh. No depende de la forma de la colina ni del camino tomado. Depende únicamente de la diferencia de altura entre el punto de salida y el de llegada.

* 6.5 TRABAJO DEL CENTRO DE MASAS

A continuación, vamos a analizar la relación del trabajo-energía cinética para sistemas que no se pueden describir mediante una sola partícula. (Una partícula es un sistema tal que todas sus partes realizan el mismo desplazamiento.) En el capítulo 5, se determinó (ecuación 5.23) que para un sistema de partículas

$$\vec{F}_{\text{neta ext}} = \sum \vec{F}_{i\,\text{ext}} = M\vec{a}_{\text{cm}} \qquad 6.26$$

donde $M = \Sigma m_i$ es la masa del sistema y $\vec{a}_{\text{cm}}$ es la aceleración del centro de masas. La ecuación 6-26 puede ser integrada a fin de obtener una ecuación útil que relacione el trabajo y la energía cinética y que pueda ser aplicada a sistemas que se pueden describir como partículas. En primer lugar, multiplicaremos ambos lados de la ecuación 6.26 bajo producto escalar por $\vec{v}_{\text{cm}}$ para obtener

$$\vec{F}_{\text{neta ext}} \cdot \vec{v}_{\text{cm}} = M\vec{a}_{\text{cm}} \cdot \vec{v}_{\text{cm}} = \frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2\right) = \frac{dK_{\text{tras}}}{dt} \qquad 6.27$$

donde $K_{\text{tras}} = \frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2$, denominada **energía cinética de traslación**, es la energía cinética asociada al movimiento del centro de masas. Multiplicando ambos lados de la ecuación 6.27 por dt e integrando, se obtiene

$$\int_1^2 \vec{F}_{\text{neta ext}} \cdot d\vec{\ell}_{\text{cm}} = \Delta K_{\text{tras}} \qquad 6.28$$

RELACIÓN TRABAJO DEL CENTRO DE MASAS-ENERGÍA CINÉTICA

donde $d\vec{\ell}_{\text{cm}} = \vec{v}_{\text{cm}}dt$. La integral de la ecuación 6.28 se denomina **trabajo del centro de masas*** realizado por la fuerza neta sobre el sistema de partículas. La ecuación 6.28 es la **relación entre el trabajo del centro de masas y la energía cinética**. Expresado en palabras: "El trabajo del centro de masas realizado por una fuerza neta externa sobre un sistema de partículas es igual al cambio de la energía cinética de traslación del sistema." Aunque la ecuación 6.28 se parece mucho a la ecuación del teorema trabajo-energía cinética (ecuación 6.25) hay algunas diferencias importantes. La relación trabajo del centro de masas-energía cinética de traslación tiene que ver sólo con el desplazamiento y la velocidad del centro de masas del sistema; así, cuando utilizamos esta relación, ignoramos el movimiento de cualquier otra parte del sistema relativo al centro de masas. (El sistema de referencia del centro de masas es un sistema de referencia† que no rota y que se desplaza con el centro de masas.)

Para un sistema que se mueve como una partícula (con todas sus partes moviéndose a la misma velocidad) la relación trabajo del centro de masas-energía cinética se transforma en el teorema trabajo-energía cinética.

A veces es útil hacer referencia al trabajo del centro de masas hecho por una sola fuerza. El trabajo del centro de masas W_{cm} realizado por una fuerza es

$$W_{\text{cm}} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{\ell}_{\text{cm}} \qquad 6.29$$

---

* Al trabajo del centro de masas se le llama también pseudotrabajo.

† Un sistema de referencia que no rota es un sistema que no rota respecto a un sistema de referencia inercial.

Ejemplo 6.13 Dos discos y una cuerda

Dos discos idénticos se encuentran sobre una mesa de aire y conectados por un trozo de cuerda (ver figura 6.25). Los discos, ambos con masa m, están inicialmente en la configuración que muestra la figura. Una fuerza constante de módulo F acelera el sistema hacia la derecha. Pasado el punto P, la fuerza se desplaza una distancia d, los dos discos chocan y se deslizan unidos. ¿Cuál es la velocidad de los discos inmediatamente después de la colisión?

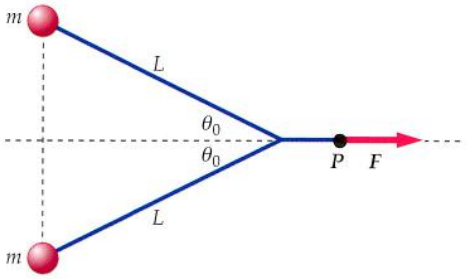


FIGURA 6.25

PLANTEAMIENTO Considere el sistema de los dos discos y la cuerda. Aplique la relación del trabajo del centro de masas-energía cinética. Después de la colisión la velocidad de cada disco es igual a la velocidad del centro de masas. (Los discos se deslizan sobre la mesa sin rozamiento.)

SOLUCIÓN

1. Dibuje el sistema en la situación inicial y después de haber recorrido una distancia d (figura 6.26):

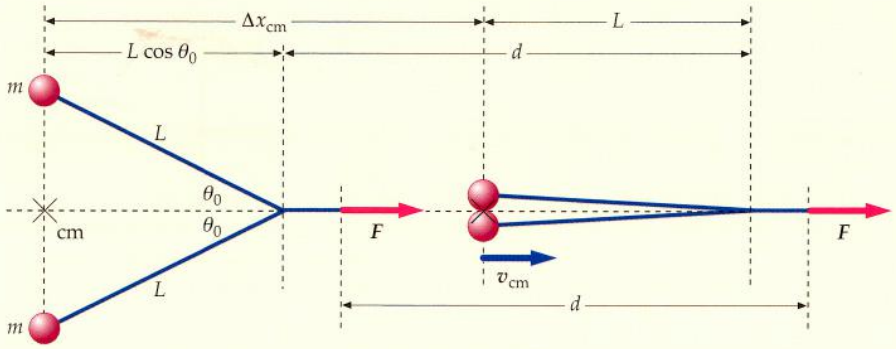


FIGURA 6.26 Como el centro de masas se desplaza una distancia Δx_{cm}, el punto de aplicación de la fuerza se desplaza una distancia d.

2. Aplique la relación del trabajo del centro de masas-energía cinética al sistema. La fuerza neta sobre el sistema es $\vec{F} = F\hat{i}$:

$$\int_i^f \vec{F}_{\text{neta ext}} \cdot d\vec{\ell}_{cm} = \Delta K_{\text{tras}}$$

$$\int_i^f F\hat{i} \cdot dx_{cm}\hat{i} = K_{\text{tras f}} - K_{\text{tras i}}$$

$$F\int_i^f dx_{cm} = E_{c\,\text{tras f}} - 0$$

$$F\Delta x_{cm} = \tfrac{1}{2}(2m)v_{cm}^2 = mv_{cm}^2$$

3. Determine Δx_{cm} en función de d y L, a partir de la figura 6.26

$$\Delta x_{cm} + L = L\cos\theta_0 + d$$
$$\text{luego,}\quad \Delta x_{cm} = d - L(1 - \cos\theta_0)$$

4. Introduzca el resultado del paso 3 en el resultado del paso 2 y despeje v_{cm}:

$$F\Delta x_{cm} = mv_{cm}^2$$
$$F[d - L(1 - \cos\theta_0)] = mv_{cm}^2$$
$$\text{luego,}\quad v_{cm} = \boxed{\sqrt{\frac{F[d - L(1 - \cos\theta_0)]}{m}}}$$

COMPROBACIÓN Si el ángulo inicial θ_0 es cero, el sistema se puede describir como una sola partícula que cumpliría el teorema trabajo-energía cinética. Esto daría $Fd = \frac{1}{2}(2m)v^2 = mv^2$, o $v = \sqrt{Fd/m}$. El resultado del paso 4 da el mismo resultado si tomamos $\theta_0 = 0$.

OBSERVACIÓN (1) En este ejemplo, el desplazamiento del centro de masas Δx_{cm} es inferior a d, el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza $\vec{F}$. En consecuencia, el trabajo del centro de masas hecho por la fuerza es menor que el trabajo Fd realizado por la fuerza. (2) Los discos pierden energía cinética cuando colisionan y permanecen unidos. Esta energía aparece en otra forma de energía, como, por ejemplo, en forma de energía térmica. La conservación de la energía se estudia en el capítulo 7.

Ejemplo 6.14 Distancia de frenado

El conductor de un coche de 1000 kg que se mueve a 90 km/h sobre una carretera recta horizontal pisa los frenos con la máxima fuerza para evitar un accidente. El sistema ABS no funciona y la ruedas se bloquean completamente, de forma que los neumáticos se deslizan sobre el pavimento hasta que el coche se detiene. El coeficiente de rozamiento cinético entre el pavimento y los neumáticos es 0,8. ¿Qué distancia recorre el coche hasta pararse?

PLANTEAMIENTO El coche no se puede describir como una sola partícula. Los puntos de aplicación de las fuerzas de rozamiento cinéticas son las partes de los neumáticos que están en contacto con el pavimento. Los puntos de contacto entre los neumáticos y el pavimento se pegan y se deslizan de forma alternativa. La relación trabajo del centro de masas-energía cinética de traslación aplicada al coche nos proporcionará la distancia de frenado.

SOLUCIÓN

1. Escribir la relación trabajo del centro de masas-energía cinética de traslación. Necesitamos determinar el desplazamiento del centro de masas:

$$\int_1^2 \vec{F}_{\text{neta ext}} \cdot d\vec{\ell}_{\text{cm}} = \Delta K_{\text{tras}}$$

2. Dibujar el diagrama de fuerzas del coche durante el deslizamiento (figura 6.27):

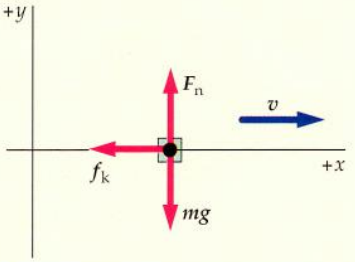


FIGURA 6.27

3. La aceleración vertical es cero, de forma que la fuerza normal y la gravitacional suman cero. La fuerza neta sobre el coche es igual a la fuerza de rozamiento. Calculamos la fuerza neta sobre el coche:

$$\vec{F}_{\text{neta}} = \vec{F}_n + m\vec{g} + \vec{f}_c = \vec{f}_c$$

luego

$$F_{\text{neta}} = f_c = \mu_c F_n = \mu_c mg$$

$$\vec{F}_{\text{neta}} = -\mu_c mg\,\hat{i}$$

4. Aplicamos la relación trabajo del centro de masas-energía cinética de traslación al coche:

$$\int_1^2 \vec{F}_{\text{neta}} \cdot d\vec{\ell}_{\text{cm}} = \Delta K_{\text{tras}}$$

$$\int_1^2 -\mu_e mg\hat{i} \cdot dx_{\text{cm}}\hat{i} = K_{\text{tras}2} - K_{\text{tras}1}$$

$$-\mu_e mg \int_1^2 dx_{\text{cm}} = 0 - K_{\text{tras}1}$$

$$-\mu_e mg\,(x_{\text{cm}2} - x_{\text{cm}1}) = -\tfrac{1}{2}mv_{\text{cm}1}^2$$

5. Despejamos el desplazamiento del coche, pero primero pasamos la velocidad de km/h a m/s:

$$v_{\text{cm}1} = 90\ \text{km/h} \cdot \frac{1\ \text{h}}{(3{,}6\ \text{ks})} = 25\ \text{m/s}$$

por tanto

$$\Delta x_{\text{cm}} = x_{\text{cm}2} - x_{\text{cm}1} = \frac{v_{\text{cm}1}^2}{2\mu_c g}$$

$$\Delta x_{\text{cm}} = \frac{(25\ \text{m/s})^2}{2 \cdot (0{,}80)(9{,}81\ \text{m/s}^2)} = \boxed{40\ \text{m}}$$

COMPROBACIÓN Era de esperar que cuanto mayor sea la velocidad inicial del coche, mayor sea la distancia de frenado y menor sea cuanto mayor sea el coeficiente de rozamiento. El resultado del paso 5 confirma este razonamiento.

OBSERVACIÓN La energía cinética de traslación del coche se disipa como energía térmica entre los neumáticos y el pavimento. La disipación de la energía cinética en energía térmica por medio del rozamiento cinético se analizará en el capítulo 7.

Montañas rusas, equipajes y trabajo (¡Dios mío!)

Los métodos de transporte de equipajes de los grandes aeropuertos tienen mucho en común con las montañas rusas. Los cambios bruscos de aceleración durante largos periodos de tiempo no son buenas ni para los pasajeros ni para los equipajes. Ambos deben moverse rápidamente, pero sin paradas ni sacudidas.

Algunas vagonetas de las montañas rusas (y algunos transportadores de equipaje) ganan energía cinética a causa del trabajo realizado sobre ellas por fuerzas constantes generadas por series de **motores de inducción lineal** (LIM). Un LIM es un mecanismo electromagnético que genera una fuerza sin piezas en movimiento.[1] La razón principal para el uso de los LIM es su flexibilidad para aplicar fuerza en determinados puntos durante el movimiento de las vagonetas de las montañas rusas o las carretillas de los equipajes. Estas vagonetas y carretillas circulan por unos raíles que utilizan sensores que determinan su velocidad y las comunican a los controladores de los motores. Los LIM dejan de funcionar cuando el vehículo adquiere la velocidad deseada. En ambos casos, los LIM pueden actuar como frenos, ejerciendo fuerzas en la dirección contraria al movimiento.

Speed—The Ride es una montaña rusa lanzada desde el Café Nascar en el Hotel y Casino Sahara de las Vegas. La empresa que la diseñó, Ingenieurbuero Stengel GmbH, colocó 88 motores en tres puntos a lo largo de los raíles. La primera serie de motores lanza el tren. El tren de 6 vagonetas y 24 pasajeros se acelera suavemente a 72 km/h en 2 segundos. Pasa por una curva y desciende rápidamente hasta unos 8 m bajo tierra antes de subir y entrar en un doble rizo.[2] Después de pasar por el doble rizo, las fuerzas ejercidas por la segunda serie de LIM cuadruplican la energía cinética del tren en 2 segundos.[3] A continuación, pasa a través del Las Vegas Boulevard y recorre unos 60 m en dirección casi vertical. Por razones de seguridad, hay una serie de LIM en la cima, que pueden actuar como frenos si fuese necesario. El tren viaja de nuevo, pero en sentido inverso, a través de toda la montaña rusa. Cuando regresa a la estación, los LIM actúan como freno hasta detener el tren.

Sobre los trenes de las montañas rusas actúan otras fuerzas, además de las fuerzas de los LIM, como la gravedad, el rozamiento o la fuerza normal. Cada una de las vagonetas del tren recorre el mismo camino, pero los puntos inicial y final no son los mismos. La aceleración máxima de cada pasajero es $3{,}5g$. Esta aceleración no es exageradamente grande —la aceleración instantánea producida por un almohadillazo sobre la cabeza puede ser superior a $20g$.[4]

El aeropuerto internacional de Heathrow suele transportar equipaje entre las terminales 1 y 4. Las terminales están separadas más de 1 km y están conectadas por un tren. Cada equipaje se coloca en pequeñas carretillas que se mueven sobre los raíles. (La velocidades de las carretillas están controladas por LIM montados en los raíles.) Las carretillas bajan hasta llegar a 20 m bajo tierra. Viajan por un túnel a 30 km/h, velocidad mantenida por LIM distribuidos a lo largo de los raíles. Al final de túnel, las carretillas suben hasta la planta apropiada de la otra terminal. Cuando cambie de vuelo en un gran aeropuerto, recuerde que el equipaje también se desplaza con su propio vehículo.

Las velocidades de las carretillas que transportan los equipajes entre las terminales del aeropuerto Internacional de Heathrow están controladas por LIM.
(Vanderlande Industries.)

[1] "Whoa! Linear motors blast Vegas coaster straight up." *Machine Design*, May 4, 2000. Vol. 28; "Sectors" EI-WHS http://www.eiwhs.co.uk/sectors.asp Abril 2006; "Baggage Handling Case Study." Force Engineering http://www.force.co.uk/bagcase.htm, Abril 2006; "Leisure Rides." Force Engineering, http://www.force.co.uk/leishome.htm April 2006.

[2] "Roller coaster constructor Werner Stengel receives honorary doctorate at Göteborg University." Göteborg University Faculty of Science. http://www2.science.gu.se/english/werner_stengel.shtml Abril 2006.

[3] "Speed Facts." Sahara Hotel and Casino, http://www.saharavegas.com/thrills/facts.html Abril 2006.

[4] Exponent Failure Analysis Associates. *Investigation of Amusement Park and Roller Coaster Injury Likelihood and Severity:* 48. http://www.emerson-associates.com/safety/articles/ExponentReport.pdf Abril 2006.

Resumen

1. Trabajo, energía cinética y potencia son magnitudes dinámicas derivadas importantes.
2. El teorema del trabajo-energía cinética es una relación importante deducida de las leyes de Newton aplicadas a una partícula. (En este contexto, una partícula es un objeto perfectamente rígido que se mueve sin rotar.)
3. El producto escalar de dos vectores es una definición matemática útil en todos los campos de la física.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
1. Trabajo	$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_1^2 F_{\parallel} d\ell$ (definición)	
Fuerza constante	$W = \vec{F} \cdot \vec{\ell} = F_{\parallel}\ell = F\ell_{\parallel} = F\ell\cos\theta$	
Movimiento en una dimensión—Fuerza constante	$W = F_x \Delta x = F\lvert\Delta x\rvert\cos\theta$	
Movimiento en una dimensión—Fuerza variable	$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx$ = área bajo la curva de F_x en función de x	
2. Energía cinética	$K = \frac{1}{2}mv^2$ (definición)	
3. Teorema del trabajo-energía cinética	$W_{\text{total}} = \Delta E_c = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$	
4. Producto escalar	$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\phi$ (definición)	
En función de las componentes	$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$	
Componente del vector	$\vec{A} \cdot \hat{i} = A_x$	
Derivada	$\frac{d}{dt}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt}$	
5. Potencia	$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$	
6. Relación trabajo del centro de masas-energía cinética de traslación	$\int_1^2 \vec{F}_{\text{net a ext}} \cdot d\vec{\ell}_{\text{cm}} = \Delta K_{\text{tras}}$ Esta relación es útil para resolver problemas de sistemas que no se pueden modelar como una sola partícula	6.2
Trabajo del centro de masas	$W_{\text{cm}} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{\ell}_{\text{cm}}$	6.3
Energía cinética de traslación	$K_{\text{tras}} = \frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2$, donde $M = \Sigma m_i$	

Respuestas a las comprobaciones conceptuales

6.1 El trabajo realizado por la fuerza es negativo.

Respuestas a los problemas prácticos

6.1 34 J

6.2 $1{,}7 \times 10^2$ N

6.3 4,1 m/s

6.4 La región de interés está por debajo del eje x; por tanto, el "área bajo la curva" es negativa. El "área bajo la curva" es $-(|A_1| - |A_2|)$, donde A_1 y A_2 se muestran en la figura 6.28. El trabajo realizado por el muelle es

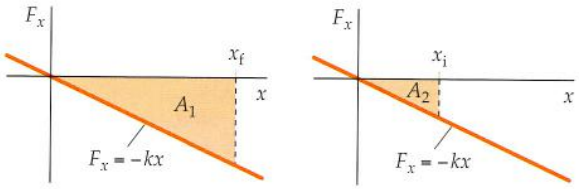


FIGURA 6.28

igual al "área bajo la curva" y el área de un triángulo es una mitad de la base por la altura. Entonces,

$$W_{\text{muelle}} = -(|A_1| - |A_2|) = -(\tfrac{1}{2} \cdot kx_f \cdot x_f - \tfrac{1}{2} \cdot kx_i \cdot x_i) = \boxed{\tfrac{1}{2}kx_i^2 - \tfrac{1}{2}kx_f^2}$$

que es idéntico a la ecuación 6.13.

6.5 0,40 m/s

6.6 (*a*) 38 m², (*b*) A = 5,0 m, B = 8,2 m, $\phi = 23°$

6.7 F = 5,00 N, $\phi = 121°$

6.8 $P = 2{,}0 \times 10^2$ W, $W = 8{,}0 \times 10^3$ J, $W = -8{,}0 \times 10^3$ J

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben aportarse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

En los datos numéricos sin coma decimal se deben considerar significativos todos los dígitos, incluidos los ceros a la derecha del último diferente de cero.

Usar en todos los problemas $g = 9{,}81$ m/s² para la aceleración de la gravedad y despreciar, a menos que se indique lo contrario, el rozamiento y la resistencia del aire.

- • Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil
- •• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
- ••• Desafiante, para alumnos avanzados
- SSM La solución se encuentra en el *Manual de soluciones*

Los problemas consecutivos que están sombreados son problemas relacionados.

PROBLEMAS CONCEPTUALES

1 • Verdadero o falso: (*a*) Si el trabajo total realizado sobre una partícula no es cero, entonces el módulo de su velocidad debe cambiar. (*b*) Si el trabajo total realizado sobre una partícula no es cero, entonces el vector velocidad debe cambiar. (*c*) Si el trabajo total realizado sobre una partícula no era cero, entonces la dirección del movimiento no podía haber cambiado. (*d*) Las fuerzas que actúan sobre una partícula no realizan trabajo si la partícula se mantiene en reposo. (*e*) Una fuerza que en todo momento es perpendicular a la velocidad de una partícula no realiza trabajo sobre ésta.

2 • Se tiene que empujar una caja pesada en línea recta sobre una mesa horizontal y rugosa. La caja parte del reposo y acaba en reposo. Describa el trabajo realizado sobre la caja incluyendo el signo de cada una de las fuerzas que actúan sobre ella y el trabajo total realizado sobre la misma.

3 • Una persona montada en una noria se mueve en un círculo a velocidad constante. Verdadero o falso: durante una fracción de vuelta (*a*) ninguna de las fuerzas que actúan sobre la persona realizan trabajo, (*b*) el trabajo total realizado por todas las fuerzas es cero, (*c*) la fuerza resultante sobre la persona es cero, (*d*) la persona se acelera.

4 • ¿En qué factor se modifica la energía cinética de un automóvil al duplicar su velocidad y reducir su masa a la mitad?

5 • Dar un ejemplo de una partícula que tenga energía cinética constante pero se acelere. ¿Puede cambiar su energía cinética una partícula que no se acelere? En caso afirmativo, dar un ejemplo.

6 • Inicialmente un objeto posee la energía cinética K. El mismo objeto se mueve después en dirección opuesta y a una velocidad triple de la inicial. ¿Cuál es ahora su energía cinética? (*a*) K, (*b*) 3 K, (*c*) – 3 K, (*d*) 9 K, (*e*) – 9 K.

7 • ¿Qué trabajo se necesita para alargar un muelle 2 cm a partir de su posición natural en comparación con el necesario para alargarlo 1 cm, también desde su posición natural? SSM

8 • Un muelle se estira 2 cm respecto de su posición de equilibrio. Si se estira 2 cm más respecto a la posición anterior, ¿cómo es el trabajo necesario para el segundo estiramiento en comparación con el primero? Dar el cociente del segundo sobre el primero.

9 • La dimensión de potencia es (*a*) $M \cdot L^2 \cdot T^2$, (*b*) $M \cdot L^2/T$, (*c*) $M \cdot L^2/T^2$, (*d*) $M \cdot L^2/T^3$.

10 • Demostrar que en el SI de unidades la constante de fuerza de un muelle se expresa en kg/s².

11 • Verdadero o falso: (*a*) La fuerza gravitacional no puede realizar trabajo sobre un objeto porque no es una fuerza de contacto. (*b*) El rozamiento estático no puede realizar trabajo sobre un objeto. (*c*) Cuando se arranca un electrón, la fuerza que ejerce el núcleo realiza un trabajo positivo. (*d*) Si una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria circular, el trabajo realizado sobre ella es necesariamente cero.

12 •• Un disco de hockey tiene un velocidad inicial en la dirección $+x$ sobre una capa de hielo horizontal. Dibuje cualitativamente la fuerza frente a la posición para el caso de una fuerza horizontal constante que actuara sobre el disco hasta detenerlo. Suponga que el disco se halla en el punto $x = 0$ cuando la fuerza empieza a actuar. Muestre que el signo del área bajo la curva coincide con el signo del cambio de la energía cinética e interprete esto en términos del teorema del trabajo-energía cinética.

13 •• Verdadero o falso: (*a*) El producto escalar no puede tener unidades. (*b*) Si el producto escalar de dos vectores no nulos es cero, entonces éstos son paralelos. (*c*) Si el producto escalar de dos vectores no nulos es igual al producto de sus módulos, entonces los dos vectores son paralelos. (*d*) Cuando un objeto se desliza sobre un plano inclinado, el signo del producto escalar de la fuerza gravitatoria que actúa sobre él y su desplazamiento es negativo. SSM

14 •• (*a*) ¿El producto escalar de dos vectores unitarios paralelos debe ser siempre cero? En caso negativo, dar un ejemplo. (*b*) En

un determinado instante, la velocidad de un objeto es $\vec{v}$. Interpretar $\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$ físicamente. (*c*) Una pelota rueda sobre una mesa horizontal. ¿Cuál es el producto escalar entre la velocidad y la aceleración en el preciso instante en que la pelota cae de la mesa? Explíquelo. (*d*) En el apartado (*c*), ¿cuál es el signo del producto escalar de la velocidad y la aceleración en el instante anterior al impacto con el suelo?

15 •• Una persona levanta un paquete verticalmente una distancia L en un tiempo Δt. La persona levanta un segundo paquete con el doble de masa que el anterior, la misma altura y suministrando la misma potencia. ¿Cuánto tiempo tardó en levantar el segundo paquete? (Dar la respuesta en función de Δt.)

16 •• Hay láseres que emiten señales con más de 1 GW de potencia. Una central eléctrica moderna genera una potencia eléctrica de 1 GW. ¿Significa esto que un láser produce una enorme cantidad de energía? Explíquelo. *Ayuda: esos láseres de alta potencia emiten de manera intermitente, de manera que la potencia no se emite durante periodos de tiempo muy grandes.*

17 •• Una persona conduce un coche que acelera horizontalmente partiendo del reposo sin que sus ruedas roten. Utilizar la relación trabajo del centro de masas-energía cinética de traslación y el diagrama de fuerzas para explicar qué fuerzas (o fuerza) son responsables del aumento de energía cinética de traslación de la persona y el coche. *Ayuda: la relación hace referencia sólo a las fuerzas externas, de forma que el motor no es la solución. Elija su sistema adecuadamente en cada caso.* SSM

ESTIMACIONES Y APROXIMACIONES

18 •• Calcular (*a*) el trabajo realizado por la gravedad sobre una persona que sube a un ascensor que le lleva desde la planta baja hasta el último piso del Empire State de Nueva York (102 pisos), (*b*) el trabajo realizado por la fuerza normal que ejerce el ascensor sobre la persona. *Ayuda: la respuesta no es cero*, y (*c*) la potencia media ejercida por la gravedad.

19 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Sin contar el Sol, las estrellas más cercanas están a años luz de la Tierra. Aun así, si queremos enviar naves espaciales para investigar las estrellas, deberán viajar a velocidades que sean una fracción apreciable de la velocidad de la luz. (*a*) Calcular la energía cinética de una nave de 10 000 kg que viaje a un 10% de la velocidad de la luz en un año. ¿Cuál es la cantidad mínima de energía requerida? Cuando una velocidad se aproxima a la velocidad de la luz, la teoría de la relatividad nos dice que la fórmula de la energía cinética $\frac{1}{2}mv^2$ no es válida, aunque, sin embargo, la corrección en este caso es de un 1% de la velocidad real (0,1*c*). (*b*) Comparar el resultado con la energía consumida durante un año por los Estados Unidos (unos 5×10^{20} J). (*c*) Estimar la potencia media mínima necesaria para el sistema de propulsión.

20 •• La masa de la lanzadera espacial es de unos 8×10^4 kg y el periodo de su órbita es de 90 minutos. Calcular la energía cinética de la lanzadera cuando está en órbita y el trabajo realizado por la fuerza de la gravedad entre el momento del lanzamiento y el instante que alcanza la órbita. (Aunque la fuerza de la gravedad decrece con la altitud, este efecto es pequeño en una órbita cercana a la Tierra. Utilizar este hecho para evitar el cálculo de la integral.) Las órbitas se encuentran a 402 km de la superficie terrestre.

21 • **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Hay que limpiar de nieve el camino de 15 m que conduce al aparcamiento, ya que durante la noche han caído 25 cm de nieve (figura 6.29). Estimar cuánto trabajo hay que realizar sobre la nieve para llevar a cabo este trabajo. Para ello, formular y justificar hipótesis sobre los datos necesarios (por ejemplo, la anchura del camino).

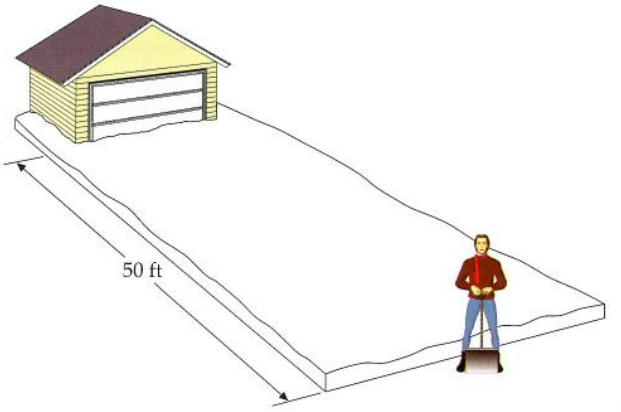


FIGURA 6.29 Problema 21

TRABAJO, ENERGÍA CINÉTICA Y APLICACIONES

22 • Una bala de 15 g posee una velocidad de 1,2 km/s. (*a*) ¿Cuál es su energía cinética en joules? (*b*) Si la velocidad se reduce a la mitad, ¿cuál será su energía cinética? (*c*) ¿Y si la velocidad se duplica?

23 • Determinar la energía cinética en joules de (*a*) una pelota de béisbol de 0,145 kg que lleva una velocidad de 45 m/s y (*b*) un corredor de 60 kg que recorre una milla en 9 minutos a un ritmo constante.

24 • Una masa de 6 kg en reposo se eleva a una altura de 3 m con una fuerza vertical de 80 N. Determinar (*a*) el trabajo realizado por la fuerza, (*b*) el trabajo realizado por la gravedad y (*c*) la energía cinética final de la masa.

25 • Una fuerza constante de 80 N actúa sobre una caja de 5,0 kg de masa que se está moviendo en la dirección de la fuerza aplicada con una velocidad de 20 m/s. Tres segundos después, la caja se mueve con una velocidad de 68 m/s. Determinar el trabajo realizado por esta fuerza.

26 •• Un alumno compite en una carrera con su amiga. Al principio, ambos tienen la misma energía cinética, pero el alumno observa que su amiga le está venciendo. Incrementando su velocidad en un 25%, él corre a la misma velocidad que ella. Si la masa del joven es 85 kg, ¿cuál es la masa de la muchacha?

27 •• Una partícula de 3 kg se desplaza con una velocidad de 2 m/s cuando se encuentra en $x = 0$. Esta partícula se encuentra sometida a una única fuerza F_x que varía con la posición del modo indicado en la figura 6.30. (*a*) ¿Cuál es su energía cinética para $x = 0$? (*b*) ¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza cuando la partícula se desplaza desde $x = 0$ m a $x = 4$ m? (*c*) ¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando se encuentra en $x = 4$ m? SSM

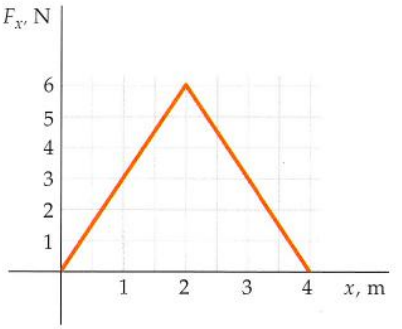


FIGURA 6.30 Problema 27

28 •• Un objeto de 3 kg se mueve en la dirección x con una velocidad de 2,40 m/s. Al pasar por el origen actúa sobre este objeto una única fuerza F_x que varía con x como indica la figura 6.31. (*a*) Hallar el trabajo realizado por la fuerza desde $x = 0$ hasta $x = 2$ m. (*b*) ¿Cuál es la energía cinética del objeto en el punto $x = 2$ m? (*c*) ¿Cuál es la velocidad del objeto en dicho punto? (*d*) Determinar el trabajo realizado sobre el objeto desde $x = 0$ a $x = 4$ m. (*e*) ¿Cuál es la velocidad del objeto para $x = 4$ m?

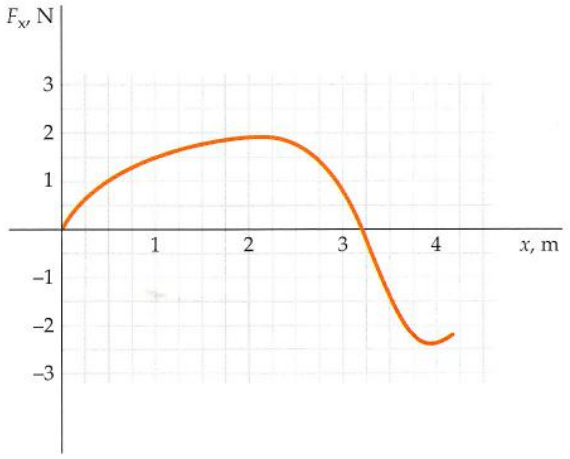


FIGURA 6.31 Problema 28

29 •• Uno de los extremos de un muelle de masa despreciable (constante de fuerza k) se ata al techo, y el otro extremo se engancha a un objeto de masa m. El muelle, inicialmente, está en posición vertical y en su posición de equilibrio. Entonces se deja caer lentamente el objeto sujetándolo con la mano hasta que alcanza una nueva posición de equilibrio a una distancia h por debajo de la de equilibrio. A continuación, se repite el experimento, pero dejamos caer el objeto sin aguantarlo con la mano y observamos que cae una distancia H respecto de la posición de equilibrio antes de detenerse momentáneamente. (*a*) Demostrar que $h = mg/k$. (*b*) Utilizar el teorema del trabajo-energía cinética para demostrar que $H = 2h$. Intente realizar el experimento usted mismo.

30 •• Sobre una partícula de 1,5 kg actúa una fuerza que está relacionada con la posición de la partícula por la fórmula $F_x = Cx^3$, en donde $C = 0{,}5$ si x está dada en metros y F_x en newtons. (*a*) Determinar las unidades de C en el SI. (*b*) Calcular el trabajo realizado por esta fuerza al actuar sobre la partícula que se desplaza desde $x = 3$ m hasta $x = 1{,}5$ m. (*c*) En $x = 3$ m, la fuerza apunta en dirección contraria a la dirección de la velocidad de la partícula (con 12 m/s de módulo). ¿Cuál es su velocidad en $x = 1{,}5$ m? ¿Podría decir la dirección del movimiento en $x = 1{,}5$ m utilizando sólo el teorema del trabajo-energía cinética? Razonar la respuesta.

31 •• En una cabaña de vacaciones hay un depósito de agua a 4 m del suelo que se calienta con la radiación solar. Durante los últimos días del verano, el motor del depósito se estropeó y se tuvo que llenar de agua manualmente. Supongamos que la masa del cubo es de 5 kg y puede llenarse con 15 kg de agua. El cubo tiene un agujero y va perdiendo agua a ritmo constante. El cubo se eleva a velocidad constante y sólo llegan arriba 5 kg de agua. (*a*) Escribir una expresión para la masa del cubo más el agua en función de la altura sobre el suelo. (*b*) Calcular el trabajo realizado por cada 5 kg de agua vertidos al depósito.

32 •• Un bloque de masa 6 kg se desliza 1,5 m hacia abajo por un plano inclinado sin rozamiento. El ángulo del plano inclinado es 60°. (*a*) Dibujar el diagrama de fuerzas que actúan sobre el bloque y calcular el trabajo realizado por cada fuerza cuando el bloque se desliza 1,5 m sobre el plano (medidos a lo largo del plano). (*b*) ¿Cuál es el trabajo total realizado sobre el bloque? (*c*) ¿Cuál es la velocidad del bloque después de recorrer 1,5 m si parte del reposo? (*d*) ¿Y si parte con una velocidad inicial de 2 m/s?

33 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Usted está diseñando una secuencia del descenso de un árbol con la ayuda de una cuerda para la última película de Tarzán. Para determinar la velocidad en el punto más bajo del descenso y asegurarse de que no se sobrepasan los límites de seguridad, usted decide describir el sistema Tarzán + cuerda como un péndulo. Suponga que su modelo está formado por una partícula (Tarzán, 100 kg) que se cuelga de una cuerda (formada por ramas de enredadera) de longitud ℓ enganchada a un soporte. El ángulo entre la vertical y la cuerda es ϕ. (*a*) Dibujar el diagrama de fuerzas que actúan sobre la partícula. (*b*) El arco de longitud infinitesimal recorrido por la partícula es $\ell d\phi$. Escribir una expresión para el trabajo total dW_{total} realizado sobre la partícula cuando recorre ese arco. (*c*) Si $\ell = 7$ m, y la partícula parte de un ángulo de 50°, determinar la energía cinética de la partícula y la velocidad en el punto más bajo de la trayectoria utilizando el teorema del trabajo-energía cinética. SSM

34 •• Para reducir la fuerza que hay que suministrar para realizar determinadas tareas como, por ejemplo, levantar un peso pesado, se utilizan *máquinas simples*. Estas máquinas están formadas por tornillos, sistemas de bloqueo y palancas, pero la más simple de todas es el plano inclinado. En la figura 6.32 puede verse una caja que hay que subir a un camión por una rampa. (*a*) Definimos la *ventaja mecánica* MA del plano inclinado como la razón de la fuerza que habría que realizar para llevar la caja al camión directamente desde el suelo (a velocidad constante) con respecto de la fuerza que hay que realizar para llevarla por la rampa (a velocidad constante). Si el plano inclinado no ejerce rozamiento, demostrar que $MA = 1/\text{sen}\,\theta = L/H$, donde H es la altura de la plataforma del camión y L es la longitud de la rampa. (*b*) Demostrar que el trabajo que se realiza moviendo la caja es el mismo si se levanta el objeto directamente que si se le empuja por la rampa.

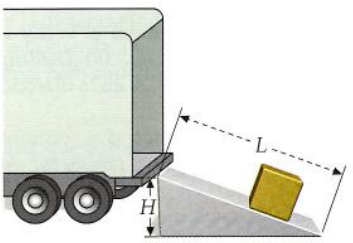


FIGURA 6.32 Problema 34

35 •• Una partícula a tiene una masa m y está localizada inicialmente sobre el eje $+x$ en $x = x_0$, y sometida a una fuerza repulsiva F_x producida por la partícula b. La partícula b está fijada en el origen. La fuerza F_x es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia x entre las partículas. Es decir, $F_x = A/x^2$, donde A es una *constante positiva*. La partícula a parte del reposo y se mueve bajo la influencia de la fuerza. Hallar la expresión del trabajo realizado por la fuerza sobre a en función de x. Determinar la velocidad y la energía cinética de a cuando x tiende a infinito.

36 • Una fuerza de módulo F actúa sobre el extremo libre de la cuerda. (*a*) Si el peso ha de elevarse una distancia h, ¿qué distancia debe recorrer el punto de aplicación de la fuerza? (*b*) ¿Qué trabajo se realiza sobre el peso? (*c*) ¿Qué trabajo realiza el agente? (*d*) ¿Cuál es la ventaja mecánica (definida en el problema 34) del sistema?

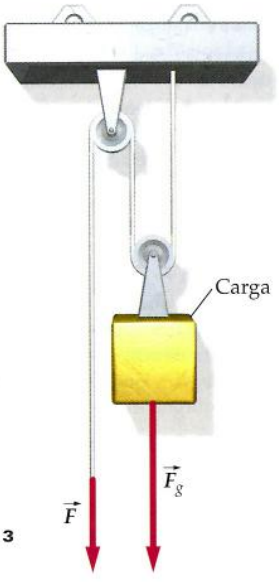


FIGURA 6.33 Problema 36

PRODUCTOS ESCALARES

37 • ¿Qué ángulo forman los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ si $\vec{A} \cdot \vec{B} = -AB$?

38 • Dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen módulos de 6 m y forman un ángulo de 60° entre sí. Determinar el producto $\vec{A} \cdot \vec{B}$.

39 • Determinar $\vec{A} \cdot \vec{B}$ para los siguientes vectores: (*a*) $\vec{A} = 3\hat{i} - 6\hat{j}$, $\vec{B} = -4\hat{i} + 2\hat{j}$; (*b*) $\vec{A} = 5\hat{i} + 5\hat{j}$, $\vec{B} = 2\hat{i} - 4\hat{j}$; y (*c*) $\vec{A} = 6\hat{i} + 4\hat{j}$, $\vec{B} = 4\hat{i} - 6\hat{j}$.

40 • Hallar los ángulos comprendidos entre los vectores dados $\vec{A}$ y $\vec{B}$: (*a*) $\vec{A} = 3\hat{i} - 6\hat{j}$, $\vec{B} = -4\hat{i} + 2\hat{j}$; (*b*) $\vec{A} = 5\hat{i} + 5\hat{j}$, $\vec{B} = 2\hat{i} - 4\hat{j}$; y (*c*) $\vec{A} = 6\hat{i} + 4\hat{j}$, $\vec{B} = 4\hat{i} - 6\hat{j}$.

41 • Un cuerpo de 2 kg experimenta un desplazamiento $\Delta\vec{r} = (3{,}0\text{ m})\hat{i} + (3{,}0\text{ m})\hat{j} + (-2{,}0\text{ m})\hat{k}$. Durante el desplazamiento actúa sobre el cuerpo una fuerza constante $\vec{F} = (2{,}0\text{ N})\hat{i} - (1{,}0\text{ N})\hat{j} + (1{,}0\text{ N})\hat{k}$. (*a*) Determinar el trabajo realizado por $\vec{F}$ en este desplazamiento. (*b*) Hallar la componente de $\vec{F}$ en la dirección y sentido del desplazamiento.

42 •• (*a*) Determinar el vector unitario que es paralelo al vector $\vec{A} = 2{,}0\hat{i} - 1{,}0\hat{j} - 1{,}0\hat{k}$. (*b*) Determinar la componente del vector $\vec{A} = 2{,}0\hat{i} - 1{,}0\hat{j} - 1{,}0\hat{k}$ en la dirección del vector $\vec{B} = 3{,}0\hat{i} + 4{,}0\hat{j}$.

43 •• (*a*) Dados dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, demostrar que si $|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A} - \vec{B}|$, entonces $\vec{A} \perp \vec{B}$. (*b*) Dado un vector $\vec{A} = 4\hat{i} - 3\hat{j}$, encontrar un vector del plano *xy* que sea perpendicular a A y tenga un módulo igual a 10. ¿Es este vector el único que cumple los requisitos especificados? Razonar la respuesta. SSM

44 •• $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son dos vectores unitarios en el plano *xy*. Forman ángulos θ_1 y θ_2 con el eje *x* positivo, respectivamente. (*a*) Determinar las componentes *x* e *y* de los dos vectores. (*b*) Considerando el producto escalar de $\vec{A}$ y $\vec{B}$, demostrar que se cumple $\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2$.

45 •• En el capítulo 8, introduciremos un nuevo vector para las partículas, llamado momento lineal $\vec{p}$. Matemáticamente, está relacionado con la velocidad v y la masa m de la partícula por $\vec{p} = m\vec{v}$. (*a*) Mostrar que la energía cinética de la partícula puede expresarse como $K = \dfrac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{2m}$. (*b*) Calcular el momento lineal de una partícula de 2,5 kg de masa que se mueve a 15 m/s con un ángulo de 25° respecto al eje $+x$ en el plano *xy*. (*c*) Calcular la energía cinética utilizando $K = \dfrac{1}{2}mv^2$ y $K = \dfrac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{2m}$, y verificar que dan el mismo resultado.

46 ••• (*a*) Sea $\vec{A}$ un vector constante con su extremo en el origen de coordenadas. Sea $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ un vector en el plano *xy* que satisface la relación $\vec{A} \cdot \vec{r} = 1$. Demostrar que los puntos (x, y) están alineados. (*b*) Si $\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j}$, determinar la pendiente y la ordenada en el origen de la línea. (*c*) Si ahora $\vec{A}$ y $\vec{r}$ son vectores en el espacio tridimensional, demostrar que la relación $\vec{A} \cdot \vec{r} = 1$ especifica un plano.

47 ••• Cuando una partícula se mueve en un círculo centrado en el origen y con velocidad constante, los módulos de su vector posición y de los vectores velocidad son constantes. (*a*) Derivar respecto al tiempo la expresión $\vec{r} \cdot \vec{r} = r^2 =$ constante para demostrar que $\vec{v} \cdot \vec{r} = 0$, y que, por lo tanto, $\vec{v} \perp \vec{r}$. (*b*) Derivar $\vec{v} \cdot \vec{r} = 0$ respecto al tiempo y demostrar que $\vec{a} \cdot \vec{r} + v^2 = 0$, y que, por lo tanto, $a_r = -v^2/r$. (*c*) Derivar respecto al tiempo la expresión $\vec{v} \cdot \vec{v} = v^2$ para demostrar que $\vec{a} \cdot \hat{v} = dv/dt$, y que, por lo tanto, $a_t = dv/dt$. SSM

TRABAJO Y POTENCIA

48 • La fuerza A realiza un trabajo de 5 J en 10 s. La fuerza B realiza un trabajo de 3 J en 5 s. ¿Cuál de las dos fuerzas suministra mayor potencia?, ¿A o B?

49 • **MÚLTIPLES PASOS** Una fuerza simple de 5 N actúa en la dirección *x* sobre un objeto de 8 kg. (*a*) Si el objeto parte del reposo en la posición $x = 0$ en el tiempo $t = 0$, determinar la velocidad v en función del tiempo t. (*b*) Escribir una expresión para la potencia desarrollada por la fuerza en función del tiempo. (*c*) ¿Cuál es la potencia desarrollada por esta fuerza en el tiempo $t = 3$ s?

50 • Determinar la potencia suministrada por una fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre una partícula que se mueve con una velocidad $\vec{v}$, en los casos: (*a*) $\vec{F} = (4{,}0\text{ N})\hat{i} + (3{,}0\text{ N})\hat{k}$ y $\vec{v} = (6{,}0\text{ m/s})\hat{i}$; (*b*) $\vec{F} = (6{,}0\text{ N})\hat{i} - (5{,}0\text{ N})\hat{j}$ y $\vec{v} = -(5{,}0\text{ m/s})\hat{i} + (4{,}0\text{ m/s})\hat{j}$; y (*c*) $\vec{F} = (3{,}0\text{ N})\hat{i} + (6{,}0\text{ N})\hat{j}$ y $\vec{v} = (2{,}0\text{ m/s})\hat{i} + (3{,}0\text{ m/s})\hat{j}$.

51 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un pequeño ascensor de un restaurante funciona mediante una polea que está conectada a un motor, tal como se muestra en la figura 6.34. El motor sube y baja la caja de 35 kg a una velocidad 0,35 m/s sin acelerarla, excepto un breve instante de tiempo (que podemos despreciar) durante la puesta en marcha del motor. Los motores eléctricos suelen tener un rendimiento del 78%. Calcular la potencia mínima que tendría este motor. Supongamos que las poleas funcionan sin rozamiento. SSM

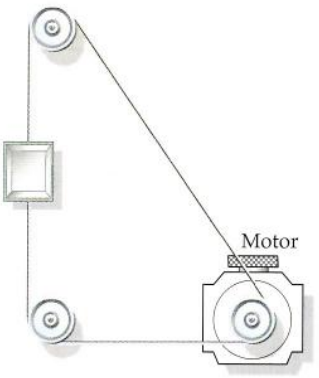


FIGURA 6.34 Problema 51

52 •• Un cañón, colocado en la cima de un acantilado de altura H, dispara directamente hacia arriba en el aire una bala con una velocidad inicial v_0. La bala sube, vuelve a caer, pasa muy cerca del cañón y cae por el acantilado. Si se desprecia la resistencia del aire, calcular para cualquier instante de tiempo la velocidad $\vec{v}$ de la bala, y demostrar explícitamente que la integral de $\vec{F}_{\text{neta}} \cdot \vec{v}$ durante el tiempo que la bala está en el aire es igual al cambio de la energía cinética de la bala.

53 •• Una partícula de masa m se mueve desde el tiempo $t = 0$ partiendo del reposo bajo la influencia de una fuerza constante $\vec{F}$. Demostrar que la potencia suministrada por la fuerza durante un tiempo t es $P = F^2t/m$.

54 •• Una caja de 7,5 kg es elevada por una cuerda de masa despreciable que pasa por la garganta de una polea enganchada al techo. (*a*) Si la caja sube a velocidad constante de 2 m/s, calcular la potencia desarrollada por la persona que sube la caja. (*b*) Si la caja se sube, con aceleración constante, desde el reposo en el suelo hasta una altura de 1,5 m por encima en 0,42 s, ¿cuál es la potencia media realizada por la persona que tira de la cuerda?

*TRABAJO DEL CENTRO DE MASAS Y ENERGÍA CINÉTICA DE TRASLACIÓN DEL CENTRO DE MASAS

55 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO, HOJA DE CÁLCULO** Le piden realizar una prueba a un coche para comparar su rendimiento real con lo que indican las fichas técnicas del fabricante. La potencia del motor es de 164 hp. Este valor es el pico de potencia, lo que significa que es capaz de desarrollar energía a un ritmo máximo de 164 hp sobre las ruedas motrices. Se determina que la masa del coche, incluyendo el equipo y ordenador para realizar el ensayo, es de 1120 kg. (*a*) Cuando va a 88 km/h, el ordenador indica que el motor desarrolla 13,5 hp. A partir de experimentos previos se ha determinado que el coeficiente de rozamiento por rodadura es 0,015.

Suponer que la fuerza de arrastre sobre el coche varía con el cuadrado de su velocidad. Es decir, $F_d = Cv^2$. (*a*) ¿Cuál es el valor de la constante C? (*b*) Considerando el pico de potencia, ¿cuál es la velocidad máxima que podría alcanzar el coche? (El problema se puede resolver analíticamente, pero se podría resolver de forma más rápida y sencilla con ayuda de una **calculadora gráfica** o una **hoja de cálculo**.)

56 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO, CONCEPTUAL** Una persona conduce su coche por una carretera estatal a altas horas de la noche cuando de repente aparece un ciervo en medio de la carretera. Esto sucede justamente cuando pasa de la zona limitada a 88 km/h a la zona limitada a 80 km/h. Cuando pasa por la señal del límite de 80 km/h, la persona acciona bruscamente los frenos produciendo el bloqueo de las ruedas y derrapando hasta detenerse a pocos centímetros del ciervo; todavía respiraba aliviado cuando oyó la sirena de la policía. El agente le sancionó por ir a 90 km/h en la zona limitada a 80 km/h. Gracias a sus conocimientos de física, fue capaz de demostrarle que su velocidad era correcta. Sabiendo que las marcas del derrape miden 25 m y utilizando los datos de la tabla 5.1 para los coeficientes de rozamiento, ¿cómo argumenta su defensa?

PROBLEMAS GENERALES

57 • **APROXIMACIÓN** El mes de febrero de 2002, las plantas nucleares de los Estados Unidos generaron 60 700 millones de kWh. La población de los Estados Unidos era entonces de 287 millones de personas. Si un americano medio tiene una masa de 60 kg y si un 25% de la potencia de las centrales nucleares se invirtiera en proporcionar energía para un ascensor gigante, estimar la altura h a la que el ascensor podría levantar a toda la población americana. En los cálculos suponer que g es constante para cualquier h.

58 • **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Una de las más poderosas grúas del mundo, que funciona en Suiza, es capaz de levantar lentamente una carga de $M = 6000$ ton a una altura de $h = 12{,}0$ m (1 ton = una tonelada, a veces llamada tonelada métrica; es una unidad de masa, no de fuerza, igual a 1000 kg). (*a*) ¿Cuánto trabajo realiza la grúa? (*b*) Determinar la potencia desarrollada por la grúa sabiendo que tiene una eficiencia del 20% y tarda 1,00 min en elevar la carga a velocidad constante a dicha altura.

59 • En Austria existía un telecabina de 5,6 km de longitud. Una cabina tardaba 60 min en recorrer todo el camino hasta el punto más alto. Si hubiera 12 cabinas ascendiendo simultáneamente, cada una con una carga de 550 kg, 12 cabinas descendiendo, y el ángulo de ascenso fuese de 30°, estimar la potencia P de la máquina necesaria para hacer funcionar el telecabina.

60 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Para completar su graduación en física, su tutor le ha diseñado un pequeño acelerador lineal capaz de emitir protones con energía cinética de 10 keV (la masa de un protón es $1{,}67 \times 10^{-27}$ kg). Si 10^9 protones por segundo deben llegar al final del acelerador de 1,5 m de longitud, (*a*) ¿cuál debe ser la potencia media necesaria para emitir los protones? (*b*) ¿Qué fuerza, supuesta constante, actuará sobre cada protón? (*c*) Si los protones parten del reposo, ¿con qué velocidad llegarán al final del acelerador?

61 ••• Las cuatro cuerdas de un violín pasan por encima del puente del instrumento, tal como se muestra en la figura 6.35. El ángulo que las cuerdas forman con la normal al plano del instrumento es de 72° en cada lado. La fuerza normal total que presiona el puente en el violín es de 103 N y la longitud de las cuerdas desde el puente a las clavijas a las que están atadas es de 32,6 cm. (*a*) Determinar la tensión de las cuerdas del violín, suponiendo que es la misma para todas las cuerdas. (*b*) Una de las cuerdas está punteada una distancia de 4 mm, como se muestra en la figura. Dibujar un diagrama que muestre todas las fuerzas que actúan sobre la cuerda en ese punto, y determinar la fuerza que tira de la cuerda para que recupere su posición de equilibrio, suponiendo que la tensión de la cuerda permanece constante. (*c*) Calcular el trabajo realizado sobre la cuerda al puntearla la distancia indicada. Recordar que la fuerza neta que tiende a volver a la cuerda a su posición de equilibrio depende de la posición de la misma, pero supóngase en este caso que es constante.

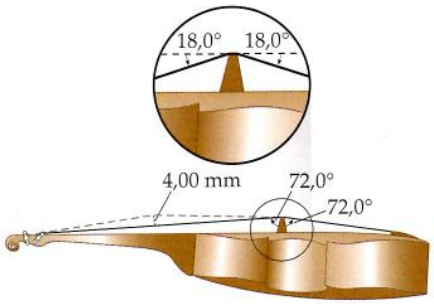


FIGURA 6.35 Problema 61

62 •• El módulo de la fuerza que actúa sobre una partícula de masa m es $F = bx^2$, donde b es constante. La partícula parte del reposo. Después de desplazarse una distancia L, determinar (*a*) su energía cinética y (*b*) su velocidad.

63 •• Una fuerza actúa sobre un carro de masa m de tal modo que la velocidad v del carro (que parte del reposo) se incrementa con la distancia x según la expresión $v = Cx$, donde C es una constante. (*a*) Determinar la fuerza que actúa sobre el carro en función de la posición. (*b*) ¿Qué trabajo realiza la fuerza al moverse el carro de $x = 0$ a $x = x_1$? SSM

64 ••• Una fuerza única $\vec{F} = (2{,}0\ \text{N/m}^2)x^2\hat{\imath}$ se aplica a una partícula que inicialmente está en reposo en el plano xy. Determinar el trabajo realizado por la partícula y su velocidad final cuando se mueve a lo largo de una distancia total de 5 m (*a*) paralelamente al eje y desde el punto (2 m, 2 m) hasta el punto (2 m, 7 m) y (*b*) en línea recta desde (2 m, 2 m) a (5 m, 6 m).

65 •• Una partícula de masa m se mueve a lo largo del eje x. Su posición varía con el tiempo según la ecuación $x = 2t^3 - 4t^2$, donde x se mide en metros y t en segundos. Determinar (*a*) la velocidad y aceleración de la partícula en cualquier instante t, (*b*) la potencia suministrada a la partícula en cualquier instante t, (*c*) el trabajo realizado por la fuerza de $t = 0$ a $t = t_1$.

66 •• Una partícula de 3 kg parte del reposo en $x = 0{,}05$ m y se mueve bajo la influencia de una sola fuerza $F_x = 6 + 4x - 3x^2$, donde F_x se mide en newtons y x en metros. (*a*) Determinar el trabajo realizado por la fuerza cuando la partícula se desplaza de $x = 0{,}05$ m a $x = 3$ m. (*b*) Determinar la potencia suministrada a la partícula cuando se encuentra en $x = 3$ m.

67 •• La energía cinética inicial impartida a una bala de 0,020 kg es de 1200 J. (*a*) Suponiendo que se acelera a lo largo del cañón del rifle de 1 m de longitud, calcular la potencia media desarrollada sobre la bala durante el disparo. (*b*) Despreciando la resistencia del aire, determinar el alcance de este proyectil cuando se dispara bajo un ángulo tal que el alcance es igual a la altura máxima de la trayectoria.

68 •• La figura 6.36 nos muestra la fuerza F_x que actúa sobre una partícula en función de x. (*a*) A partir del gráfico calcular el trabajo realizado por la fuerza cuando la partícula se desplaza desde $x = 0$ a los siguientes valores de x: -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 y 4 m. (*b*) Si parte con

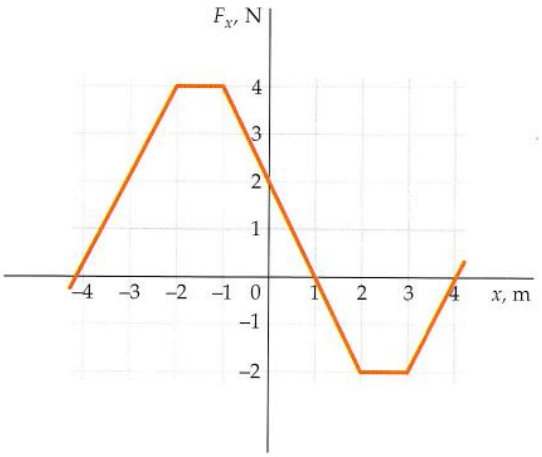


FIGURA 6.36 Problema 68

una velocidad de 2 m/s en la dirección $+x$, ¿a qué distancia se parará si sigue en esa dirección?

69 •• (*a*) Repetir el problema 68(*a*) para la fuerza F_x que se muestra en la figura 6.37. (*b*) Si el objeto parte del origen de coordenadas moviéndose con una energía cinética de 25 J, ¿cuánta energía cinética tendrá en $x = 4$ m?

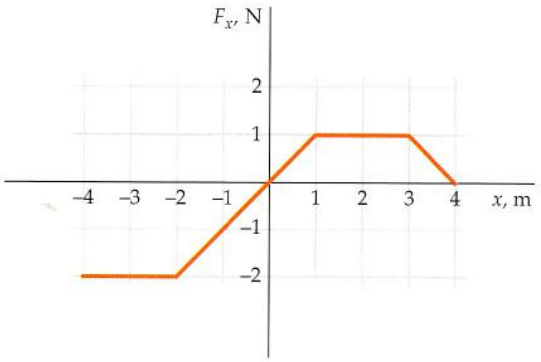


FIGURA 6.37 Problema 69

70 •• Una caja de masa M se encuentra en la parte más baja de un plano inclinado sin rozamiento (figura 6.38). La caja está atada a una cuerda que tira de ella con una tensión constante T. (*a*) Determinar el trabajo realizado por la tensión T cuando la caja se ha desplazado una distancia x a lo largo del plano. (*b*) Calcular la velocidad de la caja en función de x y θ. (*c*) Determinar la potencia desarrollada por la tensión en la cuerda en función de x y θ.

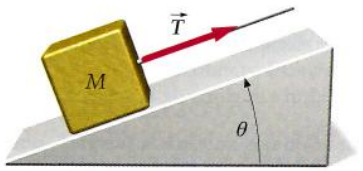


FIGURA 6.38 Problema 70

71 ••• Una fuerza que actúa en un plano xy viene dada por $\vec{F} = (F_0/r)(y\hat{i} - x\hat{j})$, donde F_0 es una constante y r es la distancia de la partícula respecto del origen. (*a*) Demostrar que el módulo de esta fuerza es F_0 y su dirección es perpendicular a $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$. (*b*) Determinar el trabajo realizado por esta fuerza sobre una partícula que se mueve en un círculo de radio 5 m centrado en el origen. ¿Es conservativa esta fuerza? SSM

72 ••• Una fuerza que actúa sobre una partícula de 2 kg en el plano xy viene dada por: $\vec{F} = -(b/r^3)(x\hat{i} + y\hat{j})$, donde b es una constante y r es la distancia de la partícula al origen. (*a*) Demostrar que el módulo de la fuerza varía según el inverso del cuadrado de la distancia al origen, y que su dirección es antiparalela (opuesta) al vector radio $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$. (*b*) Si $b = 3$ N · m^2, hallar el trabajo realizado por esta fuerza sobre una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta entre una posición inicial $x = 2$ m, $y = 0$ m y una posición final $x = 5$ m, $y = 0$ m. (*c*) Determinar el trabajo realizado por esta fuerza sobre una partícula que se mueve por un círculo de radio $r = 7$ m centrado en el origen. (*d*) Si esta fuerza es la única fuerza que actúa sobre la partícula, ¿cuál es la velocidad de la partícula cuando se mueve por el círculo? Suponer que la masa de la partícula es $m = 2$ kg.

73 ••• Un bloque de masa m, unido mediante un pivote a un muelle que está atado al techo, se desliza sobre una mesa horizontal sin rozamiento (figura 6.39). La distancia entre la parte superior del bloque y el techo es y_0, y la posición horizontal es x. Cuando el bloque está en $x = 0$, el muelle, que tiene constante de fuerza k, está completamente en equilibrio. (*a*) ¿Cuál es F_x, la componente x de la fuerza sobre el bloque debida al muelle? (*b*) Demuestre que F_x es proporcional a x^3 para valores suficientemente pequeños de x. (*c*) Si el bloque parte del reposo cuando $x = x_0$, donde $|x_0| << y_0$, ¿cuál es su velocidad cuando pasa por $x = 0$?

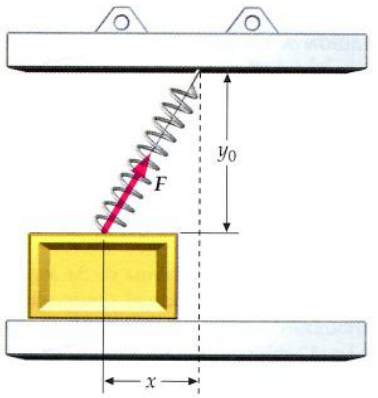


FIGURA 6.39 Problema 73

74 •• Dos caballos tiran de un contenedor, que se arrastra sobre el suelo de un establo a velocidad constante, mediante unos cables de acero de masa despreciable (figura 6.40). El contenedor tiene una masa de 250 kg. Cuando los caballos tiran, los cables están paralelos al suelo. El coeficiente de rozamiento entre el contenedor y el suelo es 0,25. (*a*) ¿Cuál es el trabajo realizado por cada caballo si el contenedor se desplazó 25 m? (*b*) ¿Cuál es la tensión de cada cable si el ángulo entre cada cable y la dirección del movimiento es de 15°?

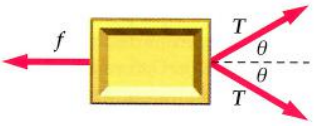


FIGURA 6.40 Problema 74

CAPÍTULO 7

CONFORME LAS VAGONETAS DE LA MONTAÑA RUSA SUBEN Y BAJAN, LA ENERGÍA SE VA TRANSFORMANDO DE UNA FORMA EN OTRA. ESTA MONTAÑA RUSA CONVIERTE LA ENERGÍA ELÉCTRICA COMPRADA A LA EMPRESA SUMINISTRADORA EN ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA DE LOS PASAJEROS Y DE LA VAGONETA. POSTERIORMENTE, LA ENERGÍA POTENCIAL SE TRANSFORMA EN ENERGÍA CINÉTICA Y ENERGÍA TÉRMICA-AUMENTANDO LEVEMENTE LA TEMPERATURA DE LAS VAGONETAS Y SUS ALREDEDORES. *(Michael S. Lewis/Corbis.)*

Conservación de la energía

7.1 Energía potencial
7.2 Conservación de la energía mecánica
7.3 Conservación de la energía
7.4 Masa y energía
7.5 Cuantización de la energía

Cuando un cuerpo realiza trabajo sobre otro, se transfiere energía entre ambos cuerpos. Por ejemplo, cuando tiramos de un trineo, una parte de nuestra energía se transforma en energía cinética del trineo y otra parte en energía térmica que aparece como resultado del rozamiento entre el trineo y la nieve. Al mismo tiempo, la energía química interna de nuestro cuerpo disminuye. El resultado global es la transferencia de la energía química interna de nuestro cuerpo a la energía cinética externa del trineo más la energía térmica del trineo y la nieve. Esta transferencia de energía ilustra uno de los principios más importantes de la ciencia, la ley de conservación de la energía, que establece que la energía total del sistema y sus alrededores no cambia. Cuando cambia la energía de un sistema, en otro lugar aparece o desaparece energía.

En este capítulo, continuamos el estudio de la energía iniciado en el capítulo 6, describiendo y aplicando la ley de conservación de la energía y examinando distintas clases de energía, incluida la energía térmica y la energía potencial. También se analiza que los cambios de la energía en un sistema frecuentemente no son continuos, sino que se dan a "porciones" denominadas cuantos. Aunque en un sistema macroscópico el cuanto de energía es tan pequeño que pasa desapercibido, su presencia tiene consecuencias profundas para los sistemas microscópicos como los átomos y las moléculas.

? El principio de conservación de la energía mecánica, ¿nos permite determinar hasta dónde ha de subir un coche para que cuando baje por la pendiente adquiera suficiente velocidad para realizar una vuelta vertical completa? (Véase el ejemplo 7.8.)

7.1 ENERGÍA POTENCIAL

En el capítulo 6, vimos que el trabajo total realizado sobre una partícula es igual a la variación de su energía cinética. Sin embargo, a menudo una partícula es parte de un sistema que está formado por dos o más partículas y necesitamos examinar el trabajo externo realizado sobre el sistema.* En muchos casos, la energía transferida a dicho sistema a partir del trabajo realizado por las fuerzas externas al *sistema* no incrementa su energía cinética. En lugar de eso, la energía transferida se almacena como **energía potencial**, es decir, energía asociada a los cambios relativos de posición de las diferentes partes del sistema. La configuración del sistema es la forma en que las diferentes partes del sistema se colocan unas respecto a las otras. La energía potencial es una energía asociada a la configuración del sistema, mientras que la energía cinética está asociada al movimiento.

Por ejemplo, considere un martinete cuyo mazo está suspendido una distancia h sobre la estaca. Cuando el mazo cae, gana energía cinética hasta que impacta sobre la estaca, clavándola al suelo. El mazo se eleva de nuevo a su altura inicial para caer de nuevo. Cada vez que el mazo se eleva desde el suelo a su posición más alta, la fuerza de la gravedad realiza un trabajo sobre él dado por $-mgh$, donde m es la masa del mazo. Conforme el mazo se eleva, la fuerza realizada por el motor realiza un trabajo positivo sobre el mazo. Sabemos que ambos trabajos suman cero, pues el mazo puede tratarse como una partícula y el teorema del trabajo-energía cinética (ecuación 6.8) nos dice que el trabajo total realizado sobre el mazo es igual al cambio de su energía cinética, que es cero.

Consideremos el levantamiento de una barra de pesas de masa m a una altura h. La barra empieza y acaba en estado de reposo, de forma que el cambio en la energía cinética de la barra es cero. La barra se puede describir como una partícula durante el ascenso; así, el teorema del trabajo-energía cinética nos dice que el trabajo total realizado sobre la barra es también cero. Hay dos fuerzas que actúan sobre la barra, la fuerza de la gravedad y la fuerza de los brazos del atleta. La fuerza gravitacional sobre la barra es $m\vec{g}$ y el trabajo realizado sobre la barra durante el levantamiento es $-mgh$. Como sabemos que el trabajo total es cero, el trabajo realizado por los brazos del atleta es mgh.

Consideremos ahora la barra y el planeta Tierra (pero no el levantador de las pesas) como un *sistema* de partículas. Las fuerzas externas que actúan sobre el *sistema Tierra-barra* son la atracción gravitatoria que el atleta ejerce *sobre la Tierra*, la fuerza que sus pies ejercen sobre la Tierra y la fuerza mg que sus manos ejercen sobre la barra (figura 7.1). (Puede despreciarse la fuerza gravitatoria que el cuerpo del atleta ejerce sobre la barra.) La barra se mueve uno o dos metros, pero el movimiento de la Tierra es despreciable, de modo que la única fuerza externa ejercida sobre el sistema que realiza trabajo es la fuerza ejercida por el atleta sobre la barra. El trabajo total realizado sobre el sistema Tierra-barra por fuerzas externas al sistema es mgh. Este trabajo se almacena como *energía potencial gravitatoria*, energía asociada a la posición de la barra con respecto a la Tierra (energía asociada con la altura de la barra sobre el suelo).

Un muelle es otro ejemplo de sistema que almacena energía asociada a su configuración. Si se estira o se comprime un muelle, la energía asociada con la longitud del muelle se almacena como *energía potencial elástica*. Consideremos el muelle de la figura 7.2: si se comprime mediante fuerzas iguales y de sentido contrario, $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, estas fuerzas suman cero y la fuerza neta que se ejerce sobre el muelle sigue siendo cero, por lo que no hay ningún cambio en la energía cinética del muelle. La energía transferida asociada con el trabajo que se ejerce sobre el sistema no se almacena como energía cinética sino como energía potencial elástica; la configuración de este sistema ha cambiado, como queda patente por el cambio de la longitud del muelle. El trabajo total realizado sobre el muelle es positivo porque las dos

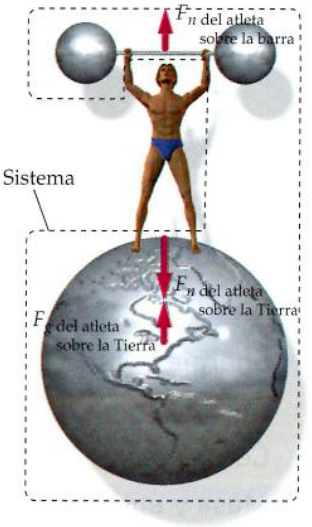


FIGURA 7.1

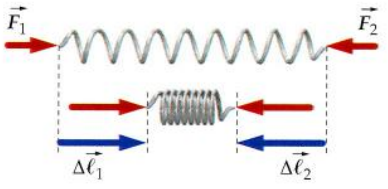


FIGURA 7.2 El muelle es comprimido por las fuerzas externas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$. Las dos fuerzas realizan un trabajo positivo en el muelle comprimiéndolo, por lo que la energía potencial elástica del muelle aumenta.

* Los sistemas de partículas se tratan más ampliamente en el capítulo 8.

fuerzas realizan un trabajo positivo. (El trabajo realizado por $\vec{F}_1$ es positivo porque tanto la fuerza como el desplazamiento de su punto de aplicación $\Delta\vec{\ell}_1$ van en la misma dirección, y lo mismo puede decirse de $\vec{F}_2$ y $\Delta\vec{\ell}_2$.)

FUERZAS CONSERVATIVAS Y NO-CONSERVATIVAS

Cuando un esquiador asciende mediante un telesquí a lo alto de una pista de altura h, el trabajo realizado por la gravedad es $-mgh$, donde m es la masa del esquiador. Cuando el esquiador se desliza desde arriba hasta el punto más bajo de la pista, el trabajo realizado por la gravedad es $+mgh$, independientemente de la forma de la pista (como se ha visto en el ejemplo 6.12). El trabajo total realizado por la gravedad sobre el esquiador en el viaje de ida y vuelta es cero, independientemente de la trayectoria seguida. En una situación tal como esta, donde el trabajo total realizado sobre sobre un cuerpo por una fuerza depende sólo de las posiciones inicial y final del cuerpo y no del camino tomado, la fuerza que realiza el trabajo se denomina **fuerza conservativa**.

> El trabajo realizado por una fuerza conservativa es independiente de la trayectoria seguida por la partícula cuando se mueve de un punto a otro.
>
> DEFINICIÓN: FUERZA CONSERVATIVA

La figura 7.3 nos muestra que esta definición implica lo siguiente:

> Una fuerza es conservativa si el trabajo total que realiza sobre una partícula es cero cuando la partícula recorre cualquier trayectoria cerrada y vuelve a su posición inicial.
>
> DEFINICIÓN ALTERNATIVA: FUERZA CONSERVATIVA

En el ejemplo del telesquí, la fuerza de la gravedad ejercida por la Tierra sobre el esquiador, es una fuerza conservativa, pues el trabajo total realizado por la gravedad sobre el esquiador durante el viaje es cero, con independencia del trayecto realizado. Tanto la fuerza gravitacional sobre un objeto como la fuerza ejercida por un muelle de masa despreciable sobre un cuerpo son conservativas. (Si la masa de un muelle es despreciable, su energía cinética también será despreciable.) Cualquier muelle mencionado en este libro tendrá masa despreciable, a menos que se indique lo contrario.

No todas las fuerzas son conservativas. Se dice que una fuerza es **no-conservativa** si no cumple la definición de fuerza conservativa. Suponga, por ejemplo, que usted empuja un bloque sobre una mesa horizontal en línea recta desde un punto A a un punto B, y después lo empuja desde B hasta A, de forma que el bloque parte y acaba en el mismo punto. El rozamiento se opone al movimiento del bloque, de tal forma que la fuerza que usted realiza sobre el bloque va en la dirección del movimiento del bloque y el trabajo realizado sobre el bloque es positivo tanto en la ida como en la vuelta. El trabajo total realizado al empujar el bloque *no* es cero.

Consideremos la fuerza $\vec{F}$ que ejerce un asno sobre un palo cuando el asno tira de él describiendo una trayectoria circular con una velocidad de módulo constante. Conforme el asno anda, la fuerza $\vec{F}$ continuamente realiza trabajo cuyo valor es positivo. El punto de aplicación P de $\vec{F}$ vuelve a la posición inicial cada vez que el asno completa una vuelta, de forma que el trabajo no es cero cada vez que P vuelve al punto de partida. Por tanto, puede concluirse que $\vec{F}$ no es una fuerza conservativa.

Si el trabajo realizado sobre *cualquier* camino cerrado no es cero, podemos afirmar que la fuerza es no-conservativa. Sin embargo, concluiremos que la fuerza es conservativa sólo si el trabajo es cero sobre *todos* los caminos cerrados. Como hay infinitos caminos cerrados posibles es imposible calcular el trabajo en todos y

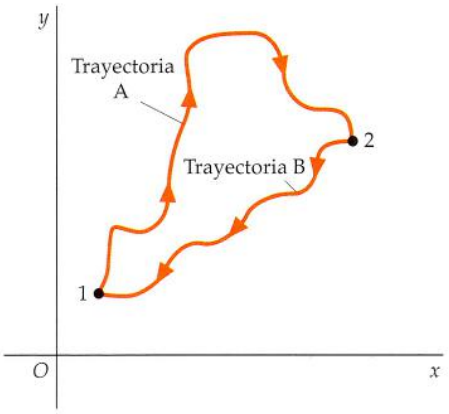


FIGURA 7.3 Dos trayectorias en el espacio conectan los puntos 1 y 2. Si el trabajo realizado por una fuerza conservativa a lo largo de la trayectoria A de 1 a 2 es W, en el recorrido de vuelta a lo largo de la trayectoria B el trabajo debe ser igual a $-W$, ya que el trabajo realizado a lo largo de una trayectoria cerrada que termine en el punto de partida es igual a cero. Cuando se recorre la trayectoria B de 1 a 2, la fuerza es la misma en cada punto, pero el desplazamiento es opuesto al que va de 2 a 1. Por lo tanto, el trabajo realizado a lo largo de la trayectoria B de 1 a 2 es también W. De aquí se deduce que el trabajo realizado sobre una partícula que se desplaza del punto 1 al 2 es el mismo para todas las trayectorias que conectan los dos puntos.

Máquina de bombear agua. El asno ejerce una fuerza $\vec{F}$ sobre el palo en el punto P, el punto de aplicación de la fuerza. *(O. Alamany and E. Vicens/Corbis.)*

cada uno de ellos. En consecuencia, si encontramos un solo camino cerrado sobre el cual el trabajo realizado por una fuerza determinada *no sea cero* será suficiente para deducir que es no-conservativa. En libros más avanzados se pueden encontrar métodos más sofisticados para determinar si una fuerza es conservativa.

Ejemplo 7.1 Integral a lo largo de un camino cerrado

Para calcular el trabajo realizado por una fuerza $\vec{F}$ a lo largo de un camino (C) cerrado, calculamos $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$, donde el círculo sobre el signo integral quiere decir que la integral se determina sobre un camino cerrado. Para $\vec{F} = Ax\hat{i}$, calculamos $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ sobre el camino C mostrado en la figura 7.4.

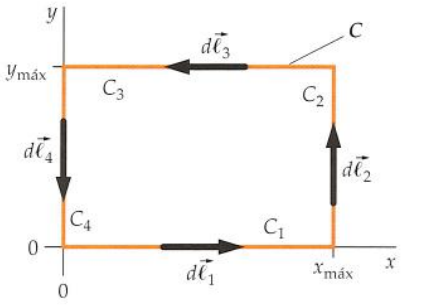


FIGURA 7.4

PLANTEAMIENTO El camino C consiste en cuatro segmentos rectilíneos. Determinar $d\vec{\ell} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$ para cada segmento y calcular $\int \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ separadamente para cada uno de los cuatro segmentos.

SOLUCIÓN

1. La integral a lo largo de C es igual a la suma de las integrales a lo largo de cada uno de los cuatro segmentos que forman C:
$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}_1 + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}_2 + \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}_3 + \int_{C_4} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}_4$$

2. Sobre C_1, $dy = 0$, así $d\vec{\ell}_1 = dx\hat{i}$:
$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}_1 = \int_0^{x_{máx}} Ax\hat{i} \cdot dx\hat{i} = A\int_0^{x_{máx}} x\,dx = \tfrac{1}{2}Ax_{máx}^2$$

3. Sobre C_2, $dx = 0$ y $x = x_{máx}$, así $d\vec{\ell}_2 = dy\hat{j}$ y $\vec{F} = Ax_{máx}\hat{i}$:
$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}_2 = \int_0^{y_{máx}} Ax_{máx}\hat{i} \cdot dy\hat{j} = Ax_{máx}\int_0^{y_{máx}} \hat{i} \cdot \hat{j}\,dy = 0$$
($\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$, pues $\hat{i}$ y $\hat{j}$ son perpendiculares.)

4. Sobre C_3, $dy = 0$, así $d\vec{\ell}_3 = dx\hat{i}$:
$$\int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}_3 = \int_{x_{máx}}^0 Ax\hat{i} \cdot dx\hat{i} = -A\int_0^{x_{máx}} x\,dx = -\tfrac{1}{2}Ax_{máx}^2$$

5. Sobre C_4, $dx = 0$ y $x = 0$, así $d\vec{\ell}_4 = dy\hat{j}$ y $\vec{F} = 0$:
$$\int_{C_4} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}_4 = \int_{y_{máx}}^0 0\hat{i} \cdot dy\hat{j} = 0$$

6. Sumamos los resultados de los pasos 2, 3, 4 y 5:
$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \tfrac{1}{2}Ax_{máx}^2 + 0 - \tfrac{1}{2}Ax_{máx}^2 + 0 = \boxed{0}$$

COMPROBACIÓN La fuerza considerada corresponde a la ley de Hooke (fuerza de un muelle). Por tanto, es conservativa y la integral de esta fuerza a lo largo de cualquier camino cerrado es cero.

OBSERVACIÓN El signo negativo del paso 4 se debe a que se invirtieron los límites de integración.

PROBLEMA PRÁCTICO 7.1 Para $\vec{F} = Bxy\hat{i}$, calcular $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ para el camino C de la figura 7.4.

FUNCIONES DE ENERGÍA POTENCIAL

El trabajo realizado por una fuerza conservativa sobre una partícula no depende de la trayectoria, sólo depende de los puntos extremos. Podemos usar esta propiedad para definir la **función energía-potencial** U, asociada a una fuerza conservativa. Volvamos de nuevo al ejemplo del telesquí. Considere que el esquiador y la Tierra forman un *sistema de dos partículas* (el telesquí no forma parte del sistema). Cuando el telesquí eleva al esquiador, hasta la cima de la pista, realiza un trabajo mgh sobre el sistema esquiador-Tierra. Ese trabajo se almacena en forma

de energía potencial del sistema esquiador-Tierra. Cuando el esquiador desciende, esa energía potencial se convierte en la energía cinética del movimiento del esquiador. Obsérvese que cuando el esquiador se desliza hacia abajo por la pista, el trabajo realizado por la gravedad hace disminuir la energía potencial del sistema. En base a ello, la función energía potencial se puede definir de tal modo que el trabajo realizado por una fuerza conservativa sea igual a la disminución de la función energía-potencial:

$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -\Delta U$$

es decir,

$$\Delta U = U_2 - U_1 = -\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \qquad 7.1a$$

DEFINICIÓN: FUNCIÓN ENERGÍA POTENCIAL

Esta ecuación nos proporciona el cambio de energía potencial debido a un cambio en la configuración del sistema.

Para un desplazamiento infinitesimal, $d\vec{\ell}$, tenemos

$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{\ell} \qquad 7.1b$$

Véase el **Apéndice de matemáticas** *para más información sobre* **Integrales**

Energía potencial gravitatoria Podemos calcular la función energía potencial asociada con la fuerza gravitatoria próxima a la superficie de la Tierra mediante la ecuación 7.1*b*. Para la fuerza $\vec{F} = -mg\hat{j}$, resulta

$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -(-mg\hat{j}) \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}) = +mg\,dy$$

donde hemos utilizado el hecho de que $\hat{j} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0$ y $\hat{j} \cdot \hat{j} = 1$. Integrando, obtenemos

$$U = \int mg\,dy = mgy + U_0$$

$$U = U_0 + mgy \qquad 7.2$$

ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA PRÓXIMA A LA SUPERFICIE DE LA TIERRA

donde U_0, la constante arbitraria de integración, es el valor de la energía potencial para $y = 0$. Como sólo definimos la variación de energía potencial, el valor real de U no es importante. Por ejemplo, si a la energía potencial gravitatoria del sistema Tierra-esquiador se le asigna un valor igual a cero cuando el esquiador está en el fondo de la pista, su valor a la altura h sobre este nivel es mgh. También podemos asignar el valor cero de energía potencial al momento en que el esquiador está en un punto P a medio camino de la pendiente, en cuyo caso su valor en cualquier otro punto sería mgy, donde y es la distancia del esquiador respecto al punto P.

Tenemos libertad para dar a U el valor cero en cualquier punto de referencia.

PROBLEMA PRÁCTICO 7.2

Una muchacha de 55 kg se encuentra en un balcón a 8 m por encima del suelo. ¿Cuál es la energía potencial del sistema muchacha-Tierra si a U (*a*) se le asigna un valor cero en el suelo, (*b*) se le asigna un valor cero a 4 m por encima del suelo, y (*c*) se le asigna un valor cero 10 m por encima del suelo?

cada uno de ellos. En consecuencia, si encontramos un solo camino cerrado sobre el cual el trabajo realizado por una fuerza determinada *no sea cero* será suficiente para deducir que es no-conservativa. En libros más avanzados se pueden encontrar métodos más sofisticados para determinar si una fuerza es conservativa.

Ejemplo 7.1 Integral a lo largo de un camino cerrado

Para calcular el trabajo realizado por una fuerza $\vec{F}$ a lo largo de un camino (C) cerrado, calculamos $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$, donde el círculo sobre el signo integral quiere decir que la integral se determina sobre un camino cerrado. Para $\vec{F} = Ax\hat{i}$, calculamos $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ sobre el camino C mostrado en la figura 7.4.

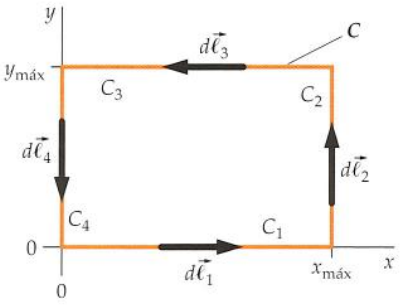


FIGURA 7.4

PLANTEAMIENTO El camino C consiste en cuatro segmentos rectilíneos. Determinar $d\vec{\ell} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$ para cada segmento y calcular $\int \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ separadamente para cada uno de los cuatro segmentos.

SOLUCIÓN

1. La integral a lo largo de C es igual a la suma de las integrales a lo largo de cada uno de los cuatro segmentos que forman C:
$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}_1 + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}_2 + \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}_3 + \int_{C_4} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}_4$$

2. Sobre C_1, $dy = 0$, así $d\vec{\ell}_1 = dx\hat{i}$:
$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}_1 = \int_0^{x_{máx}} Ax\hat{i} \cdot dx\hat{i} = A\int_0^{x_{máx}} x\,dx = \tfrac{1}{2}Ax_{máx}^2$$

3. Sobre C_2, $dx = 0$ y $x = x_{máx}$, así $d\vec{\ell}_2 = dy\hat{j}$ y $\vec{F} = Ax_{máx}\hat{i}$:
$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}_2 = \int_0^{y_{máx}} Ax_{máx}\hat{i} \cdot dy\hat{j} = Ax_{máx}\int_0^{y_{máx}} \hat{i} \cdot \hat{j}\,dy = 0$$
($\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$, pues $\hat{i}$ y $\hat{j}$ son perpendiculares.)

4. Sobre C_3, $dy = 0$, así $d\vec{\ell}_3 = dx\hat{i}$:
$$\int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}_3 = \int_{x_{máx}}^0 Ax\hat{i} \cdot dx\hat{i} = -A\int_0^{x_{máx}} x\,dx = -\tfrac{1}{2}Ax_{máx}^2$$

5. Sobre C_4, $dx = 0$ y $x = 0$, así $d\vec{\ell}_4 = dy\hat{j}$ y $\vec{F} = 0$:
$$\int_{C_4} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}_4 = \int_{y_{máx}}^0 0\hat{i} \cdot dy\hat{j} = 0$$

6. Sumamos los resultados de los pasos 2, 3, 4 y 5:
$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \tfrac{1}{2}Ax_{máx}^2 + 0 - \tfrac{1}{2}Ax_{máx}^2 + 0 = \boxed{0}$$

COMPROBACIÓN La fuerza considerada corresponde a la ley de Hooke (fuerza de un muelle). Por tanto, es conservativa y la integral de esta fuerza a lo largo de cualquier camino cerrado es cero.

OBSERVACIÓN El signo negativo del paso 4 se debe a que se invirtieron los límites de integración.

PROBLEMA PRÁCTICO 7.1 Para $\vec{F} = Bxy\hat{i}$, calcular $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ para el camino C de la figura 7.4.

FUNCIONES DE ENERGÍA POTENCIAL

El trabajo realizado por una fuerza conservativa sobre una partícula no depende de la trayectoria, sólo depende de los puntos extremos. Podemos usar esta propiedad para definir la **función energía-potencial** U, asociada a una fuerza conservativa. Volvamos de nuevo al ejemplo del telesquí. Considere que el esquiador y la Tierra forman un *sistema de dos partículas* (el telesquí no forma parte del sistema). Cuando el telesquí eleva al esquiador, hasta la cima de la pista, realiza un trabajo mgh sobre el sistema esquiador-Tierra. Ese trabajo se almacena en forma

de energía potencial del sistema esquiador-Tierra. Cuando el esquiador desciende, esa energía potencial se convierte en la energía cinética del movimiento del esquiador. Obsérvese que cuando el esquiador se desliza hacia abajo por la pista, el trabajo realizado por la gravedad hace disminuir la energía potencial del sistema. En base a ello, la función energía potencial se puede definir de tal modo que el trabajo realizado por una fuerza conservativa sea igual a la disminución de la función energía-potencial:

$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -\Delta U$$

es decir,

$$\Delta U = U_2 - U_1 = -\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \qquad 7.1a$$

DEFINICIÓN: FUNCIÓN ENERGÍA POTENCIAL

Esta ecuación nos proporciona el cambio de energía potencial debido a un cambio en la configuración del sistema.

Para un desplazamiento infinitesimal, $d\vec{\ell}$, tenemos

$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{\ell} \qquad 7.1b$$

Véase el **Apéndice de matemáticas** *para más información sobre* **Integrales**

Energía potencial gravitatoria Podemos calcular la función energía potencial asociada con la fuerza gravitatoria próxima a la superficie de la Tierra mediante la ecuación 7.1*b*. Para la fuerza $\vec{F} = -mg\hat{j}$, resulta

$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -(-mg\hat{j}) \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}) = +mg\,dy$$

donde hemos utilizado el hecho de que $\hat{j} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0$ y $\hat{j} \cdot \hat{j} = 1$. Integrando, obtenemos

$$U = \int mg\,dy = mgy + U_0$$

$$U = U_0 + mgy \qquad 7.2$$

ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA PRÓXIMA A LA SUPERFICIE DE LA TIERRA

donde U_0, la constante arbitraria de integración, es el valor de la energía potencial para $y = 0$. Como sólo definimos la variación de energía potencial, el valor real de U no es importante. Por ejemplo, si a la energía potencial gravitatoria del sistema Tierra-esquiador se le asigna un valor igual a cero cuando el esquiador está en el fondo de la pista, su valor a la altura h sobre este nivel es mgh. También podemos asignar el valor cero de energía potencial al momento en que el esquiador está en un punto P a medio camino de la pendiente, en cuyo caso su valor en cualquier otro punto sería mgy, donde y es la distancia del esquiador respecto al punto P.

Tenemos libertad para dar a U el valor cero en cualquier punto de referencia.

PROBLEMA PRÁCTICO 7.2

Una muchacha de 55 kg se encuentra en un balcón a 8 m por encima del suelo. ¿Cuál es la energía potencial del sistema muchacha-Tierra si a U (*a*) se le asigna un valor cero en el suelo, (*b*) se le asigna un valor cero a 4 m por encima del suelo, y (*c*) se le asigna un valor cero 10 m por encima del suelo?

Ejemplo 7.2 La botella que cae

Una botella de 0,350 kg de masa cae desde un estante que está 1,75 m por encima del suelo. Determinar la energía potencial del sistema Tierra-botella cuando la botella está en el estante y cuando está a punto de chocar con el suelo. Determinar la energía cinética de la botella justo antes del impacto.

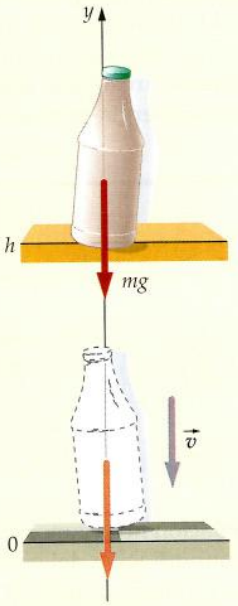


FIGURA 7.5

PLANTEAMIENTO Al caer la botella, el trabajo realizado por la Tierra sobre la botella iguala con signo contrario el cambio en la energía potencial del sistema botella-Tierra. Si se sabe cuánto vale este trabajo, se puede usar el teorema trabajo-energía cinética para determinar la energía cinética.

SOLUCIÓN

1. Hacer un esquema que muestre la botella en el estante y la botella antes de chocar con el suelo (figura 7.5). Suponer que la energía potencial del sistema botella-Tierra es cero cuando la botella está en el suelo, y colocar el eje y con su origen en el suelo:

2. La única fuerza que realiza trabajo sobre la botella mientras cae es la fuerza de la gravedad, por lo que $W_{total} = W_g$. Aplicar el teorema trabajo-energía cinética a la botella que cae:
$$W_{total} = W_g = \Delta K$$

3. La fuerza ejercida por la Tierra sobre la botella durante su caída es una fuerza interna al sistema botella-Tierra. También es una fuerza conservativa, por lo que el trabajo realizado iguala el cambio en la energía potencial del sistema:
$$W_g = -\Delta U = -(U_f - U_i) = -(mgy_f - mgy_i)$$
$$= mg(y_i - y_f) = mg(h - 0) = mgh$$

4. Sustituir el resultado del paso 3 en el resultado del paso 2 y obtener la energía cinética final, teniendo en cuenta que la energía cinética inicial es cero:
$$mgh = \Delta K$$
$$mgh = K_f - K_i$$
$$K_f = K_i + mgh$$
$$= 0 + (0{,}350\ \text{kg})(9{,}81\ \text{N/kg})(1{,}75\ \text{m})$$
$$= 6{,}01\ \text{N} \cdot \text{m} = \boxed{6{,}01\ \text{J}}$$

COMPROBACIÓN Las unidades de la respuesta del paso 4 son unidades de energía, ya que $1\ \text{N} \cdot \text{m} = 1\ \text{J}$.

OBSERVACIÓN La energía potencial se asocia con la configuración de un sistema de partículas, pero a veces en un sistema como el de la botella-Tierra de este ejemplo, sólo se mueve una partícula (el movimiento de la Tierra es despreciable). Para simplificar, muchas veces nos referimos a la energía potencial del sistema botella-Tierra simplemente como la energía potencial de la botella.

La energía potencial gravitatoria de un sistema de partículas dentro de un campo gravitatorio uniforme es la misma que si toda la masa del sistema estuviese concentrada en el centro de masas del sistema. Para tal sistema, sea h_i la altura de la partícula i-ésima sobre un nivel de referencia dado. La energía potencial gravitatoria del sistema es entonces

$$U_g = \sum_i m_i g h_i = g \sum_i m_i h_i$$

donde la suma se extiende a todas las partículas del sistema. Por definición de centro de masas, la altura del centro de masas del sistema viene dada por

$$M h_{cm} = \sum_i m_i h_i, \qquad \text{donde } M = \sum_i m_i$$

Sustituyendo Mh_{cm} por $\Sigma m_i h_i$, tenemos

$$U_g = Mgh_{cm} \qquad 7.3$$

ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

Energía potencial elástica Otro ejemplo de una fuerza conservativa es la que ejerce un muelle estirado (o comprimido) de masa despreciable. Supongamos que tiramos de un bloque atado a un muelle y lo desplazamos desde una posición $x = 0$ (equilibrio) a otra $x = x_1$ (figura 7.6). El muelle realiza un trabajo negativo porque su fuerza se opone a la dirección del movimiento. Si ahora dejamos el bloque en libertad, el muelle realiza un trabajo positivo, al acelerar el bloque hacia su posición inicial. El trabajo total realizado por el muelle para mover el bloque hasta su posición inicial $x = x_1$ y devolverlo luego a $x = 0$ es cero, independientemente del valor de x_1 (siempre que el alargamiento no supere el límite de elasticidad del muelle). La fuerza que ejerce el muelle es, por lo tanto, una fuerza conservativa. Podemos calcular la función energía potencial asociada a esta fuerza a partir de la ecuación 7.1*b*:

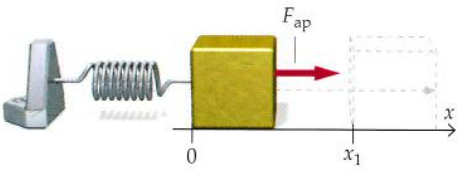


FIGURA 7.6 La fuerza aplicada F_{ap} mueve el bloque hacia la derecha tirando del muelle hasta x_1.

$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -F_x dx = -(-kx)dx = +kx\,dx$$

Por lo tanto,

$$U = \int kx\,dx = \frac{1}{2}kx^2 + U_0$$

donde U_0 es la energía potencial para $x = 0$, es decir, cuando el muelle está sin tensar. Haciendo U_0 igual a cero, resulta

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2 \qquad 7.4$$

ENERGÍA POTENCIAL DE UN MUELLE

La fórmula $U = \frac{1}{2}kx^2$ para la energía potencial de un muelle requiere que el muelle esté en reposo cuando $x = 0$. Así, la localización del punto donde $x = 0$ no es arbitraria cuando consideramos que la energía potencial es $U = \frac{1}{2}kx^2$.

Cuando tiramos del bloque desde $x = 0$ hasta $x = x_1$, ejercemos una fuerza aplicada sobre el muelle. Si el bloque inicia su movimiento en $x = 0$ y lo termina en $x = x_1$, en ambos casos en reposo, el cambio de su energía cinética es cero. El teorema trabajo-energía implica que el trabajo total realizado sobre el bloque es cero, es decir, $W_{ap} + W_{muelle} = 0$; por lo tanto,

$$W_{ap} = -W_{muelle} = \Delta U_{muelle} = \tfrac{1}{2}kx_1^2 - 0 = \tfrac{1}{2}kx_1^2$$

La energía transferida por la fuerza que tira del muelle al sistema bloque-muelle es igual a W_{ap} y se almacena como energía potencial elástica en el muelle.

PROBLEMA PRÁCTICO 7.3

El amortiguador de la suspensión de un Toyota Prius tiene una constante elástica de 11 000 N/m. ¿Cuánta energía se transfiere a uno de esos amortiguadores cuando, partiendo de la posición de relajación, se comprimen 30 cm?

Ejemplo 7.3 La energía potencial de un jugador de baloncesto

FIGURA 7.7 *(Elio Castoria/ APF/Getty Images.)*

Consideremos el sistema formado por un jugador de baloncesto de 110 kg, el aro de una de las cestas y la Tierra. Supongamos que la energía potencial del sistema es cero cuando el jugador no está saltando y el aro está en posición horizontal. Determinar la energía potencial total de este sistema cuando el jugador se cuelga del aro como se muestra en la figura 7.7. Supongamos también que el centro de masas del jugador se encuentra a 0,8 m de altura por encima del suelo cuando está de pie y a 1,3 m de altura cuando se cuelga del aro. La constante elástica del aro es 7,2 kN/m y la parte frontal del aro se desplaza una distancia de 15 cm.

PLANTEAMIENTO En el cambio de posición del jugador, desde el suelo hasta el aro, la variación total de la energía potencial consiste en energía potencial gravitatoria, $U_g = mgy$, y energía almacenada por el aro desplazado, cuya energía potencial se supone análoga a la de un muelle: $U_s = \frac{1}{2}kx^2$. Elegimos 0,8 m del suelo como punto de referencia donde la energía potencial gravitatoria vale $U_g = 0$.

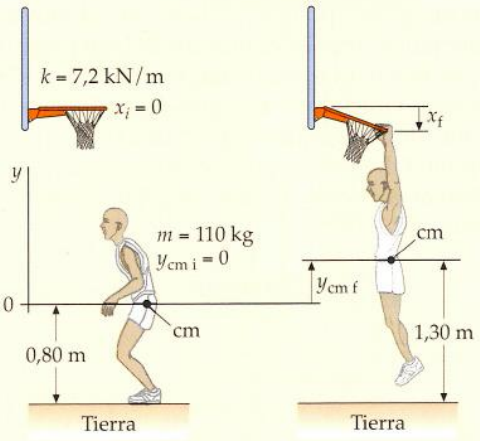


FIGURA 7.8 El jugador de baloncesto salta, se agarra al aro y se cuelga de él.

SOLUCIÓN

1. Dibujar el sistema, primero en la configuración inicial y después en la configuración final (figura 7.8):

2. El punto de referencia donde la energía potencial es 0 es 0,8 m sobre el suelo. Entonces, $U_{gi} = 0$. La energía potencial inicial es 0:

$$U_{gi} = mgy_{cm\,i} = mg(0) = 0$$
$$U_{si} = \tfrac{1}{2}kx_i^2 = \tfrac{1}{2}k(0)^2 = 0$$
$$U_i = U_{gi} + U_{si} = 0$$

3. La energía potencial total es la suma de la energía potencial gravitatoria y la energía potencial elástica del aro:

$$\begin{aligned} U_f &= U_{gf} + U_{sf} = mgy_{cm\,f} + \tfrac{1}{2}kx_f^2 \\ &= (110\,\text{kg})(9{,}81\,\text{N/kg})(0{,}50\,\text{m}) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(7{,}2\,\text{kN/m})(0{,}15\,\text{m})^2 \\ &= 540\,\text{N}\cdot\text{m} + 81\,\text{N}\cdot\text{m} = \boxed{6{,}2 \times 10^2\,\text{J}} \end{aligned}$$

COMPROBACIÓN Las unidades concuerdan si usamos la definición de joule: 1 J = 1 N · m.

OBSERVACIÓN Cuando el jugador se cuelga del aro, éste y el jugador oscilan. Sin embargo, llegan al reposo cuando el aro se dobla 15 cm por debajo de su posición de reposo. La energía potencial total es mínima cuando el sistema está en equilibrio (figura 7.9). El por qué esto es así se explica al final de la sección 7.2.

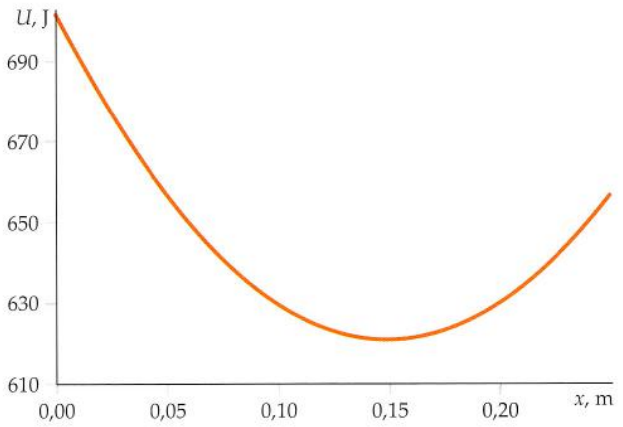


FIGURA 7.9 El gráfico muestra la energía potencial total $U_g + U_s$ en función de la deformación del aro.

PROBLEMA PRÁCTICO 7.4 Un bloque de 3 kg cuelga verticalmente de un muelle cuya constante elástica es 600 N/m. (*a*) ¿Cuál será el alargamiento del muelle cuando el bloque alcance el equilibrio? (*b*) ¿Cuánta energía potencial se almacena en el muelle?

7.2 CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

Ahora ya podemos buscar la relación entre energía cinética y potencial. El trabajo total realizado sobre cada partícula de un sistema es igual al cambio de la energía cinética ΔK_i de esa partícula, por lo que el trabajo total realizado por todas las fuerzas W_{total} es igual al cambio en la energía cinética del sistema ΔK_{sist}:

$$W_{total} = \sum \Delta K_i = \Delta K_{sist} \qquad 7.5$$

Hay dos tipos de fuerzas que realizan trabajo sobre una partícula: las fuerzas externas y las fuerzas internas. Las fuerzas internas pueden ser conservativas y no conservativas. El trabajo total realizado por todas las fuerzas es igual a la suma del trabajo realizado por todas las fuerzas externas W_{ext}, más el trabajo realizado por todas las fuerzas internas no-conservativas W_{nc}, más el trabajo realizado por todas las fuerzas internas conservativas W_c:

$$W_{total} = W_{ext} + W_{nc} + W_c$$

de donde reordenando los términos, queda

$$W_{ext} + W_{nc} = W_{total} - W_c$$

El trabajo total, cambiado de signo, realizado por todas las fuerzas internas conservativas $-W_c$ es igual al cambio de la energía potencial del sistema ΔU_{sist}:

$$-W_c = \Delta U_{sist} \qquad 7.6$$

Introduciendo las ecuaciones 7.5 y 7.6, tenemos

$$W_{ext} + W_{nc} = \Delta K_{sist} + \Delta U_{sist} \qquad 7.7$$

El término de la derecha puede simplificarse

$$\Delta K_{sist} + \Delta U_{sist} = \Delta(K_{sist} + U_{sist}) \qquad 7.8$$

La suma de la energía cinética K_{sist} y la energía potencial U_{sist} de un sistema se denomina energía mecánica total, E_{mec}:

$$E_{mec} = K_{sist} + U_{sist} \qquad 7.9$$

DEFINICIÓN: ENERGÍA MECÁNICA TOTAL

Combinando las ecuaciones 7.8 y 7.9, y sustituyendo en la ecuación 7.7, se obtiene

$$W_{ext} = \Delta E_{mec} - W_{nc} \qquad 7.10$$

TEOREMA TRABAJO-ENERGÍA PARA SISTEMAS

La energía mecánica de un sistema se conserva (E_{mec} = constante) si el trabajo total realizado por todas las fuerzas no-conservativas es cero

$$E_{mec} = K_{sist} + U_{sist} = \text{constante} \qquad 7.11$$

CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

Esta es la **ley de conservación de la energía mecánica** y es el origen de la expresión "fuerza conservativa".

Si $E_{\text{mec i}} = K_i + U_i$ es la energía mecánica inicial del sistema y $E_{\text{mec f}} = K_f + U_f$ es la energía mecánica final, la conservación de la energía mecánica implica que

$$E_{\text{mec f}} = E_{\text{mec i}} \quad (\text{o } K_f + U_f = K_i + U_i) \qquad 7.12$$

En otras palabras, cuando la energía mecánica de un sistema se conserva, podemos relacionar la energía mecánica final del sistema con la energía mecánica inicial sin tener que considerar el movimiento intermedio ni el trabajo realizado por las fuerzas involucradas. Por tanto, la conservación de la energía mecánica nos permite resolver problemas que podrían ser difíciles de resolver a partir de las leyes de Newton.

APLICACIONES

Consideremos una esquiadora que parte del reposo en un punto situado a una altura h_i por encima del punto más bajo de una colina nevada que suponemos sin rozamiento. Despreciando el rozamiento con el aire y con el suelo, ¿cuál es la velocidad de la esquiadora en un punto situado a una altura h sobre el fondo?

La energía mecánica del sistema Tierra-esquiadora se conserva, porque la única fuerza que realiza trabajo es la fuerza conservativa, interna, de la gravedad. Si asignamos $U = 0$ al fondo de la colina, la energía potencial original es mgh_i. Esta es también la energía mecánica total, ya que la energía cinética inicial es cero. Así,

$$E_{\text{mec i}} = K_i + U_i = 0 + mgh_i$$

A la altura h, la energía potencial es mgh y la velocidad es v. Por lo tanto,

$$E_{\text{mec f}} = K_f + U_f = \tfrac{1}{2}mv^2 + mgh$$

Igualando $E_{\text{mec f}} = E_{\text{mec i}}$, resulta

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + mgh = mgh_i$$

es decir,

$$v = \sqrt{2g(h_i - h)}$$

El módulo de la velocidad de la esquiadora es el mismo que habría alcanzado si hubiese caído en caída libre una distancia $h_i - h$. Sin embargo, durante el descenso por la colina nevada la esquiadora recorre una distancia mayor que la correspondiente a la caída libre y tarda más en recorrerla.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Resolución de problemas de energía mecánica

PLANTEAMIENTO Identificar un sistema que incluye el objeto u objetos de interés y cualquier otro objeto que interactúe con el objeto de interés, bien mediante fuerza conservativa o mediante fuerza de rozamiento cinético.

SOLUCIÓN

1. Hacer un dibujo del sistema con los datos disponibles. Incluir unos ejes de coordenadas y mostrar el sistema en sus configuraciones inicial y final (mostrar también una configuración intermedia puede ser útil). Los objetos pueden representarse mediante puntos al igual que hacíamos para los diagramas de fuerzas.
2. Identificar cualquier fuerza externa que haga trabajo sobre el sistema, así como cualquier fuerza interna no-conservativa y cualquier fuerza interna conservativa que realicen trabajo.
3. Aplicar la ecuación 7-10 (teorema trabajo-energía para sistemas). Para cada fuerza conservativa interna que realice trabajo utilizar una función energía potencial para representar el trabajo realizado.

COMPROBACIÓN Asegúrese de que ha tenido en cuenta el trabajo de todas las fuerzas conservativas y no-conservativas.

Ejemplo 7.4 Golpeando un balón

Próximo al borde del tejado de un edificio de 12 m de altura, un joven golpea con el pie un balón con una velocidad inicial v_i = 16 m/s y un ángulo de tiro de 60° respecto a la horizontal. Despreciando la resistencia del aire, determinar (*a*) la altura por encima del edificio que alcanza el balón y (*b*) su velocidad justo antes de chocar contra el suelo.

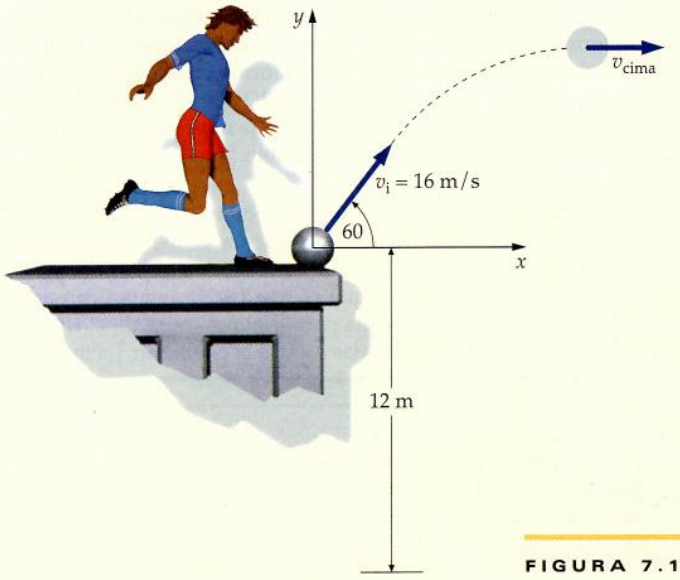


FIGURA 7.10

PLANTEAMIENTO Como la gravedad es la única fuerza que realiza trabajo sobre el sistema balón-Tierra, la energía mecánica se conserva. En la parte más alta de su trayectoria, el balón se mueve horizontalmente con velocidad, v_{cima}, igual a la componente horizontal v_{ix} de su velocidad inicial. Asignamos $y = 0$ en el tejado del edificio.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Realizar un dibujo (figura 7.10) de la trayectoria. Incluir ejes de coordenadas y mostrar la posición inicial del balón y la posición en la cima. Asignar $y = 0$ en el tejado del edificio:

2. Aplicar la ecuación trabajo-energía para sistemas. Escoger el balón y la Tierra como sistema. Después del puntapié y antes de caer al suelo no hay fuerzas externas ni fuerzas no-conservativas que realicen trabajo (despreciamos los efectos de resistencia del aire):

$$W_{ext} = \Delta E_{mec} - W_{nc}$$
$$0 = \Delta E_{mec} - 0$$
$$\therefore E_{mec\,f} = E_{mec\,i}$$

3. La fuerza gravitacional realiza trabajo sobre el sistema. Para tenerlo en cuenta utilizamos la función energía potencial *mgy*:

$$E_{mec\,cima} = E_{mec\,i}$$
$$\tfrac{1}{2}mv_{cima}^2 + mgy_{cima} = \tfrac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i$$
$$\tfrac{1}{2}mv_{cima}^2 + mgh_{cima} = \tfrac{1}{2}mv_i^2 + 0$$

4. La conservación de la energía mecánica relaciona la altura por encima del tejado con la velocidad inicial v_i y la velocidad en el punto más alto de su trayectoria v_{cima}:

$$E_{mec\,cima} = E_{mec\,i}$$
$$\tfrac{1}{2}mv_{cima}^2 + mgy_{cima} = \tfrac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i$$
$$\tfrac{1}{2}mv_{cima}^2 + mgy_{cima} = \tfrac{1}{2}mv_i^2 + 0$$

5. Despejar y_{cima}:

$$y_{cima} = \frac{v_i^2 - v_{cima}^2}{2g}$$

6. La velocidad en la cima es igual a su velocidad horizontal inicial:

$$v_{cima} = v_{ix} = v_i \cos\theta$$

7. Sustituir el resultado del paso 3 en el paso 2 y despejar y_{cima}:

$$y_{cima} = \frac{v_i^2 - v_{cima}^2}{2g} = \frac{v_i^2 - v_i^2\cos^2\theta}{2g} = \frac{v_i^2(1 - \cos^2\theta)}{2g}$$
$$= \frac{(16\text{ m/s})^2(1 - \cos^2 60°)}{2(9{,}81\text{ m s}^2)} = \boxed{9{,}8\text{ m}}$$

(*b*) 1. Si v_f es la velocidad del balón justo antes de chocar contra el suelo, donde $y = y_f = -12$ m, su energía será:

$$E_{mec\,f} = \tfrac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f$$

2. Establecer que la energía mecánica final sea igual a la inicial:

$$\tfrac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f = \tfrac{1}{2}mv_i^2 + 0$$

3. Despejando v_f y haciendo $y = -12$ m, se determina la velocidad final:

$$v_f = \sqrt{v_i^2 - 2gy_f}$$
$$= \sqrt{(16\text{ m/s})^2 - 2(9{,}81\text{ m/s}^2)(-12\text{ m})}$$
$$= \boxed{22\text{ m/s}}$$

COMPROBACIÓN Es de esperar que cuanto más alto sea el edificio, mayor será la velocidad de impacto contra el suelo. Este hecho se puede verificar con la expresión para v_f en el paso 3 del apartado (*b*).

Ejemplo 7.5 El péndulo

Un péndulo es un dispositivo en el que un cuerpo, denominado lenteja debido a su forma, de masa m se ata a una cuerda de longitud L. Si ésta se mueve lateralmente de modo que la cuerda forme un ángulo θ_0 con la vertical y luego se deja caer desde el reposo, ¿cuál es (*a*) el módulo de la velocidad v en la parte inferior de la oscilación y (*b*) la tensión de la cuerda en esa posición? La resistencia del aire es despreciable.

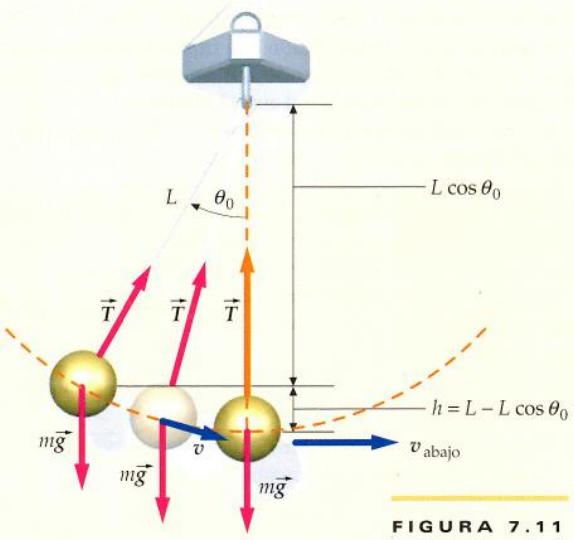


FIGURA 7.11

PLANTEAMIENTO El sistema consiste en el péndulo y la Tierra. La tensión $\vec{T}$ es una fuerza interna no-conservativa que actúa sobre la lenteja. El trabajo que hace $\vec{T}$ aumenta a razón de $\vec{T}\cdot\vec{v}$. La otra fuerza que actúa sobre la lenteja es la fuerza gravitacional $m\vec{g}$, que es una fuerza interna conservativa. Utilizamos el teorema trabajo-energía para sistemas (ecuación 7.10) para encontrar la velocidad en la posición más baja de la oscilación. La tensión de la cuerda se obtiene usando la segunda ley de Newton.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Hacer un esquema del sistema en sus configuraciones inicial y final (figura 7.11). Asignamos $y = 0$ en la posición más baja de la oscilación e $y = h$ en la posición inicial:

2. El trabajo externo realizado sobre el sistema es igual al cambio de su energía mecánica menos el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas (ecuación 7.10):
$$W_{ext} = \Delta E_{mec} - W_{nc}$$

3. No hay fuerzas externas actuando sobre el sistema. La tensión es una fuerza interna no-conservativa:
$$W_{ext} = 0$$
$$W_{nc} = \int_1^2 \vec{T}\cdot d\vec{\ell}$$

4. El incremeto de desplazamiento $d\ell$ es igual a la velocidad por el incremento temporal dt. Sustituyendo en el resultado del paso 3. La tensión es perpendicular a la velocidad $\vec{T}\cdot\vec{v} = 0$:
$$d\vec{\ell} = \vec{v}\,dt$$
$$\text{por lo tanto,}\quad W_{nc} = \int_1^2 \vec{T}\cdot d\vec{\ell} = \int_1^2 \vec{T}\cdot\vec{v}\,dt = 0$$

5. Sustituimos W_{ext} y W_{nc} en el resultado del paso 2. La lenteja está inicialmente en reposo:
$$W_{ext} = \Delta E_{mec} - W_{nc}$$
$$0 = \Delta E_{mec} - 0$$
$$\Delta E_{mec} = 0$$

6. Aplicar el principio de conservación de la energía mecánica. Inicialmente la lenteja está en reposo:
$$E_{mec\,f} = E_{mec\,i}$$
$$\tfrac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f = \tfrac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i$$
$$\tfrac{1}{2}mv_{abajo}^2 + 0 = 0 + mgh$$

7. La conservación de la energía mecánica relaciona la velocidad v con la altura h:
$$\tfrac{1}{2}mv_{abajo}^2 = mgh$$

8. Despejar la velocidad v_{abajo}:
$$v_{abajo} = \sqrt{2gh}$$

9. Expresar esta velocidad en función del ángulo inicial θ_0 exige relacionar h con θ_0. Véase figura 7.11:
$$L = L\cos\theta_0 + h$$
$$\text{por lo tanto,}\quad h = L - L\cos\theta_0 = L(1 - \cos\theta_0)$$

10. Reemplazar h por el valor obtenido para expresar la velocidad en la parte más baja en función de θ_0:
$$v_{abajo} = \boxed{\sqrt{2gL(1 - \cos\theta_0)}}$$

(*b*) 1. Cuando la lenteja está en la parte más baja del círculo, las fuerzas que actúan sobre ella son $m\vec{g}$ y $\vec{T}$. Aplicar $\Sigma F_y = ma_y$:
$$T - mg = ma_y$$

2. En su posición más baja, la lenteja tiene una aceleración centrípeta v_{abajo}^2/L hacia el centro del círculo, dirigida hacia arriba:
$$a_y = \frac{v_{abajo}^2}{L} = \frac{2\,gL(1 - \cos\theta_0)}{L} = 2g(1 - \cos\theta_0)$$

3. Sustituir este valor de a_y en la ecuación obtenida en el paso 1 de (*b*) para deducir T:
$$T = mg + ma_y = m(g + a_y) = m[g + 2g(1 - \cos\theta_0)]$$
$$= \boxed{(3 - 2\cos\theta_0)mg}$$

COMPROBACIÓN (1) La tensión de la cuerda en la parte más baja de la oscilación es mayor que el peso de la lenteja, ya que ésta está acelerando hacia arriba. (2) El paso 3 del apartado (*b*) muestra que para $\theta_0 = 0$, $T = mg$, el resultado que se esperaría para una lenteja estacionaria colgando de una cuerda.

OBSERVACIÓN (1) El ritmo al que la fuerza realiza trabajo es $\vec{F} \cdot \vec{v}$ (ecuación 6.22). El paso 4 del apartado (*a*) ilustra que la tasa a la que la tensión realiza trabajo es cero. Cualquier fuerza que sea perpendicular a la velocidad siempre realizará trabajo nulo. (2) El paso 8 del apartado (*a*) muestra que la velocidad en la parte más baja es la misma que la que tendría la lenteja si se hubiera dejado caer libremente desde una altura h. (3) La velocidad de la lenteja en la parte más baja del arco también se puede obtener directamente de las leyes de Newton, pero es más complicado porque la aceleración no es constante. (4) Si la cuerda no hubiese sido incluida en el sistema, entonces W_{ext} sería igual al trabajo realizado por la tensión y W_{nc} sería igual a cero porque no habría fuerzas no-conservativas. Los resultados hubieran sido los mismos.

Ejemplo 7.6 Bloque que comprime un muelle

Inténtelo usted mismo

Se empuja un bloque de 2 kg contra un muelle cuya constante elástica es 500 N/m. Después de comprimirlo 20 cm, el muelle se suelta de tal forma que acelera el bloque conforme se va estirando sobre la superficie horizontal sin rozamiento, y luego por un plano inclinado 45°, también sin rozamiento. ¿Qué distancia recorre el bloque hacia arriba sobre el plano inclinado antes de alcanzar momentáneamente el reposo?

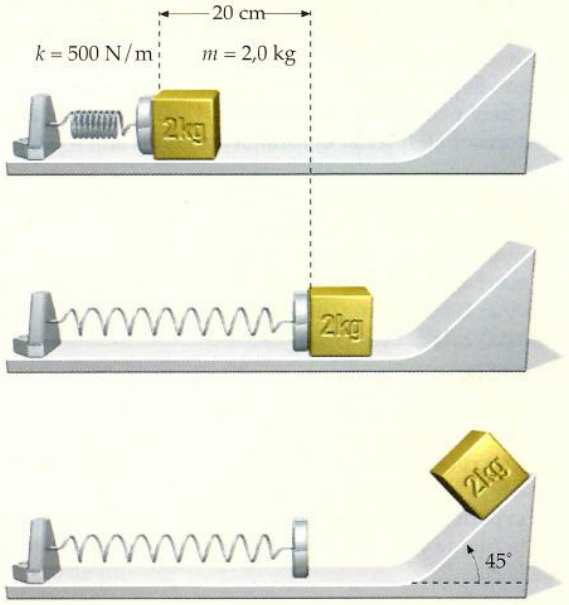


FIGURA 7.12

PLANTEAMIENTO Hacer que el sistema incluya el bloque, la Tierra, la superficie horizontal, la rampa y la pared vertical a la cual está ligado el muelle. Después de liberar el muelle no hay fuerzas externas actuando sobre el sistema; las únicas fuerzas que realizan trabajo son la fuerza ejercida por el muelle y la fuerza de la gravedad. Como ambas fuerzas son conservativas, la energía mecánica total del sistema se conserva. Determinar h a partir de la conservación de la energía mecánica y, después calcular la distancia s recorrida por el bloque hacia arriba sobre el plano inclinado a partir de la expresión sen 45° = h/s.

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	Respuestas
1. Elegir como sistema al bloque, el muelle, la Tierra, la superficie horizontal, la rampa y la pared a la que engancha el muelle. Hacer un esquema del sistema con la configuración inicial y la configuración final (véase la figura 7.12).	
2. Aplicar el teorema trabajo-energía para sistemas. Después de soltar el muelle no hay fuerzas que actúen sobre el sistema y tampoco fuerzas no-conservativas que realicen trabajo sobre él.	$W_{ext} = \Delta E_{mec} - W_{nc}$ $0 = \Delta E_{mec} - 0$ $\therefore E_{mecf} = E_{meci}$
3. Expresar la energía mecánica inicial en función de la distancia de compresión x_i.	$E_{meci} = U_{si} + U_{gi} + K_i = \frac{1}{2}kx_i^2 + 0 + 0$
4. Expresar la energía mecánica final en función de la altura h.	$E_{mecf} = U_{sf} + U_{gf} + K_f = 0 + mgh + 0$
5. Sustituir en el resultado del paso 3 y despejar h.	$mgh = \frac{1}{2}kx_i^2$ $h = \dfrac{kx_i^2}{2mg} = 0{,}51 \text{ m}$
6. Determinar la distancia s a partir de h y el ángulo de inclinación (figura 7.13).	$h = s \times \text{sen}\,\theta$ $s = \boxed{0{,}72 \text{ m}}$

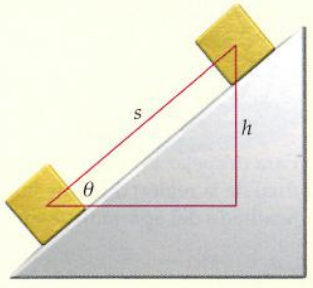


FIGURA 7.13

COMPROBACIÓN La expresión para h obtenida en el paso 5 resulta creíble. Se puede ver como al crecer x_i también aumenta la altura máxima mientras que utilizar una masa más grande hace disminuir la altura máxima.

OBSERVACIÓN (1) En este problema la energía mecánica inicial del sistema es la energía potencial del muelle. Esta energía se convierte primero en energía cinética y después en energía potencial gravitatoria. (2) La fuerza normal $\vec{F}_n$ que actúa sobre el bloque siempre forma ángulos rectos, de forma que $\vec{F}_n \cdot \vec{v} = 0$ todo el tiempo.

PROBLEMA PRÁCTICO 7.5 Determinar el módulo de la velocidad del bloque en el momento justo en que se separa del muelle.

PROBLEMA PRÁCTICO 7.6 ¿Cuánto trabajo realizó la fuerza normal sobre el bloque?

Ejemplo 7.7 Saltador de puénting *Póngalo en su contexto*

Un muchacho salta desde una plataforma que está a 134 m sobre el río Nevis. Después de caer libremente 40 m, la cuerda atada a los tobillos del muchacho empieza a alargase (la longitud de reposo de la cuerda es de 40 m). El muchacho continúa descendiendo durante 80 m más antes de pararse en la parte más baja del descenso. Suponer que la masa del muchacho es de 100 kg, la cuerda sigue la ley de Hooke y tiene masa despreciable. ¿Cuál es la aceleración en la parte más baja del descenso? Despreciar el rozamiento con el aire.

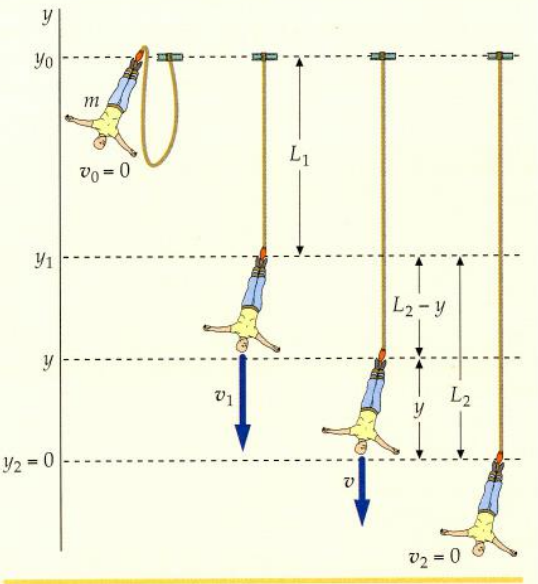


FIGURA 7.14

PLANTEAMIENTO Elegir como sistema todo aquello que se ha mencionado en el enunciado y la Tierra. Conforme el muchacho cae, la velocidad aumenta hasta un valor máximo, para después decrecer hasta cero cuando el muchacho llega a la parte más baja del descenso. Aplicar el teorema trabajo-energía para sistemas. Para determinar la aceleración utilizaremos la segunda ley de Newton y la ley de Hooke.

SOLUCIÓN

1. El sistema incluye al muchacho, la Tierra y la cuerda. Dibujar el sistema mostrando las posiciones inicial y final de los primeros 40 m de descenso y lo mismo para los 80 restantes (figura 7.14). Incluir un eje $+y$ con el cero situado en la parte más baja del descenso. Sea $L_1 = 40$ m la longitud de la cuerda y $L_2 = 80$ m la longitud de máxima extensión de la cuerda:

2. Aplicar el teorema trabajo-energía para sistemas. No hay fuerzas externas ni fuerzas internas no-conservativas que realicen trabajo:

$$W_{ext} = \Delta E_{mec} - W_{nc}$$
$$0 = \Delta E_{mec} - 0$$
$$\therefore E_{mec\,f} = E_{mec\,i}$$

3. Aplicar el resultado del paso 2 a la parte descendente donde la cuerda se estira. La extensión de la cuerda es $L_2 - y$ (el subíndice 1 indica la situación en la figura 7.14 que está más a la izquierda y el 3 indica la que está más a la derecha):

$$E_{mec\,3} = E_{mec\,2}$$
$$U_{g3} + U_{s3} + K_3 = U_{g2} + U_{s2} + K_2$$
$$mgy_3 + \tfrac{1}{2}k(L_2 - y_3)^2 + \tfrac{1}{2}mv_3^2 = mgy_2 + \tfrac{1}{2}ky_2^2 + \tfrac{1}{2}mv_2^2$$
$$0 + \tfrac{1}{2}kL_2^2 + 0 = mgL_2 + 0 + \tfrac{1}{2}mv_2^2$$
$$\tfrac{1}{2}kL_2^2 = mgL_2 + \tfrac{1}{2}mv_2^2$$

4. Para despejar k, necesitamos encontrar la energía cinética al final de la región de caída libre. Aplicar de nuevo el resultado del apartado 2 y determinar la energía cinética:

$$E_{mec\,2} = E_{mec\,1}$$
$$U_{g2} + K_2 = U_{g1} + K_1$$
$$mgy_2 + \tfrac{1}{2}mv_2^2 = mgy_1 + \tfrac{1}{2}mv_1^2$$
$$mgL_2 + \tfrac{1}{2}mv_2^2 = mg(L_1 + L_2) + 0$$
$$\tfrac{1}{2}mv_2^2 = mgL_1$$

5. Sustituir el resultado del paso 4 en el resultado del paso 3 y despejar k:

$$\tfrac{1}{2}kL_2^2 = mgL_2 + mgL_1$$

$$k = \frac{2mg(L_2 + L_1)}{L_2^2}$$

6. Aplicar la segunda ley de Newton cuando el muchacho está en la parte más baja del descenso. Primero construir el diagrama de fuerzas (figura 7.15):

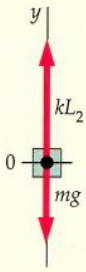


FIGURA 7.15

7. Aplicar la segunda ley de Newton y despejar la aceleración. Utilizar la expresión de k del paso 5:

$$\Sigma F_y = ma_y$$

$$-mg + kL_2 = ma_y$$

$$a_y = -g + k\frac{L_2}{m} = -g + \frac{2mg(L_2 + L_1)}{L_2^2}\frac{L_2}{m}$$

$$= g\left(1 + 2\frac{L_1}{L_2}\right) = g\left(1 + 2\frac{40}{80}\right) = \boxed{2{,}0g}$$

COMPROBACIÓN Es de esperar que la aceleración en la parte más baja sea ascendente (dirección $+y$) y nuestros resultados lo corroboran. Los vectores velocidad y aceleración tienen la misma dirección inmediatamente después de que la velocidad cambie de dirección.

PROBLEMA PRÁCTICO 7.7 Conforme cae, el muchacho gana velocidad hasta que la fuerza con la que la cuerda tira hacia arriba se iguala con la fuerza de la gravedad. ¿A qué altura se consigue la máxima velocidad?

Ejemplo 7.8 De regreso al futuro *Póngalo en su contexto*

Imaginemos que hemos viajado en el tiempo hasta finales del siglo XIX y estamos contemplando como unos antepasados nuestros, en su viaje de novios, se montan en las montañas rusas *Flip Flap* de Coney Island, que tienen un tramo que realiza un bucle, una vuelta vertical completa. Un saco de arena de 40 kg procedente de una zona en obras de la atracción cae en el asiento trasero de la vagoneta donde van nuestros familiares antes de entrar en el bucle. El impacto no causa ningún daño físico pero, en cambio, disminuye la velocidad del vehículo un 25%. La vagoneta había empezado a moverse, partiendo del reposo, desde un punto situado el doble de alto que el punto más alto del bucle. Despreciar cualquier pérdida debida al rozamiento o a la resistencia del aire. ¿Completará la vagoneta su recorrido sin caer?

PLANTEAMIENTO Consideraremos que el sistema está formado por la vagoneta, su contenido, las vías (incluyendo el bucle) y la Tierra. La vagoneta debe tener en el punto más alto del bucle una velocidad suficiente para mantenerse en las vías. Utilizar el teorema trabajo-energía para determinar la velocidad que lleva la vagoneta justo antes de la caída del saco y también para calcular la velocidad que tiene en el punto más alto del bucle. Usar la segunda ley de Newton para determinar la fuerza normal ejercida por el vehículo sobre los raíles.

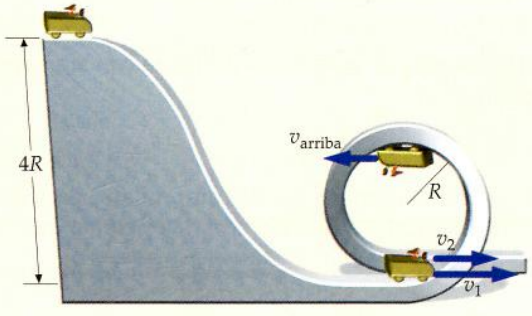


FIGURA 7.16

SOLUCIÓN

1. Elegimos como sistema la vagoneta, su contenido, los raíles y la Tierra. Se dibuja la vagoneta y el recorrido que debe seguir en la atracción, con la posición de la vagoneta en el punto de salida y en el punto más alto del bucle (figura 7.16):

2. Se aplica la segunda ley de Newton para relacionar la velocidad en el punto más alto del bucle con la fuerza normal:

$$F_n + mg = m\frac{v_{arriba}^2}{R}$$

3. Aplicar el teorema trabajo-energía al intervalo anterior al impacto. No hay fuerzas externas y tampoco fuerzas internas no-conservativas que realicen trabajo. Determinar la velocidad antes del impacto. Medir las alturas respecto a la parte más baja del bucle. La altura inicial $4R$, donde R es el radio del bucle, es el doble de la altura de la cima del bucle:

$$W_{ext} = \Delta E_{mec} - W_{nc}$$
$$0 = \Delta E_{mec} - 0$$
$$\therefore E_{mec\,f} = E_{mec\,i}$$
$$U_0 + K_0 = U_1 + K_1$$
$$mg\,4R + 0 = 0 + \tfrac{1}{2}mv_1^2$$
por lo tanto, $v_1 = \sqrt{8Rg}$

4. El impacto del saco de arena produce la reducción de la velocidad un 25%. La velocidad después del impacto es:

$$v_2 = 0{,}75v_1 = 0{,}75\sqrt{8Rg}$$

5. Usando el teorema trabajo-energía durante el intervalo posterior al impacto, la velocidad en el punto más alto del bucle es:

$$U_{arriba} + E_{c\,arriba} = U_2 + K_2$$
$$mg2R + \tfrac{1}{2}mv_{arriba}^2 = 0 + \tfrac{1}{2}m(0{,}75^2 \cdot 8Rg)$$
por lo tanto, $v_{arriba}^2 = (0{,}75^2 \cdot 8 - 4)Rg = 0{,}5Rg$

6. Sustituyendo v_{arriba}^2 en el paso 2, resulta:

$$F_n + mg = m\frac{0{,}5Rg}{R}$$
$$F_n + mg = 0{,}5mg$$

7. Se obtiene F_n:

$$F_n = -0{,}5mg$$

8. F_n es el módulo de la fuerza normal. No puede ser negativo:

¡Ojo! La vagoneta cae.

COMPROBACIÓN Una pérdida del 25% de la velocidad supone perder casi un 44% de la energía cinética. La velocidad es la misma si la vagoneta hubiese partido del reposo desde una altura de $0{,}56 \times 4R = 1{,}12 \times 2R$ (12% más alto que la altura de la cima del bucle). No nos debe sorprender tanto que la vagoneta caiga.

OBSERVACIÓN Afortunadamente, hay sistemas de seguridad que evitan que las vagonetas caigan, por lo que nuestros antepasados probablemente habrían sobrevivido. La mayor preocupación entre los usuarios de aquella atracción era la rotura del cuello. En el bucle, los viajeros estaban sometidos a aceleraciones del orden de $12g$. Aquel bucle del *Flip Flap* fue el último de los bucles circulares en montañas rusas. Los bucles actuales tienen forma oval, más altos que anchos.

ENERGÍA POTENCIAL Y EQUILIBRIO

Se puede obtener mucha información acerca del movimiento de un sistema observando detenidamente un gráfico de la energía potencial en función de la posición de la partícula. Para simplificar, nos centraremos en partículas que sólo se mueven en una dirección. Para crear este gráfico, primero tenemos que determinar la relación entre la energía potencial y la fuerza que actúa sobre la partícula. Para una fuerza conservativa general en una dimensión, $\vec{F} = F_x\hat{i}$, la ecuación 7.1*b* queda:

$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -F_x dx$$

La fuerza es, por lo tanto, la derivada con signo menos* de la función energía potencial:

$$F_x = -\frac{dU}{dx} \qquad 7.13$$

Esta expresión general puede comprobarse para el caso de un sistema bloque-muelle diferenciando la función $U = \frac{1}{2}kx^2$, con lo que obtenemos

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -kx$$

La figura 7.17 muestra un gráfico de $U = \frac{1}{2}kx^2$ *en* función del desplazamiento x para un sistema bloque-muelle. La derivada de esta función se representa gráficamente por la pendiente de la línea tangente a la curva. La fuerza es, por lo tanto,

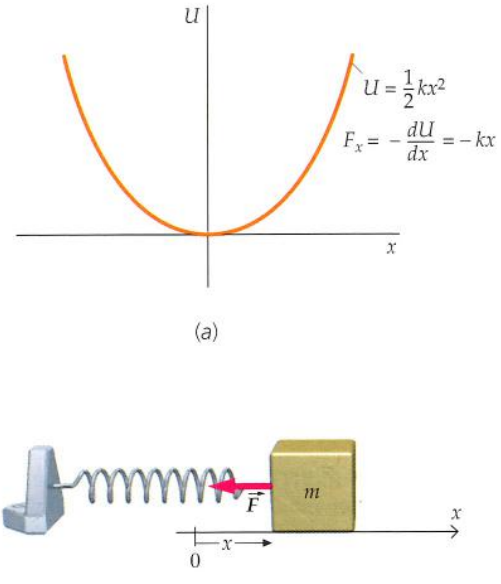


FIGURA 7.17 (*a*) Energía-potencial U en función del desplazamiento x para un objeto sujeto a un muelle. Un mínimo en una curva de energía potencial es un punto de equilibrio estable, ya que los desplazamientos a ambos lados de este punto dan lugar a una fuerza que está dirigida hacia la posición de equilibrio. (*b*) La fuerza aplicada $\vec{F}$ tira del bloque hacia la derecha estirando el muelle una distancia x_1.

* La derivada de la ecuación 7.13 se reemplaza por una derivada parcial cuando el movimiento no está restringido sólo al eje x.

igual al valor negativo de la pendiente de la curva. Para $x = 0$, la fuerza $F_x = -dU/dx$ es cero y el bloque está en *equilibrio*.

Cuando x es positiva (figura 7.17*a*), la pendiente es positiva y la fuerza F_x es negativa. Cuando x es negativa, la pendiente es negativa y la fuerza F_x es positiva. En ambos casos, la fuerza tiene la dirección que acelera el bloque hacia los valores de energía potencial más bajos. Si el bloque se desplaza ligeramente de $x = 0$, la fuerza se dirige hacia atrás, es decir, hacia $x = 0$. El equilibrio en $x = 0$ es, por lo tanto, un **equilibrio estable**, ya que un desplazamiento pequeño hace que una fuerza restauradora acelere la partícula de nuevo hacia su posición de equilibrio.

En el equilibrio estable, un pequeño desplazamiento da lugar a una fuerza restauradora que acelera la partícula hacia atrás en busca de su posición de equilibrio.

CONDICIÓN DE EQUILIBRIO ESTABLE

En la figura 7.18, se muestra una curva para la energía potencial con un máximo para $x = 0$ en lugar de un mínimo. Esta curva podría representar, por ejemplo, la energía potencial de una nave espacial en el punto entre la Tierra y la Luna donde la gravedad terrestre tira de la nave hacia la Tierra con la misma fuerza que la gravedad lunar tira de la nave hacia la Luna (despreciamos aquí la gravedad solar.). En esta curva, cuando x es positiva, la pendiente es negativa, y la fuerza F_x es positiva; y cuando x es negativa, la pendiente es positiva y la fuerza F_x es negativa. Por otra parte, la fuerza tiene aquella dirección que acelera la partícula hacia la menor energía potencial, pero en este caso la fuerza se aleja de la posición de equilibrio. El máximo para $x = 0$ en la figura 7.18 es un punto de **equilibrio inestable**, ya que un desplazamiento pequeño da lugar a una fuerza que acelera la partícula alejándola de su posición de equilibrio.

En el equilibrio inestable, un pequeño desplazamiento da lugar a una fuerza que acelera la partícula alejándola de la posición de equilibrio.

CONDICIÓN DE EQUILIBRIO INESTABLE

La figura 7.19 muestra una curva de energía potencial que es plana en la región próxima a $x = 0$ y, por lo tanto, la partícula está en equilibrio. Si la partícula se desplaza ligeramente en cualquier dirección, la fuerza seguirá siendo cero. Este es un ejemplo de **equilibrio neutro**.

En el equilibrio neutro, un pequeño desplazamiento no da lugar a ninguna fuerza, de modo que la partícula sigue en equilibrio.

CONDICIÓN DE EQUILIBRIO NEUTRO

¡ La función energía potencial tiene un mínimo en los puntos de equilibrio estable.

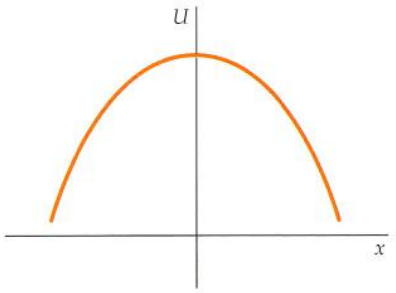


FIGURA 7.18 Una partícula cuya energía potencial se represente mediante esta gráfica se encontrará en equilibrio inestable en $x = 0$, ya que los desplazamientos respecto a la posición $x = 0$ en una u otra dirección, dan lugar a una fuerza que la aleja de la posición de equilibrio.

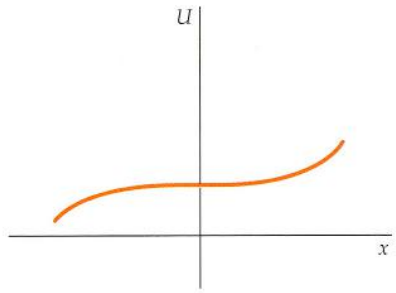


FIGURA 7.19 Equilibrio neutro. La fuerza $F_x = -dU/dx$ es cero para $x = 0$ y para los puntos próximos. Si una partícula se desplaza en cualquier dirección a partir de $x = 0$, no experimenta ninguna fuerza y, por lo tanto, permanece en equilibrio.

Ejemplo 7.9 Función energía potencial y fuerzas

La fuerza de una partícula en la región $-a < x < a$ se representa mediante la función energía potencial

$$U = -b\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right)$$

donde a y b son constantes positivas. (*a*) Determinar la fuerza F_x en la región $-a < x < a$. (*b*) ¿Para qué valor de x la fuerza vale cero? (*c*) En el punto en que la fuerza se anula, ¿el equilibrio es estable o inestable?

PLANTEAMIENTO La fuerza es la derivada, con signo negativo, de la función energía potencial. El equilibrio es estable cuando la función energía potencial está en un mínimo e inestable cuando la función energía potencial está en un máximo.

SOLUCIÓN

(*a*) Calcular $F_x = -dU/dx$:

$$F_x = -\frac{d}{dx}\left[-b\left(\frac{1}{(a+x)} + \frac{1}{(a-x)}\right)\right] = \boxed{-b\left(\frac{1}{(a+x)^2} - \frac{1}{(a-x)^2}\right)}$$

(*b*) Igualar F_x a cero y resolver para x:

$$F_x = 0 \quad \text{para} \quad \boxed{x = 0}$$

(*c*) Calcular d^2U/dx^2. Si es positivo en la posición de equilibrio, U alcanza un mínimo y el equilibrio es estable. Si es negativo, entonces U es un máximo y el equilibrio es inestable:

$$\frac{d^2U}{dx^2} = -2b\left(\frac{1}{(a+x)^3} + \frac{1}{(a-x)^3}\right)$$

$$\text{En } x = 0, \quad \frac{d^2U}{dx^2} = \frac{-4b}{a^3} < 0$$

Por lo tanto, equilibrio $\boxed{\text{inestable}}$

COMPROBACIÓN Si U se expresa en joules y x y a se expresan en metros, entonces b debe expresarse en joules · metros y F_x debe expresarse en newtons. En el resultado del apartado (*a*) se muestra que F_x tiene unidades de $\text{J} \cdot \text{m}/\text{m}^2 = \text{J}/\text{m}$. Como $1\ \text{J} = 1\ \text{N} \cdot \text{m}$, la expresión para F_x tiene las unidades correctas.

OBSERVACIÓN Esta función energía potencial es la que corresponde a una partícula bajo la influencia de las fuerzas gravitatorias ejercidas por dos masas fijas e idénticas, una en $x = -a$ y la otra en $x = +a$. La partícula está en la línea que une las masas y en el punto medio la fuerza neta es cero. En caso contrario, la fuerza neta hará que la partícula se mueva en la dirección de la masa más próxima.

Este resultado puede utilizarse para localizar experimentalmente el centro de masas de un objeto. Por ejemplo, dos objetos conectados por una barra ligera estarán en equilibrio sobre un pivote situado en el centro de masas (figura 7.20). Si pivotamos el sistema en cualquier otro punto, el sistema girará hasta que la energía potencial pase por un mínimo, lo cual tiene lugar cuando el centro de masas se encuentra en el punto más bajo posible directamente debajo del pivote (figura 7.21). (La energía potencial gravitatoria de un sistema es $U_g = mgh_{cm}$ [ecuación 7.3].)

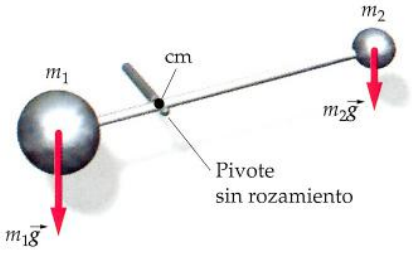


FIGURA 7.20

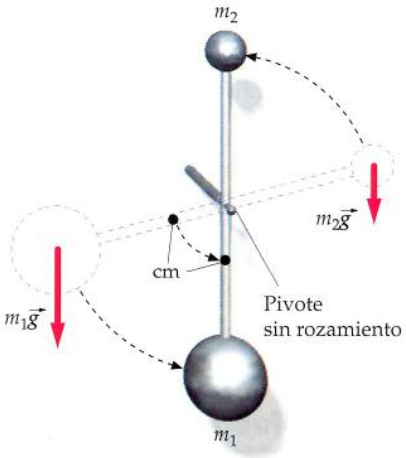


FIGURA 7.21

Si suspendemos cualquier cuerpo irregular de un pivote, este cuerpo colgará de modo que sus centro de masas se encuentre en un punto de la línea vertical que pasa por el pivote y debajo de éste. Si ahora suspendemos el cuerpo de otro punto y trazamos la línea vertical que pasa a través del mismo, el centro de masas se encuentra en la intersección de las dos líneas (figura 7.22).

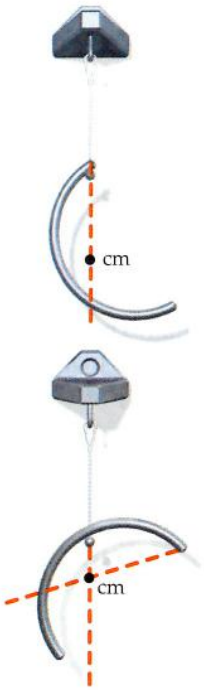


FIGURA 7.22 El centro de masas de un objeto irregular puede determinarse suspendiéndolo de dos puntos distintos, de forma sucesiva.

Para un sistema para el cual la energía mecánica se mantenga constante, los gráficos para la energía potencial U y la energía mecánica E resultan muy útiles. Por ejemplo, la figura 7.23 muestra un gráfico de la función energía potencial

$$U = b\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right)$$

que es la función energía potencial utilizada en el ejemplo 7.9 pero cambiada de signo. La figura 7.23 contiene gráficos tanto de la función energía potencial como de la energía mecánica total E. La energía cinética para un valor dado de x se representa mediante la distancia entre la línea de la energía mecánica total y la curva de la energía potencial, pues $K = E - U$.

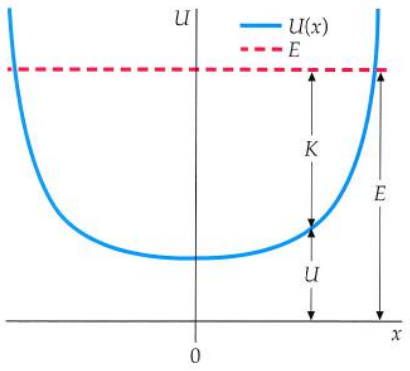


FIGURA 7.23 La energía potencial U y la energía mecánica total E se dibujan en función de x. La suma de la energía cinética K y la energía potencial es igual a la energía mecánica total. Esto es, $K = E - U$.

7.3 CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

En el mundo macroscópico siempre existen, en algún grado, fuerzas no-conservativas, como la fuerza de rozamiento cinético, que disminuyen la energía mecánica de un sistema. Sin embargo, toda disminución de este tipo viene acompañada del incremento de energía térmica correspondiente. (Tenga en cuenta como se calientan los cojinetes o el tambor de los frenos de un coche cuando se frena frecuentemente.) Otro tipo de fuerza no-conservativa es la implicada en la deformación de los objetos. Cuando doblamos arriba y abajo un alambre realizamos un trabajo, pero éste no aparece como energía mecánica. En su lugar, el alambre, se calienta. El trabajo realizado al deformarlo se disipa en forma de energía térmica. De igual modo, cuando una bola de masilla cae al suelo, ésta se calienta a medida que se deforma como consecuencia del impacto; la energía cinética disipada aparece en forma de energía térmica. Para el sistema bola-suelo-Tierra la energía total es la suma de la energía térmica y la energía mecánica. La energía total del sistema se conserva aunque individualmente no se conserven ni la energía mecánica total ni la energía térmica total.

Un tercer tipo de fuerza no-conservativa está asociado a las reacciones químicas. Cuando tratamos sistemas en los cuales tienen lugar reacciones químicas, la suma de la energía mecánica más la energía térmica no se conserva. Por ejemplo, supongamos que una persona comienza a correr desde el reposo. Inicialmente, no posee energía cinética. Al correr, la energía química almacenada en determinadas moléculas de sus músculos se transforma en energía cinética del cuerpo y se produce energía térmica. Es posible identificar y medir la energía química consumida. En este caso, la suma de la energía mecánica, térmica y química se conserva.

Incluso cuando se incluyen las energías térmica y química, la energía total del sistema no permanece siempre constante. La energía de un sistema puede cambiar por alguna forma de radiación, tal como las ondas sonoras o las ondas electromagnéticas. Sin embargo, *el aumento o disminución de la energía total de un sistema puede siempre explicarse por la aparición o desaparición de energía fuera del sistema*. Este resultado experimental se conoce como **ley de conservación de la energía** y es una de las leyes más importantes de la ciencia. Sea E_{sist} la energía total de un determinado sistema, $E_{entrada}$ la energía absorbida por el sistema y E_{salida} la energía cedida por el mismo. La ley de conservación de la energía establece

$$E_{entrada} - E_{salida} = \Delta E_{sist} \qquad 7.14$$

LEY DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

Alternativamente

> La energía total del universo es constante. La energía puede transformarse de una forma en otra o ser transmitida de una región a otra, pero la energía no puede nunca ser creada o destruida.
>
> LEY DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

La energía total E de muchos sistemas de nuestra vida diaria puede explicarse completamente mediante la energía mecánica, E_{mec}, la energía térmica, $E_{térm}$, y la energía química, $E_{quím}$. Si queremos incluir cualquier otra forma posible de energía, como la electromagnética y la nuclear, añadiremos otro término, E_{otras}, y escribiremos de modo general

$$E_{sist} = E_{mec} + E_{térm} + E_{quím} + E_{otras} \qquad 7.15$$

TEOREMA TRABAJO-ENERGÍA

Una forma común de transferir energía (absorbida o cedida) de un sistema es intercambiando trabajo con el exterior. Si ésta es la única fuente de energía transferida hacia dentro o hacia fuera del sistema, la ley de conservación de la energía se expresa así:

$$W_{ext} = \Delta E_{sist} = \Delta E_{mec} + \Delta E_{térm} + \Delta E_{quím} + \Delta E_{otras} \qquad 7.16$$

TEOREMA TRABAJO-ENERGÍA

donde W_{ext} es el trabajo realizado sobre el sistema por fuerzas externas y ΔE_{sist} es la variación de la energía total experimentada por el sistema. Este teorema trabajo-energía es un instrumento poderoso para estudiar una amplia variedad de sistemas. Obsérvese que si el sistema está formado por una sola partícula, su energía sólo puede ser cinética. En ese caso, el teorema trabajo-energía (ecuación 7.16) es el mismo que el teorema trabajo-energía cinética (ecuación 6.8) estudiado en el capítulo 6.

Hay dos métodos de transferir energía hacia el interior o hacia fuera de un sistema. El segundo método se llama calor. El calor es la transferencia de energía asociada al cambio de temperatura. Los intercambios de energía debido a diferencias de temperatura entre el sistema y sus alrededores se discutirán en el capítulo 18. En este capítulo supondremos que la transferencia de energía en forma de calor es despreciable.

Ejemplo 7.10 La bola de plastilina que cae — *Conceptual*

Una bola de plastilina de masa m en reposo a una altura h sobre el suelo, perfectamente liso, se deja caer libremente. Analizar la aplicación de la ley de conservación de la energía (*a*) al sistema formado por la bola aislada, y (*b*) al sistema formado por la Tierra, el suelo y la bola.

PLANTEAMIENTO Dos fuerzas actúan sobre la bola: la gravedad y la fuerza de contacto del suelo. Como el suelo no se mueve, la fuerza que ejerce no realiza ningún trabajo. No hay energía química ni otros cambios energéticos, por lo que podemos prescindir de los términos $\Delta E_{quím}$ y ΔE_{otras}. Si despreciamos la energía sonora emitida al chocar la bola contra el suelo, la única energía transferida hacia el sistema, o desde él, es el trabajo realizado por la gravedad, de modo que podemos utilizar el teorema trabajo-energía.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Escribir el teorema trabajo-energía:

$$W_{ext} = \Delta E_{sist} = \Delta E_{mec} + \Delta E_{térm} + \Delta E_{quím} + \Delta E_{otras}$$
$$W_{ext} = \Delta E_{sist} = \Delta E_{mec} + E_{térm}$$

2. Las dos fuerzas externas que actúan sobre el sistema son la gravedad y la fuerza ejercida por el suelo. Sin embargo, la parte de la bola en contacto con el suelo no se mueve, de forma que la fuerza sobre la bola debida al suelo no realiza trabajo. El único trabajo hecho sobre la bola es por gravedad: $W_{ext} = mgh$

3. Como la bola aislada es nuestro sistema, su energía mecánica es enteramente cinética, la cual es cero, tanto inicialmente como finalmente. Así, el cambio de energía mecánica es cero: $\Delta E_{mec} = 0$

4. Sustituir mgh en W_{ext} y 0 en ΔE_{mec} en el paso 1:
$$W_{ext} = \Delta E_{mec} + E_{térm}$$
$$mgh = 0 + \Delta E_{térm}$$
por lo tanto, $\boxed{\Delta E_{térm} = mgh}$

Nota: Si el suelo no fuese perfectamente rígido, el aumento de energía térmica sería compartido entre la bola y el suelo.

(*b*) 1. No hay fuerzas externas que actúen sobre el sistema bola-Tierra-suelo (la fuerza de la gravedad y la del suelo son ahora internas al sistema), de modo que no hay trabajo externo realizado: $W_{ext} = 0$

2. Expresar el teorema trabajo-energía con $W_{ext} = 0$:
$$W_{ext} = \Delta E_{sist} = \Delta E_{mec} + \Delta E_{térm}$$
$$0 = \Delta E_{mec} + \Delta E_{térm}$$

3. La energía mecánica inicial del sistema bola-Tierra es la energía potencial gravitatoria inicial, y la energía mecánica final es cero:
$$E_{mec\,i} = mgh$$
$$E_{mec\,f} = 0$$

4. El cambio de energía mecánica del sistema bola-Tierra es, por lo tanto: $\Delta E_{mec} = 0 - mgh = -mgh$

5. El teorema trabajo-energía nos da el mismo resultado que el obtenido en el apartado (*a*): $\Delta E_{térm} = \boxed{-\Delta E_{mec} = mgh}$

COMPROBACIÓN En ambos apartados (*a*) y (*b*), se llega al mismo resultado, la energía térmica del sistema aumenta mgh, que era lo esperado.

OBSERVACIÓN En (*a*) la energía se transfiere a la bola en virtud del trabajo realizado por la gravedad. Esta energía aparece en forma de energía cinética de la bola antes de que choque contra el suelo y como energía térmica después. La bola se calienta ligeramente y finalmente la energía se transfiere a los alrededores en forma de calor. En (*b*) la energía potencial inicial del sistema bola-Tierra-suelo se convierte en energía cinética de la bola antes de que choque contra el suelo y después en energía térmica.

PROBLEMAS EN LOS QUE INTERVIENE EL ROZAMIENTO CINÉTICO

Cuando dos superficies se deslizan una sobre otra, las fuerzas de rozamiento cinético ejercidas por una superficie sobre la otra, disminuyen la energía mecánica total del sistema e incrementan la energía térmica. Consideremos un bloque que comienza a moverse con velocidad inicial v_i y se desliza sobre una mesa sin rozamiento (figura 7.24). La mesa está inicialmente en reposo. Sean el bloque y la mesa nuestro sistema. Por lo tanto, $\Delta E_{quím} = \Delta E_{otras} = 0$ y ningún trabajo externo se realiza sobre este sistema. El teorema trabajo-energía nos dice que

$$0 = \Delta E_{mec} + \Delta E_{térm} \qquad 7.17$$

El cambio en la energía mecánica es

$$\Delta E_{mec} = \Delta K_{bloque} + \Delta K_{mesa} = (\tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2) + (\tfrac{1}{2}MV_f^2 - 0) \qquad 7.18$$

donde m es la masa del bloque, M es la masa de la mesa, v es la velocidad del bloque y V la de la mesa. Relacionemos ahora la pérdida de energía mecánica con la fuerza de rozamiento. Si f_c es el módulo de la fuerza de rozamiento, la segunda ley de Newton expresa que

$$-f_c = ma_x$$

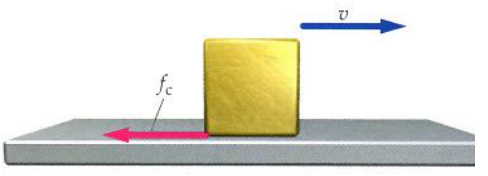


FIGURA 7.24

donde a_x es la aceleración del bloque. Multiplicando los dos miembros de esta ecuación por el desplazamiento del bloque Δx, se obtiene

$$-f_c \Delta x = ma_x \Delta x \qquad 7.19$$

despejando $a_x \Delta x$ de la fórmula para la aceleración constante $2a_x \Delta x = v_f^2 - v_i^2$ y sustituyendo en la ecuación 7.19, resulta

$$-f_c \Delta x = ma_x \Delta x = m(\tfrac{1}{2}v_f^2 - \tfrac{1}{2}v_i^2) = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2 \qquad 7.20$$

La ecuación 7.20 no es más que la aplicación de la relación trabajo del centro de masas-energía cinética de traslación al bloque. Aplicando la misma relación a la mesa, se tiene

$$f_c \Delta X = MA_x \Delta X = M(\tfrac{1}{2}V_f^2 - \tfrac{1}{2}V_i^2) = \tfrac{1}{2}MV_f^2 - 0 \qquad 7.21$$

donde ΔX y A_x son el desplazamiento y aceleración de la mesa. Sumando las ecuaciones 7.20 y 7.21, obtenemos

$$-f_c(\Delta x - \Delta X) = (\tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2) + \tfrac{1}{2}MV_f^2 \qquad 7.22$$

Obsérvese que $\Delta x - \Delta X$ es la distancia, relativa a la mesa, s_{rel} que el bloque recorre al deslizarse sobre la mesa. Obsérvese también que el lado derecho de la ecuación 7.22 es el cambio de la energía mecánica ΔE_{mec} del sistema bloque-mesa. Sustituyendo en la ecuación 7.22, nos da

$$-f_c s_{rel} = \Delta E_{mec} \qquad 7.23$$

La disminución de la energía mecánica del sistema bloque-mesa viene acompañada por un aumento de la energía térmica del sistema. Esta energía aparece tanto en la superficie inferior del bloque como sobre la superficie de la mesa. Reemplazando $\Delta E_{térm}$ por $-\Delta E_{mec}$ (ecuación 7.17), obtenemos

$$f_c s_{rel} = \Delta E_{térm} \qquad 7.24$$

ENERGÍA DISIPADA POR ROZAMIENTO CINÉTICO

donde s_{rel} es la distancia que una de las superficies en contacto recorre en contacto con la otra. Puesto que esa distancia es la misma, cualquiera que sea el sistema de referencia, la ecuación 7.24 será válida en cualquier sistema de referencia, independientemente de si es inercial o no.

Introduciendo este resultado en el teorema trabajo-energía (con $\Delta E_{quím} = \Delta E_{otro} = 0$), obtenemos

$$W_{ext} = \Delta E_{mec} + \Delta E_{térm} = \Delta E_{mec} + f_c s_{rel} \qquad 7.25$$

TEOREMA TRABAJO-ENERGÍA CON ROZAMIENTO

Ejemplo 7.11 Un bloque en una mesa

Una persona empuja con una fuerza horizontal de 25 N un bloque de 4 kg, inicialmente en reposo sobre una mesa horizontal, una distancia de 3 m. El coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y la mesa es 0,35. Determinar (*a*) el trabajo externo sobre el sistema bloque-mesa, (*b*) la energía disipada por rozamiento, (*c*) la energía cinética final del bloque y (*d*) el módulo de la velocidad del bloque.

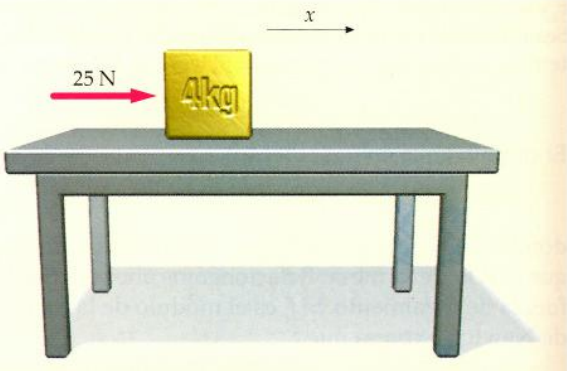


FIGURA 7.25

PLANTEAMIENTO El bloque y la mesa constituyen el sistema (figura 7.25). La persona es externa al sistema, por lo que la fuerza que ejerce es externa. La velocidad final del bloque se deduce de su energía cinética final, la cual determinamos mediante el teorema trabajo-energía con $\Delta E_{quím} = 0$ y $\Delta E_{térm} = f_c \Delta x$. La energía del sistema aumenta por el trabajo externo. Parte del aumento de la energía es en forma de energía cinética y parte en forma de energía térmica.

SOLUCIÓN

(*a*) Hay cuatro fuerzas externas que actúan sobre el sistema, aunque sólo hay una que realiza trabajo. El trabajo externo realizado es el producto de la fuerza de la persona por la distancia que se ha movido el bloque:

$$\begin{aligned}\Sigma W_{ext} &= W_{\text{persona sobre bloque}} + W_{\text{gravedad sobre bloque}} + W_{\text{gravedad sobre mesa}} + W_{\text{suelo sobre mesa}} \\ &= F\,\Delta x + 0 + 0 + 0 = (25\text{ N})(3{,}0\text{ m}) \\ &= \boxed{75\text{ J}}\end{aligned}$$

(*b*) La energía disipada por rozamiento es $f_c\,\Delta x$ (el módulo de la fuerza normal es mg):

$$\begin{aligned}\Delta E_{\text{térm}} &= f_c\,\Delta x = \mu_c F_n\,\Delta x = \mu_c mg\,\Delta x \\ &= (0{,}35)(4{,}0\text{ kg})(9{,}81\text{ N/kg})(3{,}0\text{ m}) \\ &= \boxed{41\text{ J}}\end{aligned}$$

(*c*) 1. Aplicar el teorema trabajo-energía para determinar la energía cinética final:

$$W_{ext} = \Delta E_{mec} + \Delta E_{\text{térm}}$$

2. Como no hay fuerzas conservativas internas que hagan trabajo, el cambio en la energía potencial es cero. El cambio en la energía cinética es igual a la variación de la energía mecánica:

$$\Delta E_{mec} = \Delta U + \Delta K = 0 + (K_f - 0) = K_f$$

3. Sustituir este resultado en el resultado del paso 1 y utilizar después los valores de los apartados (*a*) y (*b*) para determinar K_f:

$$\begin{aligned}W_{ext} &= K_f + \Delta E_{\text{térm}} \\ \text{por lo tanto, } K_f &= W_{ext} - \Delta E_{\text{térm}} \\ &= 75\text{ J} - 41\text{ J} = \boxed{34\text{ J}}\end{aligned}$$

(*d*) El módulo de la velocidad final del bloque está relacionado con su energía cinética. Despejar la velocidad final del bloque:

$$K_f = \tfrac{1}{2}mv_f^2$$

$$\text{con lo cual, } v_f = \sqrt{\frac{2K_f}{m}} = \sqrt{\frac{2(34\text{ J})}{4{,}0\text{ kg}}} = \boxed{4{,}1\text{ m/s}}$$

COMPROBACIÓN Parte de la energía transferida al sistema por la persona termina como energía cinética y otra parte se convierte en energía térmica. Como era de esperar, el cambio en la energía térmica (apartado (*b*)) es positivo y es menor que el trabajo realizado por la fuerza externa (apartado (*a*)).

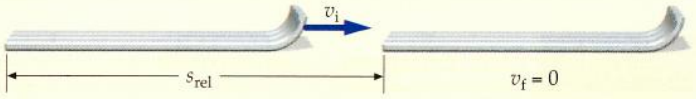
Ejemplo 7.12 Un trineo en la nieve — *Inténtelo usted mismo*

Un trineo se desliza por una superficie horizontal cubierta de nieve con una velocidad inicial de 4 m/s. Si el coeficiente de rozamiento entre el trineo y la nieve es 0,14, ¿qué distancia recorrerá hasta alcanzar el reposo?

PLANTEAMIENTO Elegimos el trineo y la nieve como nuestro sistema y aplicamos el teorema trabajo-energía.

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	Respuestas
1. Dibujar el sistema en sus configuraciones inicial y final (figura 7.26).	 FIGURA 7.26
2. Aplicar el teorema trabajo-energía. Establecer el cambio a energía térmica debido a la fuerza de rozamiento.	$W_{ext} = \Delta E_{mec} + \Delta E_{\text{term}} = (\Delta U + \Delta K) + f_c s_{rel}$
3. Determinar f_c. La fuerza normal es igual a mg.	$f_c = \mu_c F_n = \mu_c mg$
4. En este sistema no hay fuerzas externas ni fuerzas internas conservativas que hagan trabajo. Eliminar dos términos del resultado del paso 2 teniendo en cuenta estas dos observaciones.	$W_{ext} = 0$ y $\Delta U = 0$ por tanto, $W_{ext} = \Delta U + \Delta K + f_c s_{rel}$ $0 = 0 + \Delta K + \mu_c mg\, s_{rel}$
5. Expresar el cambio en la energía cinética en función de la masa y de la velocidad inicial, y obtener Δs.	$s_{rel} = \dfrac{v^2}{2\mu_c g} = \boxed{5{,}8\text{ m}}$

COMPROBACIÓN La expresión para el desplazamiento que aparece en el paso 5 es dimensionalmente correcta. El coeficiente de rozamiento μ_c es adimensional, y v^2/g tiene dimensiones de longitud.

Ejemplo 7.13 Un tobogán

Una niña de masa 40 kg se desliza hacia abajo por un tobogán de 8 m de largo inclinado 30°. El coeficiente de rozamiento cinético entre la niña y el tobogán es $\mu_c = 0{,}35$. Si la niña parte del reposo desde el punto más alto del tobogán, a una altura de 4 m sobre el suelo, ¿qué velocidad tiene al llegar al suelo?

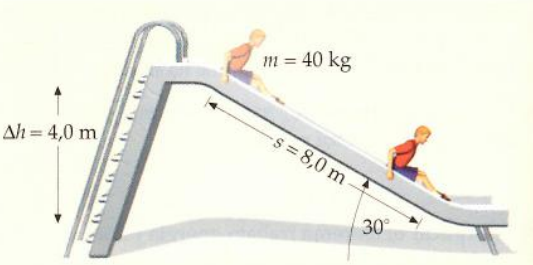


FIGURA 7.27

PLANTEAMIENTO Cuando la niña se desliza hacia abajo, parte de su energía potencial se convierte en cinética y parte en energía térmica debido al rozamiento. Nuestro sistema es niña-tobogán-Tierra. Aplicamos el teorema trabajo-energía.

SOLUCIÓN

1. Se dibuja un esquema del sistema mostrando sus configuraciones inicial y final (figura 7.27):
2. Se escribe la ecuación de conservación de la energía: $W_{ext} = \Delta E_{mec} + \Delta E_{térm} = (\Delta U + \Delta K) + f_c s_{rel}$
3. La energía cinética inicial es cero. La velocidad al final del tobogán está relacionada con la energía cinética final: $\Delta K = K_i - 0 = \frac{1}{2}mv_f^2$
4. Sobre el sistema no actúan fuerzas externas: $W_{ext} = 0$
5. El cambio de la energía potencial está relacionado con el cambio de altura Δh (que es negativo): $\Delta U = mg\,\Delta h$
6. Para determinar f_c aplicamos la segunda ley de Newton a la niña. Primero se dibuja el diagrama de fuerzas (figura 7.28):

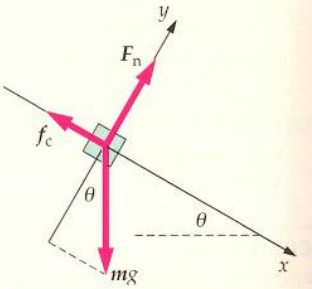


FIGURA 7.28

7. Después, se aplica la segunda ley de Newton. La componente normal de la aceleración es cero. Para determinar F_n tenemos en cuenta las componentes en la dirección normal y obtenemos f_c teniendo en cuenta que $f_c = \mu_c F_n$: $F_n - mg\cos\theta = 0$ por lo tanto, $f_c = \mu_c F_n = \mu_c mg\cos\theta$
8. La relación entre $s = s_{rel}$ y Δh es trigonométrica: $|\Delta h| = s\,\text{sen}\,\theta$
9. Sustituyendo en el resultado del paso 2: $0 = mg\,\Delta h + \frac{1}{2}mv_f^2 + f_c s = -mgs\,\text{sen}\,\theta + \frac{1}{2}mv_f^2 + \mu_c mg\cos\theta s$
10. Despejando para v_f, se obtiene: $v_f^2 = 2gs(\text{sen}\,\theta - \mu_c\cos\theta) = 2(9{,}81\ \text{m/s}^2)(8{,}0\ \text{m})(\text{sen}\,30° - 0{,}35\cos 30°)$
$= 30{,}9\ \text{m}^2/\text{s}^2$
y entonces $v_f = \boxed{5{,}6\ \text{m/s}}$

COMPROBACIÓN Como era de esperar la expresión para v_f^2 del paso 10 es independiente de la masa de la niña. Esto era así porque todas las fuerzas que actúan sobre la niña son proporcionales a la masa m.

PROBLEMA PRÁCTICO 7.8 Utilizar el extremo inferior del tobogán como origen del sistema de referencia y origen de la energía potencial. Para el sistema Tierra-niña-tobogán, calcular (*a*) la energía mecánica inicial, (*b*) la energía mecánica final y (*c*) la energía disipada por rozamiento.

Ejemplo 7.14 Dos bloques y un muelle

Un bloque de 4 kg cuelga de una cuerda ligera que, a través de una polea sin rozamiento y sin masa, está conectada a un bloque de 6 kg que descansa sobre una plataforma. El coeficiente de rozamiento cinético es $\mu_c = 0{,}2$. El bloque de 6 kg se empuja contra un muelle. El muelle tiene una constante elástica de 180 N/m y se comprime 30 cm. Determinar la velocidad (módulo) de los bloques cuando el muelle se libera y el bloque de 4 kg cae una distancia de 40 cm. (Suponer que el bloque de 6 kg se encuentra inicialmente a 40 cm de la polea.)

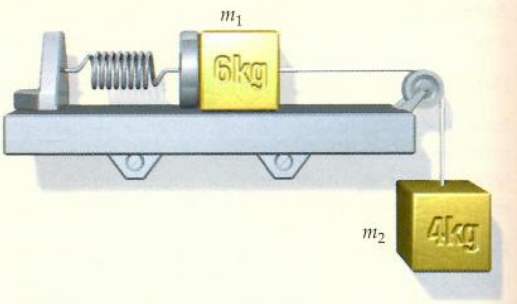


FIGURA 7.29 El sistema está constituido por todos los elementos que se muestran más la Tierra.

PLANTEAMIENTO La velocidad de los bloques se deduce de su energía cinética final. Consideremos que el sistema está formado por todo lo que se muestra en la figura 7.29 más la Tierra. Este sistema tiene energía potencial gravitatoria y elástica. Aplicar el teorema trabajo-energía para determinar la energía cinética de los bloques. A continuación, utilizar ese resultado para calcular su velocidad.

SOLUCIÓN

1. El sistema está constituido por todos los elementos que se muestran en la figura más la Tierra. Plantear la ecuación de la conservación de la energía del sistema:

$$W_{ext} = \Delta E_{mec} + \Delta E_{térm}$$
$$= (\Delta U_s + \Delta U_g + \Delta E_c) + f_c s_{rel}$$

2. Hágase un dibujo de del sistema (figura 7.30) que incluya las configuraciones inicial y final:

3. Sobre el sistema no hay fuerzas externas:

$$W_{ext} = 0$$

4. La energía potencial del muelle depende de su constante k y de su alargamiento x. (Si el muelle se comprime, x es negativa). La energía potencial gravitacional depende de la altura del bloque 2:

$$U_s = \tfrac{1}{2}kx^2$$
$$U_g = mgy_2$$

5. Construir una tabla donde se incluyan los términos de la energía mecánica iniciales, cuando el muelle está comprimido 30 cm, y finales, cuando el bloque se ha movido una distancia $s = 40$ cm y el muelle se ha extendido. Hacer que la energía potencial gravitatoria de la configuración inicial sea cero. Añadir la diferencia (final menos inicial) entre ambas expresiones:

	Final	Inicial	Diferencia
U_s	0	$\frac{1}{2}kx_i^2$	$-\frac{1}{2}kx_i^2$
U_g	$-m_2gs$	0	$-m_2gs$
K	$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2$	0	$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2$

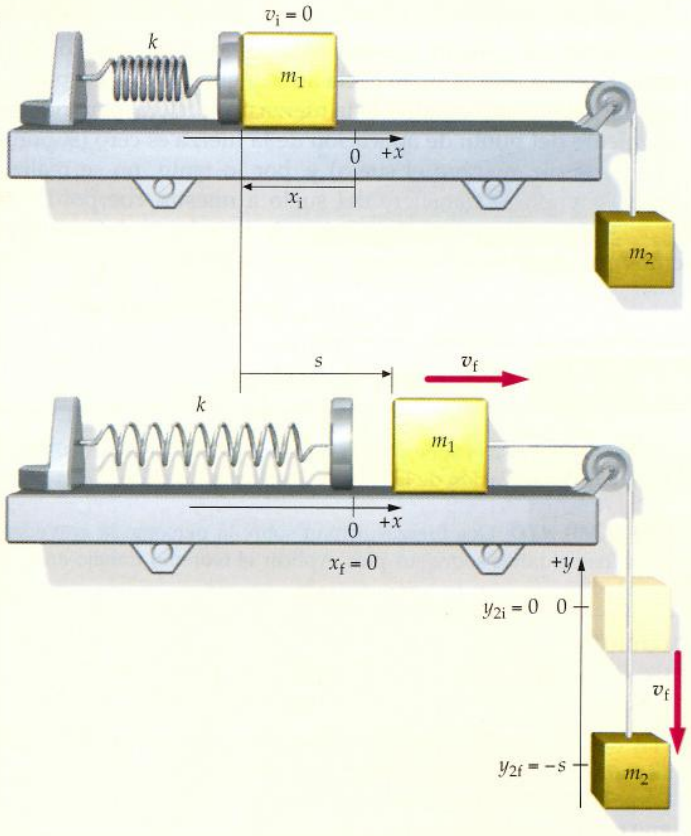


FIGURA 7.30 El sistema está constituido por todos los elementos mostrados más la Tierra. Se muestra el sistema en sus configuraciones inicial y final.

6. Determinar una expresión para f_c que incluya μ_c:

$$f_c = \mu_c m_1 g$$

7. Sustituir los resultados de los pasos 3-6 en el resultado del paso 1.

$$0 = -\tfrac{1}{2}kx_i^2 - m_2gs + \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 + \mu_c m_1 gs$$

8. Despejar v_f^2 a partir del paso 7 y, finalmente, obtener v_f sustituyendo los valores numéricos:

$$v_f^2 = \frac{kx_i^2 + 2(m_2 - \mu_c m_1)gs}{m_1 + m_2}$$

por lo tanto, $v_f = \boxed{2{,}0 \text{ m/s}}$

COMPROBACIÓN Si $m_2 = \mu_c = 0$, entonces la velocidad final no dependerá ni de g ni de μ_c (ver paso 8). Esto era de esperar, pues m_2g es la fuerza gravitacional sobre m_2 que hace tirar del sistema y $\mu_c m_1 g$ es la fuerza de rozamiento sobre m_1 opuesta al avance del sistema. Si esas dos fuerzas se equilibran, los efectos de la gravedad y del rozamiento no afectarán al resultado de la velocidad final.

OBSERVACIÓN Esta solución supone que la cuerda permanece tensa en todo momento, lo cual será cierto si la aceleración de m_1 es menor que g, es decir, si la fuerza neta sobre m_1 es menor que $m_1g = (6 \text{ kg})(9{,}81 \text{ N/kg}) = 58{,}9$ N. Inicialmente, la fuerza ejercida por el muelle sobre m_1 tiene el módulo $k\,\Delta x_1 = (180 \text{ N/m})(0{,}3 \text{ m}) = 54{,}0$ N, y la fuerza de rozamiento $f_c = \mu_c m_1 g = 0{,}2(58{,}9 \text{ N}) = 11{,}8$ N. Estas fuerzas se combinan para dar una fuerza de 42,2 N dirigida hacia la derecha. Como la fuerza del muelle decrece a medida que el bloque m_1 se mueve hacia delante, la aceleración del bloque de 6 kg siempre será menor que g y la cuerda permanecerá tensa en todo momento.

PROBLEMAS EN LOS QUE INTERVIENE LA ENERGÍA QUÍMICA

A veces, la energía química interna de un sistema se transforma en energía mecánica y térmica sin que ningún agente exterior realice trabajo. Por ejemplo, al andar empujamos con los pies el suelo hacia atrás y el suelo nos empuja hacia delante con la fuerza de rozamiento estático. Esta fuerza nos acelera, pero no realiza trabajo. El desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza es cero (suponiendo que los zapatos no se deslizan sobre el suelo) y, por lo tanto, no se realiza ningún trabajo y ninguna energía se transfiere del suelo a nuestro cuerpo. La energía cinética del cuerpo procede de la transformación de la energía química procedente de los alimentos que ingerimos. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.15 Subiendo escaleras — *Conceptual*

Una persona de masa m sube por una escalera hasta una altura h. Analizar la aplicación del principio de conservación de la energía al sistema formado por la persona sola.

(Corbis.)

PLANTEAMIENTO Dos fuerzas actúan sobre la persona: la gravedad y la fuerza de contacto de los peldaños sobre sus pies. Aplicar el teorema trabajo-energía sobre el sistema (la persona).

SOLUCIÓN

1. La persona es el sistema. Expresar el teorema trabajo-energía (ecuación 7.16) para este sistema: $W_{ext} = \Delta E_{sist} = \Delta E_{mec} + \Delta E_{térm} + \Delta E_{quím}$
2. Hay dos fuerzas externas que actúan sobre el sistema, la fuerza de la gravedad y la fuerza de los peldaños sobre los pies. La fuerza de gravedad realiza un trabajo negativo, ya que su dirección es $-h$. La fuerza de los peldaños no efectúa ningún trabajo porque el punto de aplicación, las suelas de los zapatos del hombre, no se mueve mientras se aplica la fuerza: $W_{ext} = -mgh$
3. La persona sola es el sistema. Como la configuración de la persona no cambia (sigue estando erguida), cualquier cambio de su energía mecánica es un cambio de su energía cinética, que es la misma, al inicio que al final: $\Delta E_{mec} = 0$
4. Aplicando estos resultados en el teorema trabajo-energía: $W_{ext} = \Delta E_{mec} + \Delta E_{térm} + \Delta E_{quím} + \Delta E_{otras}$
   luego, $-mgh = 0 + \Delta E_{térm} + \Delta E_{quím} + 0$
   o $\Delta E_{quím} = -(mgh + \Delta E_{térm})$

COMPROBACIÓN Es de esperar que la energía química de la persona decrezca. De acuerdo con el resultado del paso 4, el cambio de la energía es negativa como se esperaba.

OBSERVACIÓN Si no se realizaran cambios de energía térmica, la energía química del hombre disminuiría en mgh. Como el rendimiento del cuerpo es relativamente bajo, la cantidad de energía química transformada en el cuerpo del hombre es considerablemente mayor que mgh. La disminución de la energía química almacenada es mgh más algo de energía térmica. El exceso de energía será posiblemente transferido en forma de calor a los alrededores.

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 7.1

Analizar la conservación de la energía en el sistema hombre más Tierra.

Ejemplo 7.16 Yendo cuesta arriba

Un coche de 1000 kg se mueve a una velocidad constante de 100 km/h = 28 m/s por una pendiente hacia arriba del 10%. (Es decir, la carretera se eleva 1 m por cada 10 m de distancia horizontal, lo que equivale a un ángulo de inclinación θ, tal que tg θ = 0,1 (figura 7.31)). (*a*) Si la eficiencia es del 15%, ¿cuál es la tasa de consumo de energía química del sistema coche-Tierra-atmósfera? (La eficiencia es la fracción de energía química consumida que aparece en forma de energía mecánica.) (*b*) ¿A qué ritmo se genera energía térmica?

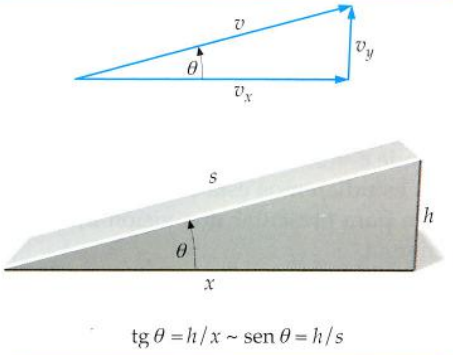


FIGURA 7.31

PLANTEAMIENTO Parte de la energía incrementa la energía potencial del coche cuando éste asciende por la cuesta, y otra parte aumenta la energía térmica, gran parte de la cual se expulsa por el tubo de escape. Para resolver el problema, consideraremos que el sistema está formado por el coche, la cuesta, el aire y la Tierra. Luego, podemos aplicar el teorema trabajo-energía para calcular el ritmo al que se genera la energía térmica.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. La tasa con que se pierde energía química, es decir, la potencia suministrada por el motor, es igual al valor absoluto del cambio de energía química por unidad de tiempo:

$$\text{Tasa de consumo de la energía química} = \frac{|\Delta E_{\text{quím}}|}{\Delta t}$$

2. El incremento de energía mecánica es igual al 15% de la disminución de la energía química:

$$\Delta E_{\text{mec}} = 0{,}150\,|\Delta E_{\text{quím}}|$$

3. Determinar la tasa de consumo de energía química:

$$\frac{|\Delta E_{\text{quím}}|}{\Delta t} = \frac{1}{0{,}150}\frac{\Delta E_{\text{mec}}}{\Delta t}$$

4. El coche se mueve a velocidad constante, por lo que $\Delta K = 0$ y $\Delta E_{\text{mec}} = \Delta U$. Relacionar el cambio de la energía mecánica con la variación de altura Δh y sustituir en el resultado del paso 3. (La energía química decrece):

$$\Delta E_{\text{mec}} = mg\,\Delta h$$

$$\text{por lo tanto, } \frac{\Delta E_{\text{quím}}}{\Delta t} = -\frac{1}{0{,}150}\frac{mg\,\Delta h}{\Delta t}$$

5. Convertir los incrementos en derivadas, es decir, hacer el límite cuando Δt tiende a cero:

$$\frac{dE_{\text{quím}}}{dt} = -\frac{1}{0{,}150}\frac{mg\,dh}{dt}$$

6. La tasa de cambio de h es v_y, que está relacionada con el módulo de la velocidad v tal como se muestra en la figura 7.31:

$$\frac{dh}{dt} = v_y = v\,\text{sen}\,\theta$$

7. Como el ángulo θ es pequeño podemos aproximar sen θ por tg θ:

$$\text{sen}\,\theta \approx \text{tg}\,\theta = 0{,}100$$

8. Calcular la tasa de consumo de energía química:

$$\frac{dE_{\text{quím}}}{dt} = -\frac{mg}{0{,}15}v\,\text{sen}\,\theta \approx -\frac{(1000\text{ kg})(9{,}81\text{ N/kg})}{0{,}15}(27{,}8\text{ m/s})0{,}100$$

$$\approx -182\text{ kW}$$

$$\therefore\ -\frac{dE_{\text{quím}}}{dt} \approx \boxed{182\text{ kW}}$$

(*b*) 1. Plantear la relación trabajo-energía:

$$W_{\text{ext}} = \Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{térm}} + \Delta E_{\text{quím}}$$

2. Hacer W_{ext} igual a cero, dividir ambos lados por Δt, convertir los incrementos a derivadas y calcular $dE_{\text{térm}}/dt$:

$$0 = \frac{dE_{\text{mec}}}{dt} + \frac{dE_{\text{térm}}}{dt} + \frac{dE_{\text{quím}}}{dt}$$

$$\text{por lo tanto, } \frac{dE_{\text{térm}}}{dt} = -\frac{dE_{\text{mec}}}{dt} - \frac{dE_{\text{quím}}}{dt} = 0{,}150\frac{dE_{\text{quím}}}{dt} - \frac{dE_{\text{quím}}}{dt}$$

$$= -0{,}850\frac{dE_{\text{quím}}}{dt} = 0{,}850(182\text{ kW}) = \boxed{154\text{ kW}}$$

COMPROBACIÓN Las diferencias relativas de los resultados de los apartados (*a*) y (*b*) se deben, como era de esperar, al 15% de la eficiencia.

OBSERVACIÓN Los vehículos propulsados por motores de gasolina suelen tener una eficiencia del 15%. Alrededor del 85% de la energía química se transforma en energía térmica, la mayor parte de la cual sale por el tubo de escape. También se produce energía térmica a causa del rozamiento por rodadura y de la resistencia del aire. El contenido energético de la gasolina es de 31,8 MJ/L.

7.4 MASA Y ENERGÍA

En 1905, Albert Einstein publicó su teoría especial de la relatividad, que incluye su famosa ecuación

$$E = mc^2 \qquad 7.26$$

donde $c = 3 \times 10^8$ m/s es la velocidad de la luz en el vacío. En capítulos posteriores estudiaremos esta teoría con detalle. Sin embargo, utilizamos aquí esta ecuación para presentar una visión más completa y moderna de la conservación de la energía.

De acuerdo con la ecuación 7.26, una partícula o sistema de masa m posee la energía en "reposo" mc^2. Esta energía es intrínseca a la partícula. Consideremos el positrón, partícula emitida en un proceso nuclear llamado desintegración beta. Los positrones y los electrones tienen idéntica masa, pero carga eléctrica igual y de signo contrario. Cuando un positrón choca con un electrón, en la materia tiene lugar la aniquilación electrón-positrón. La aniquilación es un proceso en el cual el electrón y el positrón desaparecen, y su energía aparece en forma de radiación electromagnética. Si las dos partículas están inicialmente en reposo, la energía de la radiación electromagnética es igual a la energía en reposo del electrón más la del positrón.

En física atómica y nuclear, las energías se expresan normalmente en unidades de electronvolts (eV) o megaelectronvolts (1 MeV = 10^6 eV). Así, una unidad que resulta útil para expresar las masas de las partículas atómicas es eV/c^2 o MeV/c^2. La tabla 7.1 relaciona las energías en reposo (y por lo tanto, las masas) de algunas partículas elementales y núcleos ligeros. La energía total en reposo de un positrón más un electrón es 2(0,511 MeV), que es la energía radiante emitida en el proceso de aniquilación entre el electrón y el positrón en el sistema de referencia en el cual el electrón y el positrón están inicialmente en reposo.

La energía en reposo de un sistema puede consistir en la energía potencial u otras energías internas del sistema, además de las energías en reposo intrínsecas de las partículas que lo forman. Si el sistema en reposo absorbe energía, ΔE, y permanece en reposo, entonces su energía en reposo crece ΔE y su masa crece ΔM, donde

$$\Delta M = \frac{\Delta E}{c^2} \qquad 7.27$$

Tabla 7.1 Energías en reposo* de algunas partículas elementales y núcleos ligeros†

Partícula	Símbolo	Energía en reposo (MeV)	
Electrón	e^-	0,5110	
Positrón	e^+	0,5110	
Protón	p	938,272	
Neutrón	n	939,565	
Deuterón	d	1875,613	
Tritón	t	2808,921	
Helión	h	2808,391	
Partícula alfa	α	3727,379	

* Los valores de la tabla se han tomado de CODATA 2002 (excepto para el valor del tritón).

† El protón, deuterón y tritón son idénticos a los núcleos de ^{1}H, ^{2}H, y ^{3}H, respectivamente, y el helión y la partícula alfa son idénticos a los núcleos de ^{3}He y ^{4}He, respectivamente.

Consideremos dos bloques de 1 kg conectados por un muelle de constante elástica k. Si estiramos el muelle una distancia x, la energía potencial del sistema crece en $\Delta U = \frac{1}{2}kx^2$. De acuerdo con la ecuación 7.27, la masa del sistema se incrementa también en $\Delta M = \Delta U/c^2$. Como c es un número extraordinariamente grande, este incremento de masa no puede observarse en sistemas macroscópicos. Por ejemplo, supongamos $k = 800\ \text{N/m}$ y $x = 10\ \text{cm} = 0{,}1\ \text{m}$. La energía potencial del sistema formado por el muelle es, por tanto, $\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(800\ \text{N/m})(0{,}100\ \text{m})^2 = 4{,}00\ \text{J}$. El incremento correspondiente de masa del sistema es $\Delta M = \Delta U/c^2 = 4{,}00\ \text{J}/(3{,}00 \times 10^8\ \text{m/s})^2 = 4{,}44 \times 10^{-17}\ \text{kg}$. El incremento relativo está dado por

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{4{,}44 \times 10^{-17}\ \text{kg}}{2{,}00\ \text{kg}} = 2{,}22 \times 10^{-17}$$

que es demasiado pequeño para poder ser observado. Sin embargo, en las reacciones nucleares, los cambios energéticos constituyen frecuentemente una fracción apreciable de la energía en reposo del sistema. Consideremos, por ejemplo, el deuterón o núcleo del deuterio, que es un isótopo del hidrógeno, llamado también hidrógeno pesado. El deuterón está formado por un protón y un neutrón ligados conjuntamente. Según la tabla 7.1, la masa del protón es $938{,}28\ \text{MeV}/c^2$ y la masa del neutrón $939{,}57\ \text{MeV}/c^2$. La suma de ambas masas es $1877{,}85\ \text{MeV}/c^2$. Sin embargo, la masa del deuterón es $1875{,}63\ \text{MeV}/c^2$, o sea, inferior a la suma de las dos partículas que lo constituyen en $2{,}22\ \text{MeV}/c^2$. Obsérvese que esta diferencia de masa es mucho mayor que las incertidumbres inherentes a las medidas de estas masas, y que la diferencia relativa de $\Delta M/M \approx 1{,}2 \times 10^{-3}$ está casi 14 órdenes de magnitud por encima del 2×10^{-17} tratado anteriormente para el sistema muelle-bloques.

Las moléculas de agua pesada (óxido de deuterio) se producen en el agua previamente enfriada de un reactor nuclear, cuando neutrones chocan con los núcleos de hidrógeno (protones) de las moléculas de agua. Cuando un neutrón lento es capturado por un protón, se libera una energía de 2,22 MeV en forma de radiación electromagnética. Así, la masa de un átomo de deuterio es $2{,}22\ \text{MeV}/c^2$ menor que la suma de las masas de un átomo de ^1H y un neutrón aislados. (El superíndice 1 es el número másico del isótopo. Así, el ^1H, conocido como protio, es un isótopo del hidrógeno que no tiene neutrones.)

Este proceso puede invertirse, rompiendo un deuterón en sus partes constituyentes, si se transfieren por lo menos 2,22 MeV de energía al deuteron con radiación electromagnética o mediante colisiones con otras partículas energéticas. Toda la energía transferida que sobrepase los 2,22 MeV aparece como energía cinética del protón y del neutrón resultantes.

La energía necesaria para romper un núcleo en sus partes constituyentes se denomina **energía de enlace** del núcleo. El deuterón es un ejemplo de un sistema ligado. Un sistema está ligado si no tiene la energía suficiente como para romperlo en partes separables. Su energía en reposo es menor que la energía en reposo de sus partes constituyentes, de tal modo que es necesario añadir energía al sistema para romperlo. Si la energía en reposo de un sistema es superior a la energía en reposo de sus partes, se dice que el sistema no está ligado. Un ejemplo es el uranio-236, que se rompe o **fisiona** en dos núcleos más pequeños.* La suma de las masas de las partes resultantes es inferior a la masa del núcleo original. Así, la masa del sistema decrece y se libera energía.

En la fusión nuclear, dos núcleos muy ligeros, tales como el deuterón y el tritón (núcleo del isótopo del hidrógeno llamado tritio) se unen (se fusionan) entre sí. La masa en reposo del núcleo resultante es inferior a la masa de las partes originales y, por tanto, se libera energía. En una reacción química que produce energía, como por ejemplo la combustión del carbón, el decrecimiento de la masa es del orden de $1\ \text{eV}/c^2$ por átomo. Este valor es más de un millón de veces más pequeño que las variaciones de masa en las reacciones nucleares y no se observa fácilmente.

* El uranio-236, que también puede escribirse en la forma ^{236}U, se produce en un reactor nuclear cuando el isótopo estable uranio-235 absorbe un neutrón.

Ejemplo 7.17 Energía de enlace

Un átomo de hidrógeno formado por un protón y un electrón tiene una energía de enlace de 13,6 eV. ¿En qué porcentaje la masa del protón más la del electrón es superior a la del átomo de hidrógeno?

PLANTEAMIENTO La masa de un protón m_p más la masa de un electrón m_e es igual a la masa del átomo de hidrógeno más la energía de enlace E_b dividido por c^2. Así, la diferencia fraccional entre $m_e + m_p$ y la masa del átomo de hidrógeno es el cociente entre E_b/c^2 y $m_e + m_p$.

SOLUCIÓN

1. La diferencia fraccional es el cociente de masas entre la energía de enlace E_b/c^2 y $m_e + m_p$:
$$\text{DF} = \frac{(m_e + m_p) - m_H}{m_e + m_p} = \frac{E_b/c^2}{m_e + m_p} = \frac{13{,}6\ \text{eV}/c^2}{m_e + m_p}$$
2. Tomar las masas en reposo del protón y el electrón de la tabla 7.1:
$$m_p = 938{,}28\ \text{MeV}/c^2$$
$$m_e = 0{,}511\ \text{MeV}/c^2$$
3. Sumar estas masas:
$$m_p + m_e = 938{,}79\ \text{MeV}/c^2$$
4. La masa en reposo del átomo de hidrógeno es inferior a este valor en 13,6 eV/c^2. La diferencia fraccional es:
$$\text{DF} = \frac{13{,}6\ \text{eV}/c^2}{938{,}79 \times 10^6\ \text{eV}/c^2} = 1{,}45 \times 10^{-8} = \boxed{1{,}45 \times 10^{-6}\ \%}$$

COMPROBACIÓN Las unidades han de ser correctas. Si expresamos todas las masas en unidades de eV/c^2, se obtiene que la diferencia fraccional es adimensional.

OBSERVACIÓN Esta diferencia de masa es demasiado pequeña para ser medida directamente. Sin embargo, las energías de enlace pueden medirse con exactitud y, en consecuencia, la diferencia de masa se puede obtener a partir de la expresión $E_b = (\Delta m)c^2$.

Ejemplo 7.18 Fusión nuclear — *Inténtelo usted mismo*

En una reacción típica de fusión nuclear, un núcleo de tritio (t) y un núcleo de deuterio (d) se fusionan para formar un núcleo de helio (α) más un neutrón, según la reacción d + t → α + n. ¿Cuánta energía se libera por deuterio en esta reacción de fusión?

PLANTEAMIENTO Como en este proceso se libera energía, la energía en reposo total de las partículas iniciales debe ser mayor que la de las partículas finales. Esta diferencia es igual a la energía liberada.

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	Respuestas
1. Tomar los valores de las energías en reposo del d y t de la tabla 7.1 y sumarlas para conocer la energía en reposo total inicial.	$E_{\text{inicial}} = 1875{,}613\ \text{MeV} + 2808{,}921\ \text{MeV} = 4684{,}534\ \text{MeV}$
2. Hacer lo mismo con el α y el n para determinar la energía en reposo final.	$E_{\text{final}} = 3727{,}379\ \text{MeV} + 939{,}565\ \text{MeV} = 4666{,}944\ \text{MeV}$
3. La energía liberada se determina a partir de $E_{\text{liberada}} = E_0\,(\text{inicial}) - E_0\,(\text{final})$.	$E_{\text{liberada}} = 4684{,}534\ \text{MeV} - 4666{,}944\ \text{MeV} = \boxed{17{,}59\ \text{MeV} \approx 17{,}6\ \text{MeV}}$

COMPROBACIÓN La energía liberada es una pequeña fracción de la energía inicial. Esta fracción es 17,6 MeV/4685 MeV = $3{,}76 \times 10^{-3}$, que es del mismo orden de magnitud que la fracción de masa que aumenta durante la fusión de un protón y un neutrón que fue estudiado al inicio de este apartado sobre energía nuclear. Entonces, 17,6 MeV es un resultado razonable para la emisión de energía cuando el deuterio y el helio fusionan para formar una partícula alfa.

OBSERVACIÓN Esta y otras reacciones de fusión tienen lugar en el Sol. La energía liberada alcanza la Tierra y es, en definitiva, responsable de la vida en el planeta. La energía emitida constantemente por el Sol va acompañada por una disminución constante de su masa en reposo.

MECÁNICA NO-RELATIVISTA (NEWTONIANA) Y RELATIVIDAD

Cuando la velocidad de un partícula se aproxima a una fracción significativa de la velocidad de la luz, la segunda ley de Newton deja de cumplirse y debemos modificar la mecánica newtoniana según la teoría einsteniana de la relatividad. El criterio de validez de la mecánica newtoniana también puede establecerse en función de la energía de una partícula. En la mecánica no-relativista (newtoniana), la energía cinética de una partícula que se mueve con velocidad v es

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}mc^2\frac{v^2}{c^2} = \tfrac{1}{2}E_0\frac{v^2}{c^2}$$

donde $E_0 = mc^2$ es la energía en reposo de la partícula. Despejando,

$$\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{2K}{E_0}}$$

La mecánica newtoniana es válida si la velocidad de la partícula es mucho menor que la velocidad de la luz o, dicho de otra forma, si la energía cinética de la partícula es mucho menor que su energía en reposo.

PROBLEMA PRÁCTICO 7.9

Un satélite orbita cercano a la Tierra a una velocidad de 8 km/s. ¿A qué fracción de la velocidad de la luz corresponde esta velocidad? ¿Qué velocidad en millas/s es equivalente al 1% de c?

7.5 CUANTIZACIÓN DE LA ENERGÍA

Cuando un sistema que permanece en reposo absorbe energía, su energía interna aumenta. (Energía interna es sinónimo de energía en reposo. Es la energía total del sistema menos cualquier energía cinética asociada al movimiento del centro de masas del sistema.) Parecería lógico que se pudiera cambiar la energía interna de un sistema ligado como el sistema solar o el átomo de hidrógeno mediante una cantidad arbitraria de energía; sin embargo, se ha comprobado que esto no es cierto. Esto es especialmente perceptible para sistemas microscópicos como moléculas, átomos y núcleos atómicos. La energía interna de un sistema microscópico sólo puede aumentar en cantidades discretas.

Si tenemos dos bloques conectados a un muelle (figura 7.32) por sus extremos y tiramos de ellos, realizamos trabajo sobre el sistema muelle-bloques y su energía potencial crece. Si, a continuación, liberamos los bloques, éstos oscilan hacia atrás y adelante. La energía de oscilación E, que es la energía cinética de movimiento de los bloques, más la energía potencial debida al alargamiento del muelle, es igual a la energía potencial original. Con el tiempo, la energía del sistema decrece a causa de los efectos de amortiguación producidos por el rozamiento y la resistencia del aire. Con la precisión de nuestras medidas, la energía decrece continuamente. Finalmente, toda la energía se disipa y la energía de oscilación se hace cero.

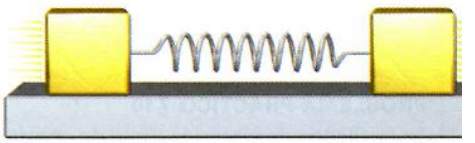


FIGURA 7.32

Consideremos ahora una molécula diatómica tal como el oxígeno molecular, O_2. La fuerza de atracción entre los dos átomos de oxígeno varía casi linealmente con el cambio en la separación (para pequeños cambios) de una forma muy parecida a lo que ocurre en un muelle. Si una molécula diatómica se hace oscilar con cierta energía E, ésta decrece con el tiempo cuando la molécula irradia o interacciona con los alrededores, pero el decrecimiento *no es continuo*, como así lo corroboran medidas de gran precisión. La energía disminuye en saltos finitos y el estado energético más bajo, llamado **estado fundamental**, no tiene energía cero. Se dice que la ener-

gía de vibración de una molécula diatómica está **cuantizada**; es decir, la molécula sólo puede absorber o ceder energía en ciertas cantidades, llamadas **cuantos**.

Cuando los bloques unidos por un muelle o las moléculas diatómicas oscilan, el tiempo transcurrido durante una oscilación se denomina periodo, T. La inversa del periodo es la frecuencia de oscilación, $f = 1/T$. Como veremos en el capítulo 14, el periodo y la frecuencia de un oscilador no dependen de la energía de oscilación. Cuando disminuye la energía, la frecuencia no se modifica. La figura 7.33 muestra un **diagrama de niveles energéticos** de un oscilador. Las energías permitidas están casi igualmente espaciadas y vienen dadas por*

$$E_n = (n + \tfrac{1}{2})hf \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad 7.28$$

donde f es la frecuencia de oscilación y h una constante fundamental de la naturaleza llamada constante de Planck:†

$$h = 6{,}626 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} = 4{,}136 \times 10^{-15}\ \text{eV} \cdot \text{s} \qquad 7.29$$

El número entero n se denomina **número cuántico**. La energía más baja posible es la **energía del estado fundamental**, $E_0 = \frac{1}{2}hf$.

Los sistemas microscópicos frecuentemente ganan o pierden energía absorbiendo o emitiendo radiación electromagnética. Por el principio de conservación de la energía, si E_i y E_f son las energías inicial y final del sistema, la energía emitida o absorbida es

$$E_{\text{rad}} = |E_f - E_i|$$

Como las energías E_i y E_f del sistema están cuantizadas, la energía irradiada también lo está.‡ El cuanto de la energía de radiación se llama **fotón**. La energía de un fotón viene dada por

$$E_{\text{fotón}} = hf \qquad 7.30$$

donde f es la frecuencia de la radiación electromagnética.§

Por lo que sabemos, todos los sistemas ligados presentan cuantización de la energía. En los sistemas ligados macroscópicos, los saltos entre niveles energéticos son tan pequeños que resultan inobservables. Por ejemplo, las frecuencias de oscilación típicas de dos bloques sobre un muelle son del orden de 1 a 10 veces por segundo. Si $f = 10$ oscilaciones por segundo, el espaciado entre los niveles energéticos es $hf = (6{,}626 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}) \times (10/\text{s}) \approx 7 \times 10^{-33}$ J. Como la energía de un sistema macroscópico es del orden de 1 J, un salto cuántico de 10^{-33} J es demasiado pequeño para ser observado. Dicho de otro modo, si la energía de un sistema es 1 J, el valor de n es del orden de 10^{32} y los cambios de una o dos unidades cuánticas no serán observables.

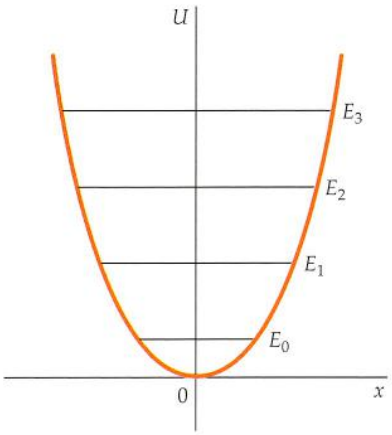


FIGURA 7.33

PROBLEMA PRÁCTICO 7.10

La frecuencia de vibración típica de una molécula diatómica es de 10^{14} vibraciones por segundo. Utilizar la ecuación 7.28 para determinar el espaciado entre energías permitidas.

¡ La energía típica de una molécula diatómica es de 10^{-19} J. Por tanto, los cambios en la energía de oscilación son del mismo orden que la energía de la molécula y la cuantización es claramente observable.

* Una molécula diatómica también puede tener energía rotacional. Esta energía, como era de esperar, está también cuantizada, pero los niveles energéticos no están igualmente espaciados y la energía más baja posible es cero. En los capítulos 9 y 10, estudiaremos la energía rotacional.

† En 1900, el físico alemán Max Planck introdujo esta constante como un instrumento de cálculo para explicar las discrepancias entre los resultados experimentales y teóricos sobre el espectro de la radiación del cuerpo negro. El significado de la constante de Planck no fue apreciado por Planck ni por sus contemporáneos científicos, hasta que Einstein en 1905 postuló que la energía de la radiación electromagnética no es continua, sino que tiene lugar en paquetes de tamaño hf.

‡ Históricamente, la cuantización de la radiación electromagnética propuesta por Max Planck y Albert Einstein fue el primer "descubrimiento" de la cuantización de la energía.

§ La radiación electromagnética incluye la luz, las microondas, las ondas de radio y de televisión, los rayos X y los rayos gamma. Todas estas radiaciones difieren entre sí en su frecuencia.

Soplando aire cálidos

Los parques eólicos están desperdigados por la costa danesa, las planicies del alto medio-oeste de EE.UU. y las montañas desde California hasta Vermont. El aprovechamiento de la energía cinética del viento no es nada nuevo. Durante siglos, los molinos de viento se han utilizado para bombear agua, ventilar minas[1] y moler el grano.

En la actualidad, las turbinas de viento hacen funcionar generadores eléctricos. Esas turbinas transforman energía cinética en energía electromagnética. Las turbinas modernas tienen precios, tamaños y rendimientos muy variados. Algunas de ellas son pequeñas y sencillas máquinas que cuestan unos 500 dólares y producen unos 100 watts de potencia.[2] Otras son gigantes y complejas y cuestan unos 2 millones de dólares pero generan hasta 2,5 MW por turbina.[3] Todas ellas funcionan gracias a una fuente de energía fácilmente disponible —el viento.

La teoría que hay detrás de la conversión de energía cinética en electromagnética es simple. Las moléculas de aire golpean sobre las aspas de la hélice y hacen girar la turbina. Las aspas hacer girar unos engranajes que hacen aumentar la velocidad de rotación que a su vez hace girar el rotor generador. El generador envía energía electromagnética a cables que soportan alta tensión.

Sin embargo, la conversión de la energía cinética del viento en energía electromagnética no es perfectamente eficiente; de hecho, no puede ser 100% eficiente. Si las turbinas convirtieran completamente la energía cinética del viento en energía eléctrica, el aire saldría de las turbinas sin energía cinética. Es decir, las turbinas pararían el aire. Si la turbina parase completamente el aire, éste fluiría alrededor de la turbina en lugar de fluir a través de ella.

Así, la turbina debe ser capaz de capturar la energía cinética del aire en movimiento y de evitar el flujo de aire a su alrededor. Las turbinas propulsadas por hélices son las más comunes y su eficiencia teórica varía de 30% a 59%.[4] (Las eficiencias teóricas varían en función de cómo el aire fluye alrededor de la turbina y a través de las hélices.)

En resumen, ni la más eficiente de las turbinas puede convertir el 100% de la energía disponible. ¿Qué sucede? Antes de llegar a la turbina el aire fluye de forma laminar mientras que al dejar atrás la turbina el aire se vuelve turbulento. La componente rotacional del movimiento del aire de detrás de la turbina, aumenta su energía aunque también hay alguna disipación debida a la viscosidad del aire. Si un determinado volumen de aire se mueve más lentamente, aparecerá un rozamiento entre este aire y el aire más veloz que fluye a su alrededor.[5] Las hélices se calientan y el aire también. Los engranajes de la turbina también disipan energía debido al rozamiento. Las hélices vibran individualmente —la energía absorbida para producir estas vibraciones también hace disminuir la eficiencia. Finalmente, la turbina necesita corriente para hacer funcionar los motores que lubrican los engranajes y el motor que orienta la turbina en la dirección más apropiada para la captura del viento.

En definitiva, la mayoría de las turbinas funcionan con una eficiencia de entre un 10 y un 20 por ciento,[6] pero siguen siendo un recurso energético más limpio que el petróleo. Un propietario de turbinas eólicas decía, "Lo fundamental del negocio de las turbinas radica en que nos ayuda a controlar nuestro futuro".[7]

Un parque eólico que convierte la energía cinética del aire en energía eléctrica. *(Image Slate.)*

[1] Agricola, Georgius, *De Re Metallic*. (Herbert and Lou Henry Hoover, Transl.) Reprint Mineola, NY: Dover, 1950, 200–203.
[2] Conally, Abe, and Conally, Josie, "Wind Powered Generator," *Make*, Feb. 2006, Vol. 5, 90–101.
[3] "Why Four Generators May Be Better than One," *Modern Power Systems*, Dec. 2005, 30.
[4] Gorban, A. N., Gorlov, A. M., and Silantyev, V. M., "Limits of the Turbine Efficiency for Free Fluid Flow." *Journal of Energy Resources Technology*, Dec. 2001, Vol. 123, 311–317.
[5] Roy, S. B., S. W. Pacala, and R. L. Walko. "Can Large Wind Farms Affect Local Meteorology?" *Journal of Geophysical Research (Atmospheres)*, Oct. 16, 2004, 109, D19101.
[6] Gorban, A. N., Gorlov, A. M., and Silantyev, V. M., "Limits of the Turbine Efficiency for Free Fluid Flow." *Journal of Energy Resources Technology*, December 2001, Vol. 123, 311–317.
[7] Wilde, Matthew, "Colwell Farmers Take Advantage of Grant to Produce Wind Energy." *Waterloo-Cedar Falls Courier*, May 1, 2006, B1+.

Resumen

1. La conservación de la energía mecánica es una relación importante deducida de las leyes de Newton para las fuerzas conservativas. Es útil para resolver muchos problemas.
2. El teorema trabajo-energía y la conservación de la energía son leyes fundamentales de la naturaleza que tienen aplicaciones en todas las áreas de la física.
3. La ecuación de Einstein $E_0 = mc^2$ es una relación fundamental entre la masa y la energía.
4. La cuantización es un propiedad fundamental de la energía en sistemas ligados.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
1. Fuerza conservativa	Una fuerza es conservativa si el trabajo total que realiza sobre una partícula es cero cuando la partícula se mueve a lo largo de cualquier trayectoria que retorna a su posición inicial. Es decir, el trabajo realizado por una fuerza conservativa sobre una partícula es independiente de la trayectoria recorrida por la partícula al pasar ésta de un punto a otro.	
2. Energía potencial	La energía potencial de un sistema es la energía asociada con su configuración. La variación en la energía potencial de un sistema se define por el valor negativo del trabajo realizado por todas las fuerzas conservativas que actúan sobre el sistema.	
Definición	$\Delta U = U_2 - U_1 = -W = -\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ $dU = -\vec{F} \cdot d\vec{\ell}$	7.1
Gravitatoria	$U = U_0 + mgy$	7.2
Elástica (muelle)	$U = \frac{1}{2}kx^2$	
Fuerza conservativa	$F_x = -\frac{dU}{dx}$	7.13
Curva de energía potencial	En un mínimo de la curva de la función energía potencial en función del desplazamiento, la fuerza es cero y el sistema se encuentra en equilibrio estable. En un máximo, la fuerza es cero y el sistema está en equilibrio inestable. Una fuerza conservativa siempre tiende a acelerar una partícula hacia una posición de energía potencial más baja.	
3. Energía mecánica	La suma de las energías cinética y potencial de un sistema se denomina energía mecánica total: $E_{mec} = K_{sist} + U_{sist}$	7.9
Teorema trabajo-energía para sistemas	El trabajo total realizado por las fuerzas externas sobre un sistema es igual al cambio de la energía mecánica del sistema menos el trabajo total realizado por fuerzas internas no-conservativas: $W_{ext} = \Delta E_{mec} - W_{nc}$	7.10
Conservación de la energía mecánica	Si no hay fuerzas externas que realicen trabajo sobre un sistema, y todas las fuerzas internas son conservativas, la energía mecánica total del sistema permanece constante: $K_f + U_f = K_i + U_i$	7.12
4. Energía total de un sistema	La energía de un sistema consiste en energía mecánica, E_{mec}, energía térmica, $E_{térm}$, energía química, $E_{quím}$ y otros tipos de energía, E_{otras}, tales como radiación sonora y radiación electromagnética: $E_{sist} = E_{mec} + E_{térm} + E_{quím} + E_{otras}$	7.15
5. Conservación de la energía		
Universo	La energía total del universo es constante. La energía puede transformarse de una forma en otra o transmitirse de una región a otra, pero nunca crearse o destruirse.	

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES
Sistema	La energía de un sistema puede modificarse por trabajo realizado sobre el sistema y por transmisión de energía en forma de calor. (Ésta incluye la emisión o absorción de radiación.) El aumento o disminución de la energía del sistema puede explicarse siempre por la aparición o desaparición de algún tipo de energía en otra parte. $E_{\text{entrada}} - E_{\text{salida}} = \Delta E_{\text{sist}}$ **7.14**
Teorema trabajo-energía	$W_{\text{ext}} = \Delta E_{\text{sist}} = \Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{térm}} + \Delta E_{\text{quím}} + \Delta E_{\text{otras}}$ **7.16**
6. Energía disipada por rozamiento	Para un sistema formado por un par de superficies deslizantes, la energía total disipada por rozamiento sobre ambas superficies es igual al incremento de energía térmica del sistema y viene expresada por $f_c s_{\text{rel}} = \Delta E_{\text{térm}}$ **7.24** donde s_{rel} es el desplazamiento de una superficie respecto a la otra.
7. Resolución de problemas	La conservación de la energía mecánica y el teorema trabajo-energía pueden utilizarse como una alternativa de las leyes de Newton para resolver problemas mecánicos que requieren la determinación del módulo de la velocidad de una partícula en función de su posición.
8. Masa y energía	Una partícula de masa m posee una energía en reposo intrínseca E dada por $E = mc^2$ **7.26** donde $c = 3 \times 10^8$ m/s es la velocidad de la luz en el vacío. Un sistema de masa M posee también una energía en reposo $E = Mc^2$. Si un sistema gana o pierde energía interna ΔE, simultáneamente gana o pierde masa, $\Delta M = \Delta E / c^2$.
Energía de enlace	La energía requerida para descomponer un sistema en sus partes constituyentes se denomina energía de enlace. Esta energía es ΔMc^2, donde ΔM es la suma de las masas de sus partes constituyentes menos la masa del sistema ligado.
9. Mecánica newtoniana y teoría de la relatividad	Cuando la velocidad de un partícula se aproxima a la velocidad de la luz en el vacío, c (cuando la energía cinética de la partícula se aproxima a su energía en reposo), la mecánica newtoniana deja de cumplirse y debe reemplazarse por la teoría especial de la relatividad de Einstein.
10. Cuantización de la energía	La energía interna de un sistema microscópico sólo puede tener una serie discreta de valores posibles. Para un sistema que oscila con frecuencia f, los valores energéticos permitidos están separados por una cantidad hf, donde h es la constante de Planck: $h = 6{,}626 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}$ **7.29**
Fotones	Los sistemas microscópicos con frecuencia intercambian energía con sus alrededores emitiendo o absorbiendo radiación electromagnética, que también está cuantizada. El cuanto de la energía radiante se llama fotón: $E_{\text{fotón}} = hf$ **7.30** donde f es la frecuencia de la radiación electromagnética.

Respuestas a las comprobaciones conceptuales

7.1 En este sistema no se realiza ningún trabajo externo, de modo que la energía total, que ahora incluye la energía potencial, se conserva. La variación de energía mecánica es ahora mgh, de modo que el teorema trabajo-energía nos da $\Delta E_{\text{quím}} = -(mgh + \Delta E_{\text{térm}})$.

Respuestas a los problemas prácticos

7.1 $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{1}{2} B x_{\text{máx}}^2 y_{\text{máx}}$

7.2 (*a*) 4,3 kJ, (*b*) 2,2 kJ, (*c*) −1,1 kJ

7.3 495 J

7.4 (*a*) 4,9 cm, (*b*) 0,72 J

7.5 3,16 m/s

7.6 Ninguno

7.7 53 m

7.8 (*a*) 1600 J, (*b*) 620 J, (*c*) 950 J

7.9 $2{,}7 \times 10^{-5}$; $1{,}9 \times 10^3$ mi/s

7.10 $E_{n+1} - E_n = hf \approx (6{,}63 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s})(10^{14}\ \text{s}) \approx 6 \times 10^{-20}\ \text{J}$

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben aportarse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

En los datos numéricos sin coma decimal se deben considerar significativos todos los dígitos, incluidos los ceros a la derecha del último diferente de cero.

Usar en todos los problemas $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$ para la aceleración de la gravedad y despreciar, a menos que se indique lo contrario, el rozamiento y la resistencia del aire.

- • Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil
- •• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
- ••• Desafiante, para alumnos avanzados
- SSM La solución se encuentra en el *Manual de soluciones*

Los problemas consecutivos que están sombreados son problemas relacionados.

PROBLEMAS CONCEPTUALES

1 • Dos cilindros de masas desiguales están conectados por una cuerda sin masa que pasa por un polea sin rozamiento (figura 7.34). Una vez liberados del reposo, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas? (U = energía potencial gravitatoria, K = energía cinética del sistema.) (*a*) $\Delta U < 0$ y $\Delta K > 0$. (*b*) $\Delta U = 0$ y $\Delta K > 0$. (*c*) $\Delta U < 0$ y $\Delta K = 0$. (*d*) $\Delta U = 0$ y $\Delta K = 0$. (*e*) $\Delta U > 0$ y $\Delta K < 0$. SSM

FIGURA 7.34
Problema 1

2 • Dos piedras se lanzan a la vez con la misma velocidad inicial y en el mismo instante desde el tejado de un edificio. Una piedra se lanza con un ángulo de 30° por encima de la horizontal; la otra se lanza horizontalmente. (Despreciar la resistencia del aire.) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

(*a*) Las piedras chocan contra el suelo al mismo tiempo y con iguales velocidades.
(*b*) Las piedras chocan contra el suelo al mismo tiempo y con diferentes velocidades.
(*c*) Las piedras chocan contra el suelo en tiempos distintos y con velocidades iguales.
(*d*) Las piedras chocan contra el suelo en tiempos distintos y con velocidades diferentes.

3 • Verdadero o falso:

(*a*) La energía total de un sistema no puede variar.
(*b*) Cuando una persona salta en el aire, el suelo realiza un trabajo sobre ella incrementando su energía potencial.
(*c*) El trabajo realizado por las fuerzas de rozamiento debe disminuir la energía mecánica total del sistema.
(*d*) Se requiere más trabajo cuando se comprime 2 cm un muelle a partir de su longitud en reposo que si se estira 2 cm a partir de su longitud en reposo.

4 • Un jugador novato de hockey sólo sabe frenarse deslizándose sobre las vallas de la pista (supóngase que las vallas son rígidas y que no hay rozamiento alguno). Discútase los cambios de energía que tienen lugar cuando este jugador utiliza este sistema para detenerse.

5 • Verdadero o falso (La partícula se puede mover sólo a lo largo del eje x y sobre ella actúa una única fuerza, siendo $U(x)$ la función energía potencial asociada a esta fuerza):

(*a*) La partícula estará en equilibrio si está en una posición donde $dU/dx = 0$
(*b*) La partícula se acelerará en la dirección $-x$ si está en una posición donde $dU/dx > 0$.
(*c*) La partícula estará en reposo y tendrá velocidad constante si está en una región en la que a lo largo de ella $dU/dx = 0$.
(*d*) La partícula estará en equilibrio estable si está en una posición donde $dU/dx = 0$ y $d^2U/dx^2 > 0$.
(*e*) La partícula estará en equilibrio neutro si está en una posición donde $dU/dx = 0$ y $d^2U/dx^2 > 0$.

6 • Dos exploradores, S y J, deciden ascender a la cumbre de una montaña. S escoge el camino más corto por la pendiente más abrupta, mientras que J, que pesa lo mismo que S, sigue un camino más largo, de pendiente suave. Al llegar a la cima comienzan a discutir sobre cuál de los dos ganó más energía potencial. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

(*a*) S gana más energía potencial que J.
(*b*) S gana menos energía potencial que J.
(*c*) S gana la misma energía potencial que J.
(*d*) Para comparar las energías potenciales, debemos conocer la altura de la montaña.
(*e*) Para comparar las energías potenciales, debemos conocer la longitud de las dos trayectorias.

7 • Verdadero o falso:

(*a*) Sólo las fuerzas conservativas realizan trabajo.
(*b*) Si sobre una partícula únicamente se ejercen fuerzas conservativas, la energía cinética de la partícula no varía.
(*c*) El trabajo realizado por una fuerza conservativa coincide con la disminución de la energía potencial asociada con esa fuerza.
(*d*) La fuerza conservativa que actúa sobre una partícula, confinada en el eje x, se dirige hacia la izquierda si la energía potencial asociada decrece conforme la partícula se mueve hacia la derecha.
(*e*) La energía potencial asociada a una fuerza conservativa que actúa sobre una partícula, confinada en el eje x, crece conforme la partícula se mueve hacia la izquierda si la fuerza se dirige hacia la derecha.

8 • La figura 7.35 muestra una función energía potencial U en función de x. (*a*) En cada punto indicado, establecer si la componente x de la fuerza asociada a esta función es positiva, negativa o cero. (*b*) ¿En qué punto la fuerza posee el módulo máximo? (*c*) Identificar los puntos de equilibrio y establecer si el equilibrio es estable, inestable o neutro.

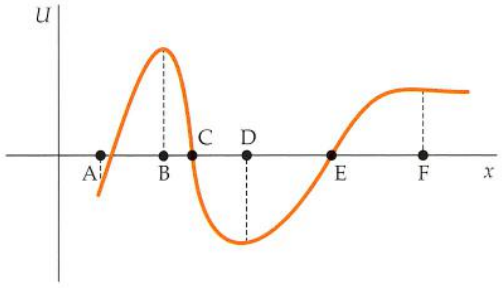


FIGURA 7.35 Problema 8

9 • Supóngase que al frenar se ejerce una fuerza de rozamiento constante sobre las ruedas de un coche. Si esto es así, se deduce que (*a*) la distancia que el coche recorre antes de pararse es proporcional a la velocidad que tenía antes de accionar los frenos, (*b*) la energía cinética del coche disminuye a una tasa constante, (*c*) la energía cinética del coche es inversamente proporcional al tiempo que ha pasado desde la aplicación de los frenos, (*d*) ninguna de las respuestas anteriores es cierta.

10 •• Una piedra atada al extremo de una barra sin masa y rígida se mueve en una circunferencia vertical cuya velocidad tiene módulo constante (figura 7.36). La energía mecánica total del sistema piedra-Tierra no es constante. La energía cinética del movimiento sí lo es. En cambio, la energía potencial cambia continuamente. Durante todos los intervalos de tiempo, ¿el trabajo total realizado sobre la piedra es nulo? ¿Es nula la componente tangencial de la fuerza que actúa sobre la piedra?

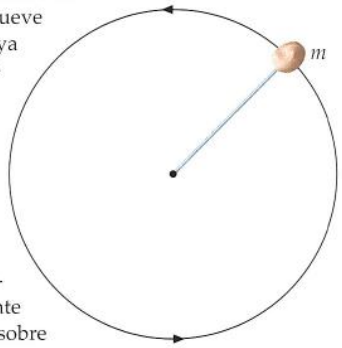


FIGURA 7.36
Problema 10

11 •• Utilizar las energías en reposo dadas en la tabla 7.1 para responder a las siguientes cuestiones. (*a*) ¿Puede el tritón desintegrase en helio? (*b*) ¿Puede una partícula alfa desintegrarse de forma espontánea en helio y un neutrón? (*c*) ¿Puede un protón desintegrarse de forma espontánea en un neutrón y un positrón?

ESTIMACIONES Y APROXIMACIONES

12 • Calcular (*a*) el cambio en la energía potencial cuando una persona sube a un ascensor que le lleva desde la planta baja hasta el último piso del Empire State de Nueva York (102 pisos), (*b*) la fuerza media que ejerce el ascensor sobre la persona durante el trayecto, y (*c*) la potencia media ejercida por el ascensor. (Puede ser necesario estimar la duración del trayecto.)

13 • En un circo, un equilibrista de 50 kg camina por una cuerda floja sostenida por dos soportes que están separados 10 m. La tensión en la cuerda es de 5000 N cuando está justo en el centro de la cuerda. Estimar (*a*) cuánto se afloja la cuerda cuando el equilibrista está en el centro, y (*b*) el cambio en la energía potencial gravitatoria del equilibrista desde antes de caminar en la cuerda hasta el momento que está justo en el centro de la misma.

14 •• **APLICACIÓN BIOLÓGICA** La *tasa metabólica* es el ritmo con que el cuerpo usa energía química para sostener sus funciones vitales. La tasa metabólica media es proporcional al área total superficial del cuerpo. El área superficial de un varón de 1,78 m de altura y 80 kg de peso es de unos 2,0 m^2, mientras que el de una mujer de 1,62 m de altura y 50 kg de peso es 1,5 m^2. Hay un cambio de un 1% en el área superficial por cada 1,2 kg por encima o por debajo de los pesos indicados y de un 1% por cada 7,5 cm por encima o por debajo de las alturas que aquí se señalan. (*a*) Estime su tasa metabólica media diaria (por metro cuadrado de área de piel) usando la siguiente guía para la actividad física: tasa metabólica de: dormir 40 W/m^2; caminar: 160 W/m^2; actividad física moderada: 175 W/m^2; ejercicio aeróbico moderado: 300 W/m^2. Compararlo con la potencia de una bombilla de 100 W. (*b*) Exprese su tasa metabólica media en kcal/día (1 kcal = 4190 J). (Una kcal es la "caloría alimentaria" usada por los expertos en nutrición.) (*c*) Un valor estimado por los dietistas es que una persona estándar debe comer entre 25-32 kcal/kg para mantener su peso. A partir de los cálculos del apartado (*b*) estimar si este valor es razonable.

15 •• **APLICACIÓN BIOLÓGICA** Suponga que el ritmo metabólico máximo con el que su cuerpo puede gastar energía es 1500 W. Suponiendo que la conversión de energía química en energía mecánica tiene una eficiencia máxima del 40%, estimar (*a*) el tiempo mínimo empleado para subir cuatro tramos de escalera, cada uno de los cuales tiene 3,5 m de altura. (*b*) El tiempo mínimo necesario para subir el Empire State (102 pisos de alto) utilizando el resultado del apartado (*a*). Comentar si el resultado del apartado (*b*) resulta factible. SSM

16 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Usted es el encargado de reemplazar las barras de uranio por unas nuevas en la central nuclear en la que trabaja. Para saber cuándo se deben cambiar decide determinar cuanta masa del núcleo del reactor se reduce por unidad de energía eléctrica producida. (*Nota*: en las centrales nucleares, el reactor genera energía térmica que se transforma en energía eléctrica mediante una turbina. Para producir 1 J de energía eléctrica se requieren 3 J de energía térmica.) (*a*) ¿Qué resultado obtiene para la producción de (*a*) 1 J de energía térmica? (*b*) ¿Y para obtener la energía suficiente para mantener una bombilla de 100 W encendida durante 10 años? (*c*) ¿Y para lograr una tasa de energía eléctrica constante de 1 GW por año? (Producción habitual en centrales modernas.)

17 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, MÚLTIPLES PASOS** La energía química liberada cuando se quema 1 litro de gasolina es aproximadamente $1{,}3 \times 10^5$ kJ. Estimar la energía total consumida por todos los coches de los Estados Unidos durante un año. ¿Qué fracción representa del total de energía consumida en los Estados Unidos en 1 año (unos 5×10^{20} J)? SSM

18 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** En un panel de energía solar la eficiencia máxima de conversión en energía eléctrica es del orden del 12 por ciento. En el suroeste de los Estados Unidos, la intensidad solar que llega a la superficie de la Tierra es 1 kW/m^2 diarios en promedio. Estimar el área que debería cubrirse para suministrar los requerimientos energéticos de Estados Unidos (5×10^{20} J/año) y comparar el resultado con el área de Arizona. Supóngase que el cielo no tiene nubes.

19 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Las plantas de producción de energía hidroeléctrica transforman la energía potencial gravitatoria del agua en otras formas más útiles de energía. Para ello hacen pasar un flujo de agua, corriente abajo, a través de una turbina que genera energía eléctrica. La central de Hoover en el río Colorado tiene una altura de 211 m y genera 4000 millones de kW · h por año ($1W \cdot h = 3{,}6 \times 10^3$ J). ¿Con qué caudal (en L/s) fluye el agua a través de las turbinas para generar esta potencia? La densidad del agua es 1 kg/L. Supóngase que la transformación de la energía potencial del agua en energía eléctrica tiene una eficiencia del 90%.

FUERZA, ENERGÍA POTENCIAL Y EQUILIBRIO

20 • En las cataratas Victoria, de 128 m de altura, el agua cae con un caudal medio de $1{,}4 \times 10^6$ kg/s. Si la mitad de la energía potencial del agua se convirtiera en energía eléctrica, ¿cuánta potencia se produciría en el salto?

21 • Un libro de 2 kg se desliza por un plano inclinado de pendiente 30° sin rozamiento. Parte del reposo en el tiempo $t = 0$ desde lo alto del plano inclinado, a una altura de 20 m sobre el suelo. (*a*) ¿Cuál es la energía potencial inicial del libro con respecto al suelo? (*b*) A partir de las leyes de Newton, determinar la distancia recorrida por el libro en el intervalo $0 < t < 1$ y su velocidad para $t = 1$ s. (*c*) Determinar la energía potencial y la energía cinética del libro para $t = 1$ s. (*d*) Calcular la energía cinética y la velocidad del libro un instante antes de que choque contra el suelo.

22 • Una fuerza $F_x = 6$ N es constante y va en la dirección $+x$. (*a*) Determinar la función energía potencial $U(x)$ asociada con esta fuerza para una posición de referencia arbitraria x_0 en la cual $U = 0$. (*b*) Hallar $U(x)$ si sabemos que $U = 0$ para $x = 4$ m. (*c*) Determinar $U(x)$ si se cumple que $U = 14$ J para $x = 6$ m.

23 • Un muelle tiene una constante elástica $k = 10^4$ N/m. ¿Cuánto debe alargarse para que su energía potencial sea (*a*) 50 J y (*b*) 100 J?

24 • (*a*) Determinar la fuerza F_x asociada con la función energía potencial $U = Ax^4$, donde A es una constante. (*b*) ¿En qué punto (o puntos) la fuerza es nula?

25 •• Una función energía potencial viene dada por $U = C/x$, donde C es una constante positiva. (*a*) Determinar la fuerza F_x en función de x. (*b*) ¿Está dirigida esta fuerza hacia el origen o se aleja de él en la región $x > 0$? ¿Y en la región $x < 0$? (*c*) ¿Crece o decrece la energía potencial cuando x crece en la región $x > 0$? (*d*) Responder a los apartados (*b*) y (*c*) para el caso en que C sea una constante negativa. SSM

26 •• En la curva de energía potencial U en función de y indicada en la figura 7.37, los segmentos AB y CD son líneas rectas. Representar la fuerza F_y asociada a $U(y)$ en función de y. Inclúyanse valores numéricos con unidades en ambos ejes. Estos valores se pueden obtener del gráfico U en función de y.

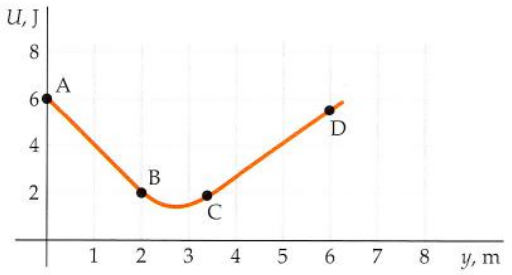


FIGURA 7.37 Problema 26

27 •• La fuerza que actúa sobre un objeto viene dada por la expresión $F_x = a/x^2$. Cuando $x = 5$ m se sabe que la fuerza apunta en la dirección $-x$ y tiene un módulo de 25 N. Determinar la energía potencial del objeto en función de x suponiendo que cuando $x = 2$ m la energía potencial vale -10 J.

28 •• La energía potencial de un objeto viene dada por $U(x) = 3x^2 - 2x^3$, donde U se expresa en joules y x en metros. (*a*) Determinar la fuerza que actúa sobre este cuerpo. (*b*) ¿En qué posiciones está el objeto en equilibrio? (*c*) ¿Cuáles de estas posiciones de equilibrio son estables y cuáles inestables?

29 •• La energía potencial de un objeto viene dada por $U(x) = 8x^2 - x^4$, donde U se expresa en joules y x en metros. (*a*) Determinar la fuerza que actúa sobre este objeto. (*b*) ¿En qué posiciones el objeto se encuentra en equilibrio? (*c*) ¿Cuáles de estas posiciones de equilibrio son estables y cuáles son inestables? SSM

30 •• La fuerza que actúa sobre un objeto viene dada por la expresión $F(x) = x^3 - 4x$. (La fuerza se da en newtons y x en metros.) Localizar las posiciones de equilibrio estable e inestable y demostrar que en estos puntos $U(x)$ es, respectivamente, un máximo o un mínimo local.

31 •• La energía potencial de un objeto de 4 kg viene dada por las ecuaciones $U = 3x^2 - x^3$ para $x \leq 3$ m, y $U = 0$ para $x \geq 3$ m, donde U se expresa en joules y x en metros. (*a*) ¿En qué posiciones se encuentra este objeto en equilibrio? (*b*) Dibujar un gráfico de U en función de x. (*c*) Analizar la estabilidad del equilibrio para los valores de x obtenidos en (*a*). (*d*) Si la energía de la partícula es 12 J, ¿cuál es su velocidad para $x = 2$ m?

32 •• Una fuerza viene dada por $F_x = Ax^{-3}$, siendo $A = 8$ N · m^3. (*a*) Para valores positivos de x, ¿crece o decrece la energía potencial asociada con esta fuerza al crecer x? (Para responder a esta cuestión imagínese lo que le ocurriría a una partícula si se dejara en reposo en algún punto x y luego se liberara.) (*b*) Determinar la función energía potencial U asociada con esta fuerza, de modo que U se aproxime a cero cuando x tiende a infinito. (*c*) Representar U en función de x.

33 •• **MÚLTIPLES PASOS** Una barra recta de masa despreciable se monta sobre un pivote sin rozamiento como indica la figura 7.38. Las masas m_1 y m_2 se acoplan a la barra a las distancias ℓ_1 y ℓ_2. (*a*) Expresar la energía potencial gravitatoria del sistema masas-Tierra en función del ángulo θ formado por la barra y la horizontal. (*b*) ¿Para qué ángulo θ es mínima la energía potencial? ¿Es compatible el resultado obtenido con la expresión "los sistemas tienden hacia el mínimo de energía potencial"? (*c*) Demostrar que si $m_1\ell_1 = m_2\ell_2$, la energía potencial es la misma para todos los valores de θ. (Cuando esto ocurra, el sistema se equilibrará bajo el ángulo θ. Este resultado se conoce como *ley de la palanca de Arquímedes*.) SSM

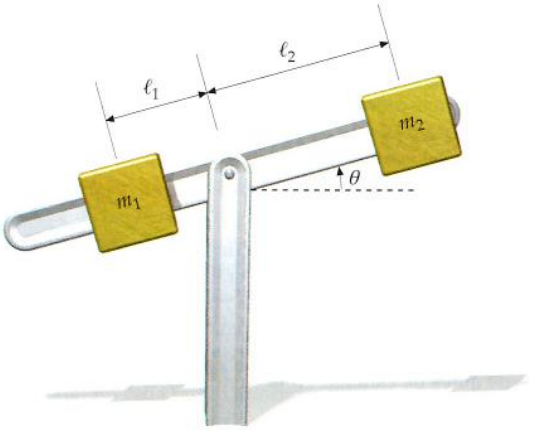


FIGURA 7.38 Problema 33

34 •• Una máquina de Atwood sencilla utiliza dos masas, m_1 y m_2 (figura 7.39). Partiendo del reposo, la velocidad de las dos masas es 4,0 m/s al cabo de 3,0 s. En ese instante, la energía cinética del sistema es de 80 J y cada una de las masas se ha desplazado una distancia de 6,0 m. Determinar los valores de m_1 y m_2.

FIGURA 7.39 Problema 34

35 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, MÚLTIPLES PASOS** Un reloj de masa m, como el que se muestra en la figura 7.40, cuelga de dos cables ligeros que pasan por dos poleas sin rozamiento y masa despreciable de las que cuelgan dos contrapesos de masa M. (*a*) Determinar la energía potencial del sistema en función de la distancia y. (*b*) Determinar el valor de y para el cual la energía potencial del sistema es mínima. (*c*) Si la energía potencial es mínima, el sistema está en equilibrio. Aplicar la segunda ley de Newton al reloj y demostrar que está en equilibrio (la suma de las fuerzas sobre él es cero) para el valor de y obtenido en el apartado (*b*). (*d*) ¿Es éste un punto de equilibrio estable o inestable?

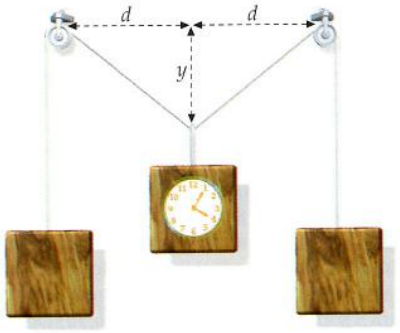


FIGURA 7.40 Problema 35

CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

36 • Un bloque de masa m situado sobre una mesa horizontal comprime un muelle una distancia x y luego se deja en libertad. El muelle impulsa el bloque a lo largo de una superficie horizontal sin rozamiento con una velocidad v. El mismo muelle impulsa un segundo bloque de masa $4m$ con una velocidad $3v$. ¿Qué distancia se comprimió el muelle en este último caso? Expresar el resultado en función de x.

37 • Un péndulo simple de longitud L con una lenteja de masa m se separa lateralmente hasta que la lenteja se encuentra a una distancia $L/4$ por encima de su posición de equilibrio. La lenteja se deja entonces en libertad. Determinar la velocidad de la lenteja cuando sobrepasa la posición de equilibrio. Despreciar los efectos de la resistencia del aire.

38 • Un bloque de 3 kg se desliza a lo largo de una superficie horizontal sin rozamiento con una velocidad de 7 m/s (figura 7.41). Después de recorrer una distancia de 2 m, el bloque pasa de forma suave a una rampa sin rozamiento inclinada un ángulo de 40° con la horizontal. ¿Qué distancia recorrerá el bloque en la rampa ascendente antes de detenerse?

FIGURA 7.41 Problemas 38 y 64

39 • Un objeto de 3 kg en reposo (figura 7.42) se deja libre a una altura de 5 m sobre una rampa curva y sin rozamiento. Al pie de la rampa hay un muelle cuya constante es $k = 400$ N/m. El objeto se desliza por la rampa y choca contra el muelle, comprimiéndolo una distancia x antes de alcanzar momentáneamente el reposo. (*a*) Hallar x. (*b*) ¿Qué ocurre con el objeto (si se mueve) después de alcanzar el reposo momentáneamente?

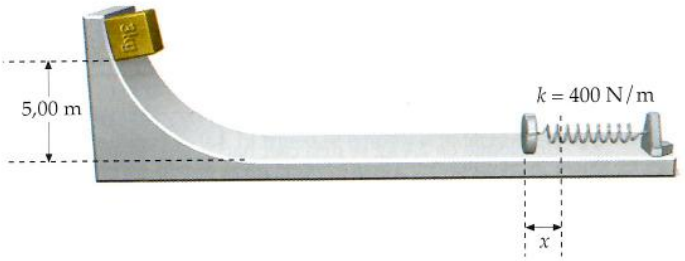


FIGURA 7.42 Problema 39

40 • **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Una persona diseña un juguete para niños y quiere comprobar si la velocidad máxima de la pelota es lo suficientemente grande como para requerir el uso de gafas protectoras. En el juego, una pelota de 15 g es disparada por un muelle cuya constante elástica es de 600 N/m. El muelle se comprime 5 cm antes de cada disparo. ¿Con qué velocidad sale disparada la bola? Si se dispara verticalmente, ¿a qué altura llegará? ¿Serían necesarias las gafas protectoras?

41 • Un muchacho de 16 kg se está columpiando en el patio de recreo de forma que lleva una velocidad de 3,4 m/s cuando el columpio, de 6 m de longitud, se encuentra en el punto más bajo de sus oscilaciones. ¿Qué ángulo forma el columpio con la vertical cuando el niño se encuentra en el punto más elevado? Despreciar los efectos de la resistencia del aire y suponer que el niño no impulsa el columpio. SSM

42 •• El sistema que se muestra en la figura 7.43 está en reposo cuando se corta la cuerda inferior. Determinar la velocidad de los objetos cuando están momentáneamente a la misma altura. En la polea no hay rozamiento y su masa es despreciable.

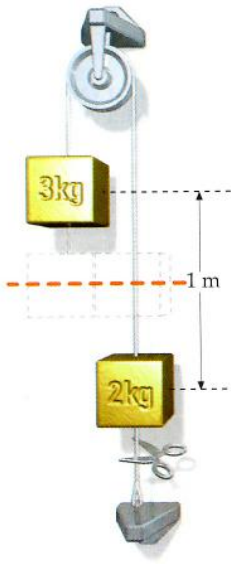


FIGURA 7.43 Problema 42

43 •• Un bloque de masa m reposa sobre un plano inclinado como indica la figura 7.44. El coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y el plano es μ_e. Una fuerza que aumenta gradualmente tira del muelle (constante elástica k). Determinar la energía potencial U del muelle en el momento que el bloque comienza a moverse.

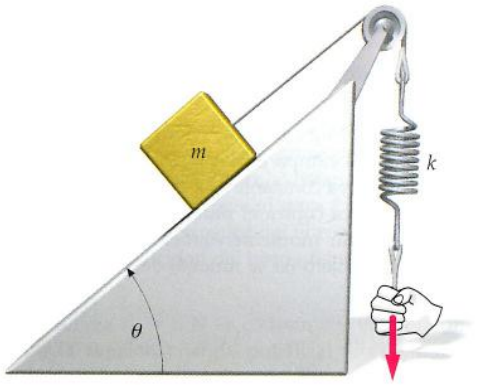


FIGURA 7.44 Problema 43

44 •• Un bloque de 2,4 kg se deja caer hacia un muelle desde una altura de 5,0 m (figura 7.45). Cuando el bloque alcanza momentáneamente el reposo, el muelle se ha comprimido 25 cm. Determinar la velocidad del bloque cuando la compresión del muelle es de 15 cm.

FIGURA 7.45 Problema 44

45 •• Una pelota en el extremo de una cuerda se mueve en un círculo vertical con energía mecánica constante E. ¿Qué diferencia existe entre la tensión en la parte más baja del círculo y la tensión en su parte más alta? SSM

46 •• Una muchacha de masa m lleva una cesta de comida a su abuela. Para cruzar un riachuelo ata una cuerda de longitud R a la rama de un árbol y comienza a oscilar desde el reposo en un punto que se encuentra a una distancia $R/2$ por debajo de la rama. ¿Cuál es la tensión mínima de rotura de la cuerda para que no se rompa y la muchacha no caiga en el arroyo?

47 •• La vagoneta de una montaña rusa de masa 1500 kg parte de un punto situado a una altura H de 23 m sobre la parte más baja de un rizo de 15 m de diámetro (figura 7.46). Si el rozamiento es despreciable, determinar la fuerza hacia abajo de los carriles sobre la vagoneta cuando los viajeros están cabeza abajo en lo alto del rizo.

FIGURA 7.46 Problema 47

48 •• Una vagoneta de una montaña rusa que se mueve con velocidad v_0 desciende 5 m en el primer tramo de la pista y, a continuación, sube hasta un tramo del recorrido que está 4,5 m por encima del primer tramo. Despreciar los efectos de resistencia del aire. (*a*) ¿Cuál es la mínima velocidad necesaria v_0 para que la vagoneta supere esta altura? (*b*) ¿Se puede modificar esta velocidad cambiando la posición del punto más bajo de modo que la vagoneta adquiera mayor velocidad al pasar por este punto?

49 •• Las vagonetas de la montaña rusa *Graviton* pasan por un bucle construido con el objetivo de que las personas que vayan montadas en ellas se sientan perfectamente ingrávidas cuando lleguen a la cima del arco. ¿Qué peso sentirán cuando lleguen al punto más bajo de la trayectoria, es decir, cuál es la fuerza normal que los hunde en el fondo de sus asientos al llegar al fondo del bucle? Expresar la respuesta como múltiplo de mg. Supóngase que la trayectoria es perfectamente circular y que sobre la vagoneta no hay fuerzas de rozamiento.

50 •• Una piedra se lanza hacia arriba con un ángulo de 53° sobre la horizontal. Su altura máxima durante la trayectoria es de 24 m. ¿Cuál fue la velocidad inicial de la piedra? Despreciar los efectos de resistencia del aire.

51 •• Una pelota de béisbol de masa 0,17 kg se lanza desde el tejado de un edificio situado a 12 m por encima del suelo. Su velocidad inicial es de 30 m/s y el ángulo de lanzamiento 40° sobre la horizontal. Despreciar los efectos de resistencia del aire. (*a*) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la pelota? (*b*) ¿Cuál es la velocidad de la pelota cuando choca contra el suelo?

52 •• Un péndulo de 80 cm de longitud con una lenteja de 0,6 kg se suelta desde el reposo cuando forma un ángulo inicial θ_0 con la vertical. En la parte más baja de su oscilación, la velocidad de la lenteja es 2,8 m/s. (*a*) ¿Cuál era el ángulo inicial del péndulo? (*b*) ¿Qué ángulo formará el péndulo con la vertical cuando la velocidad de la lenteja sea de 1,4 m/s? ¿Es este ángulo igual a $\frac{1}{2}\theta_0$? Razonar la respuesta.

53 •• El puente Royal Gorge sobre el río Arkansas tiene una altura aproximada de $L = 310$ m. Un saltador de masa 60 kg tiene una cuerda elástica de longitud $d = 50$ m atada a sus pies. Suponer que la cuerda actúa como un muelle ideal de constante elástica k. El saltador se lanza, apenas toca el agua y después de numerosas subidas y bajadas se detiene a una altura h sobre el agua. (*a*) Calcular h. (*b*) Determinar la velocidad máxima alcanzada por el saltador.

54 •• Un péndulo está formado por una lenteja de 2 kg atada a una cuerda ligera de longitud 3 m. Mientras cuelga verticalmente y en reposo, la lenteja es golpeada horizontalmente, de modo que alcanza una velocidad horizontal inicial de 4,5 m/s. En el punto en que la cuerda forma un ángulo de 30° con la vertical (*a*) ¿cuál es el módulo de la velocidad de la lenteja? (*b*) ¿Cuál es su energía potencial relativa a su valor en el punto más bajo? (*c*) ¿Cuál es la tensión de la cuerda? (*d*) ¿Qué ángulo forma la cuerda con la vertical cuando la lenteja alcanza su máxima altura?

55 •• Un péndulo está formado por una cuerda de longitud L y una lenteja de masa m. La cuerda se dispone en posición horizontal y se da a la lenteja la velocidad inicial mínima para que el péndulo dé una vuelta completa en el plano vertical. (*a*) ¿Cuál es la máxima energía cinética K de la lenteja? (*b*) ¿Cuál es en ese momento la tensión de la cuerda? SSM

56 •• Un muchacho de peso 360 N se balancea sobre una charca de agua con una cuerda atada a la rama de un árbol en el borde de la charca. La rama está a 12 m por encima del nivel del suelo y la superficie del agua de la charca está a 1,8 m por debajo del suelo. El muchacho coge la cuerda con la mano en un punto a 10,6 m de la rama y se mueve hacia atrás hasta que la cuerda forma con la vertical un ángulo de 23°. Entonces se lanza y cuando la cuerda está en posición vertical se suelta de la cuerda y cae en la charca. Determinar el módulo de la velocidad del muchacho en el momento de caer en el agua. (El muchacho puede suponerse como una partícula puntual colgado de la cuerda a una distancia de 10,6 m de la rama.)

57 •• Paseando junto a un estanque, un muchacho encuentra una cuerda atada a la rama de un árbol a 5,2 m del suelo y decide utilizarla para balancearse sobre el estanque. La cuerda está algo deteriorada, pero soporta su peso. El muchacho estima que la cuerda se romperá si la tensión supera en 80 N su propio peso, que es de unos 650 N. Agarra la cuerda en un punto que está a 4,6 m de la rama y se mueve hacia atrás para balancearse sobre el estanque. (Suponer que el muchacho es una partícula puntual atado a una cuerda a 4,6 m de distancia de la rama.) (*a*) ¿Cuál es el ángulo inicial máximo entre la cuerda y la vertical que permite al muchacho balancearse con seguridad sin que se rompa la cuerda? (*b*) Si el muchacho comienza con este ángulo máximo y la superficie del estanque está 1,2 m por debajo del nivel del suelo, ¿con qué módulo de la velocidad entrará en el agua si se suelta de la cuerda cuando ésta pasa por la posición vertical?

58 ••• Un péndulo de longitud L tiene una lenteja de masa m atada a una cuerda ligera y conectada a un muelle de constante elástica k. Con el péndulo en la posición indicada en la figura 7.47, el muelle se encuentra en su posición natural. Si ahora tiramos lateralmente de la lenteja hasta que la cuerda forme un ángulo pequeño θ con la vertical, ¿cuál será la velocidad de la lenteja después de soltarla cuando pase por la posición de equilibrio? *Ayuda: recordar que cuando el ángulo es pequeño podemos usar estas aproximaciones: si θ se expresa en radianes y si $|\theta| \ll 1$, entonces* $\operatorname{sen}\theta \approx \operatorname{tg}\theta \approx \theta$ *y* $\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$.

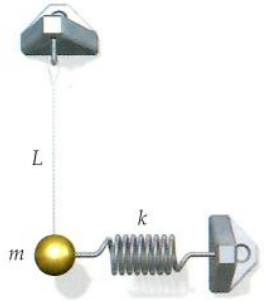


FIGURA 7.47 Problema 58

59 ••• Un péndulo está suspendido del techo y conectado a un muelle fijo en el extremo opuesto justo por debajo del soporte del péndulo (figura 7.48). La masa de la lenteja es m, la longitud del péndulo, L, y la constante del muelle, k. La longitud del muelle sin deformar es $L/2$ y la distancia entre la parte más baja del muelle y el techo es 1,5 L. El péndulo se desplaza lateralmente hasta formar un pequeño ángulo θ con la vertical y después se deja en libertad desde el reposo. Obtener una expresión para la velocidad de la lenteja cuando pasa justo por debajo del soporte del péndulo. SSM

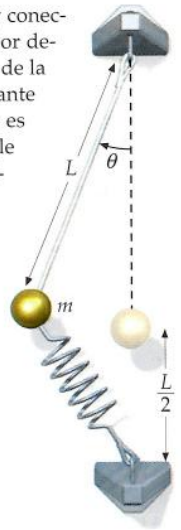


FIGURA 7.48 Problema 59

ENERGÍA TOTAL Y FUERZAS NO-CONSERVATIVAS

60 • En una erupción volcánica, 4 km^3 de una montaña con una densidad media de 1600 kg/m^3 se elevaron hasta una altura media de 500 m. (*a*) ¿Cuánta energía, en joules, se liberó en esta erupción? (*b*) La energía liberada en una bomba termonuclear se mide en megatones de TNT, siendo 1 megatón de TNT = $4{,}2 \times 10^{15}$ J. Expresar la respuesta de (*a*) en megatones de TNT.

61 • **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Un estudiante de física de 80 kg sube a un monte de 120 m de altura. (*a*) ¿Cuál es el incremento de energía potencial gravitatoria del estudiante al llegar a la cumbre del monte? (*b*) ¿De dónde procede esta energía? (*c*) El organismo del estudiante tiene un rendimiento del 20%, es decir, por cada 100 J de energía interna consumida, 20 J se convierten en energía mecánica y 80 J se pierden en forma de calor. ¿Cuánta energía química consume el estudiante durante el ascenso al monte?

62 • Un coche de 2000 kg se mueve sobre una carretera horizontal con una velocidad inicial de 25 m/s. Se detiene a los 60 m por la acción de una fuerza de rozamiento constante. (*a*) ¿Cuánta energía se disipa por rozamiento? (*b*) ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento cinético entre los neumáticos y la carretera? (*Nota*: cuando se frena sin derrapar utilizando frenos convencionales, el total de la energía cinética del coche se disipa en los frenos. Con frenos regeneradores, como los que se utilizan en los vehículos híbridos, sólo el 70% de la energía cinética se disipa.)

63 • Un trineo de 8 kg se encuentra inicialmente en reposo sobre una carretera horizontal. El coeficiente de rozamiento cinético entre el trineo y la carretera es 0,4. El trineo se empuja a lo largo de una distancia de 3 m con una fuerza de 40 N que forma un ángulo de 30° hacia arriba con la horizontal. (*a*) Determinar el trabajo realizado por la fuerza aplicada. (*b*) Determinar la energía disipada por rozamiento. (*c*) Calcular la variación de energía cinética experimentada por el trineo. (*d*) Hallar la velocidad del trineo después de recorrer la distancia de 3 m.

64 •• Partiendo de la figura 7.41, suponer ahora que las superficies poseen rozamiento y que el coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y las superficies es 0,30. El bloque tiene una velocidad inicial de 7 m/s y se desliza 2 m antes de llegar a la rampa. Determinar (*a*) la velocidad del bloque cuando alcanza la rampa y (*b*) la distancia que alcanza el objeto en su deslizamiento antes de quedar momentáneamente en reposo. (Despreciar la energía disipada a lo largo de la curva de transición.)

65 •• Un bloque de 2 kg situado a una altura de 3 m se desliza por una rampa curva y lisa desde el reposo (figura 7.49). Resbala 9 m sobre una superficie horizontal rugosa antes de llegar al reposo. (*a*) ¿Cuál es la velocidad del bloque en la parte inferior de la rampa? (*b*) ¿Cuánta energía se ha disipado por rozamiento? (*c*) ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento entre el bloque y la superficie horizontal? SSM

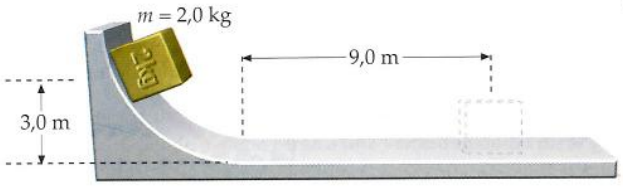


FIGURA 7.49 Problema 65

66 •• Una niña de 20 kg se desliza por un tobogán de 3,2 m de altura. Cuando alcanza su parte inferior lleva una velocidad de 1,3 m/s. (*a*) ¿Cuánta energía se ha disipado por rozamiento? (*b*) Si el tobogán está inclinado 20°, ¿cuál es el coeficiente de rozamiento entre la niña y la superficie de deslizamiento?

67 •• El coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque de 4 kg y la plataforma de la figura 7.50 es 0,35. (*a*) Determinar la energía disipada por rozamiento cuando el bloque de 2 kg cae una distancia *y*. (*b*) Calcular la energía mecánica total E_{mec} del sistema después de que el bloque de 2 kg caiga la distancia *y*, suponiendo que inicialmente $E_{mec} = 0$. (*c*) Utilizar el resultado de (*b*) para determinar el módulo de la velocidad de cualquiera de los bloques después que el bloque de 2 kg caiga 2 m.

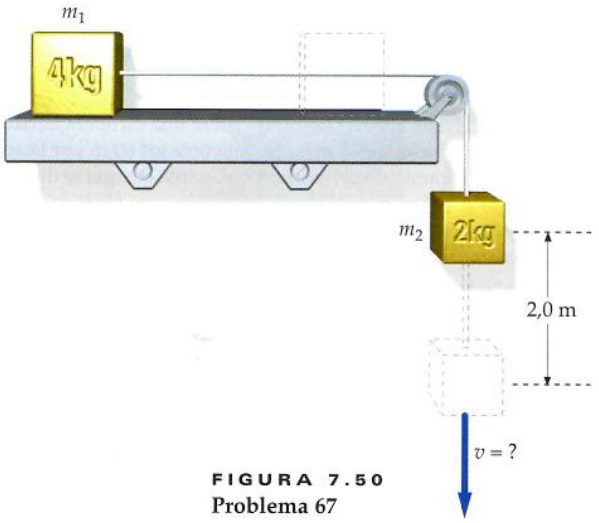


FIGURA 7.50
Problema 67

68 •• Un objeto compacto de masa *m* se mueve en un círculo horizontal de radio *r* sobre una mesa rugosa. Está sujeto a una cuerda fija en el centro del círculo. La velocidad del objeto es inicialmente v_0. Después de completar una vuelta alrededor del círculo, la velocidad es $0{,}5v_0$. (*a*) Determinar la energía disipada por rozamiento durante una vuelta en función de *m*, v_0 y *r*. (*b*) ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento cinético? (*c*) ¿Cuántas vueltas da la partícula antes de alcanzar la posición de reposo?

69 •• Un bloque de 2,4 kg posee una velocidad inicial de 3,8 m/s dirigida hacia arriba sobre un plano inclinado 37° con la horizontal. El coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y el plano es 0,30. (*a*) ¿Qué distancia sobre el plano inclinado sube el bloque? (*b*) ¿Cuál es el módulo de su velocidad cuando ha recorrido la mitad de distancia del apartado (*a*)? SSM

70 ••• Un bloque de masa *m* descansa sobre un plano inclinado θ grados sobre la horizontal. El bloque está unido a un muelle de constante *k* (figura 7.51). Los coeficientes de rozamiento estático y cinético entre el bloque y el plano son μ_e y μ_c, respectivamente. Tiramos del muelle lentamente hacia arriba a lo largo del plano hasta que el bloque comienza a moverse. (*a*) Determinar una expresión para el alargamiento *d* del muelle en el momento en que el bloque se mueve. (*b*) Determinar el valor de μ_c tal que el bloque se detenga justo cuando el muelle se encuentra en su condición natural, es decir, ni alargado, ni comprimido.

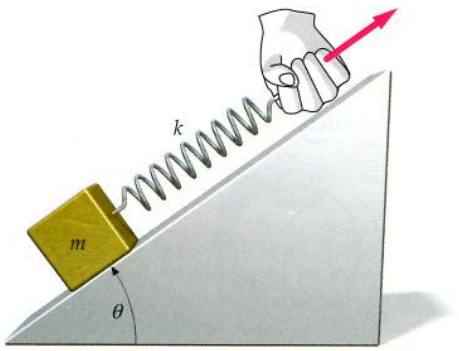


FIGURA 7.51 Problema 70

MASA Y ENERGÍA

71 • (*a*) Calcular la energía en reposo que hay en 1 g de polvo. (*b*) Si se pudiera transformar esta energía en forma eléctrica y venderla a 10 céntimos el kilowatt-hora, ¿cuánto dinero se obtendría? (*c*) Si con esa energía se encendiera un lámpara de 100 W, ¿durante cuánto tiempo permanecería encendida?

72 • Cuando se detona un kilotón de TNT se produce una energía explosiva de unos 5×10^{12} J. ¿Cuál es la masa equivalente a la energía de la explosión? Si fuera capaz de juntar de nuevo todas las piezas, ¿sería apreciable la pérdida de masa?

73 • **CONCEPTUAL** Calcular la energía en reposo de una persona tanto en megaelectronvolts como en joules. Si esa energía se pudiese convertir completamente en la energía cinética de un coche, hállese su velocidad. Utilice la versión no-relativista para la energía cinética y comente cuando se puede justificar el uso de la expresión no-relativista de la energía cinética.

74 • Si un agujero negro y una estrella "normal" orbitan uno alrededor del otro, los gases de la estrella que caen en el agujero negro se calientan millones de grados debido al rozamiento en el disco de acumulación del agujero. Cuando los gases se calientan tanto, empiezan a radiar luz en la región de rayos X del espectro electromagnético. Se cree que Cygnus X-1, la segunda fuente de rayos X más brillante del firmamento, es uno de estos sistemas binarios. Emite radiación a una potencia estimada de 4×10^{31} W. Si suponemos que el 1% de la masa-energía que cae escapa en forma de rayos X, ¿con qué tasa está ganando masa el agujero negro?

75 • **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Una persona se encarga de diseñar las necesidades de combustible de una pequeña central de fusión. Suponga que la planta tiene un 33% de eficiencia en la conversión a energía eléctrica. Para la reacción de fusión deuterón-tritón del ejemplo 7.18, calcular el número de reacciones por segundo que son necesarias para generar 1 kW de potencia eléctrica. SSM

76 • Utilizar la tabla 7.1 para calcular la energía necesaria para extraer un neutrón de una partícula alfa estática, dejando estático un helio-3 y emitiendo un neutrón con una energía cinética de 1,5 MeV.

77 • Un neutrón libre se puede desintegrar en un protón más un electrón y un antineutrino [el antineutrino (símbolo $\bar{\nu}_e$) es una partícula elemental de masa casi nula]: $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$. Utilizar la tabla 7.1 para calcular la energía liberada durante esta reacción.

78 •• Durante un determinado tipo de reacción de fusión nuclear, dos deuterones se combinan para dar lugar a una partícula alfa. (*a*) ¿Cuánta energía se libera durante esta reacción? (*b*) ¿Cuántas reacciones por segundo de este tipo deben tener lugar para producir 1 kW de potencia?

79 •• Una gran central nuclear produce 1000 MW de potencia por fisión nuclear. (*a*) ¿Cuánta masa se transforma en energía al cabo de un año? (Suponer una eficiencia del 33 por ciento en una central nuclear.) (*b*) En una central térmica de carbón, cada kilogramo de carbón libera en la combustión 31 MJ de energía térmica. ¿Cuántos kilogramos de carbón se necesitarán anualmente para una central de 1000 MW? (Suponer una eficiencia del 38 por ciento en una central térmica de carbón.)

CUANTIZACIÓN DE LA ENERGÍA

80 •• Una masa unida al extremo de un muelle cuya constante elástica es de 1000 N/kg oscila con una frecuencia de 2,5 oscilaciones por segundo. (*a*) Determinar el número cuántico *n* del estado en el que tiene una energía de 10 J. (*b*) ¿Cuánto vale la energía de su estado fundamental?

81 •• Repetir el problema 80, pero considerando ahora un átomo de un sólido que vibra con una frecuencia de $1{,}00 \times 10^{14}$ oscilaciones por segundo y que tiene una energía de 2,7 eV.

PROBLEMAS GENERALES

82 • Un bloque de masa m, inicialmente en reposo, se arrastra con una cuerda hacia arriba por un plano inclinado un ángulo θ sobre la horizontal (sin rozamiento). La tensión en la cuerda es T y la cuerda es paralela al plano. Después de recorrer una distancia L, la velocidad del bloque es v. Deducir una expresión para el trabajo realizado por la tensión.

83 • Un bloque de masa m se desliza hacia abajo con velocidad constante v por un plano inclinado un ángulo θ con la horizontal. Hallar una expresión para la energía disipada por rozamiento durante el intervalo de tiempo Δt.

84 • En física de partículas, la energía potencial asociada a la unión de dos quarks por la fuerza nuclear fuerte viene dada por: $U(r) = -(\alpha/r) + kr$, donde k y α son constantes positivas y r es la distancia de separación entre dos quarks.* (*a*) Dibujar un gráfico de la energía potencial. (*b*) ¿Cuál es la fuerza que ejerce cada quark? (*c*) ¿Cómo se simplifica la fuerza cuando se consideran los casos de valores muy grandes o muy pequeños de r?

85 • **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Usted se encarga de instalar energía solar en la granja de su abuelo. A la superficie del suelo de la granja llegan 1 kW/m² de energía durante las horas diurnas en días claros. Si esta energía se pudiese convertir en eléctrica con un 25% de eficiencia, ¿qué cantidad de superficie habría que cubrir con placas solares para hacer funcionar una bomba de riego de 4 hp durante las horas diurnas? SSM

86 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** La radiación solar que llega a la órbita terrestre es 1,35 kW/m². (*a*) El 25% de esta energía es absorbida y/o reflejada por la atmósfera antes de que llegue a la superficie terrestre, incluso cuando el Sol está verticalmente sobre la superficie terrestre y las condiciones son de sequedad desértica. Si la frecuencia media de la radiación electromagnética solar es de $5{,}5 \times 10^{14}$ Hz, ¿cuántos fotones por segundo incidirán sobre un panel solar de 1 m²? (*b*) Suponer que la eficiencia de los paneles para convertir la energía solar en eléctrica es del 10%. ¿Cómo de grande debe ser el panel necesario para hacer funcionar un coche solar de 5 hp (suponiendo que el coche sólo utiliza la energía solar para funcionar) durante una carrera de coches en el Cairo un 21 de marzo al mediodía? (*c*) Suponiendo una eficiencia más realista de un 3,3% y que los paneles pueden rotar a fin de mantenerse perpendiculares a los rayos solares, ¿cómo de grandes deberían ser los paneles necesarios para hacer funcionar la Estación Espacial Internacional (EEI)? La EEI requiere 110 kW de potencia eléctrica.

87 •• En 1964, el coche *Spirit of America*, de 1250 kg, propulsado a chorro, tras perder su paracaídas y correr sin control sobre la pista de Bonneville Salt Flats (Utah), dejó unas marcas de derrape de 8 km de longitud (debido a esto se ganó un puesto en el libro Guinness de los récords por las marcas de derrape más largas). (*a*) Si el coche se desplazaba inicialmente a 800 km/h e iba a 300 km/h cuando el conductor pisó a fondo el freno, determinar el coeficiente de rozamiento μ_c. (*b*) ¿Cuál era la energía cinética del coche 60 s después del inicio del derrape?

* Este potencial se conoce como "Potencial de Cornell" desarrollado en *Physical Review Letters*. Mencionar aquí también su relación con el premio Nobel del 2004 concedido a Gross, Wilczek y Politzer.

88 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** La barra de un telesquí en forma de T debe transportar un máximo de 80 esquiadores una distancia de 600 m con una inclinación de 15° sobre la horizontal a una velocidad de 2,5 m/s. El coeficiente de rozamiento cinético entre los esquís de los esquiadores y la nieve es de 0,06. ¿Qué potencia deberá tener el motor del telesquí si la masa media de cada esquiador es de 75 kg? Suponer que los requisitos de seguridad exigen un 50% más de potencia de la mínima necesaria.

89 •• **MÚLTIPLES PASOS** Una caja de masa m descansa sobre el suelo y se conecta a un muelle horizontal cuya constante elástica es k (figura 7.52). El coeficiente de rozamiento cinético entre la caja y el suelo es μ_c. El otro extremo del muelle está conectado a una pared. El muelle está inicialmente en reposo. Si la caja se estira una distancia d_0 y se suelta, la caja se deslizará hacia la pared. Suponer que las espirales del muelle no llegan a tocarse. (*a*) Obtener una expresión para la distancia d_1 que la caja recorre antes de llegar a pararse. (*b*) Suponiendo que $d_1 > d_0$, obtener una expresión para la velocidad de la caja cuando ha recorrido una distancia d_0 tras ser soltada. (*c*) Obtener el valor de μ_c para el cual $d_1 = d_0$.

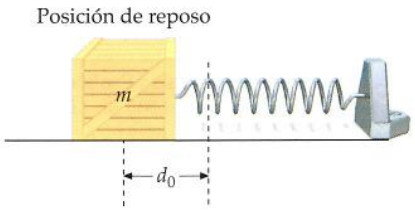


FIGURA 7.52 Problema 89

90 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Usted se encarga de hacer funcionar un montacargas de grano en Champaign (Illinois). Uno de los silos utiliza un montacargas que sube una carga máxima de 800 kg a una altura de 40 m (el montacargas funciona con una correa continua como en el caso de una cinta transportadora). (*a*) ¿Cuál es la potencia suministrada por el motor eléctrico si el montacargas asciende a una velocidad constante de 2,3 m/s? (*b*) Suponiendo que el motor tiene una eficiencia del 85%, ¿cuánto cuesta hacerlo funcionar al día suponiendo que funciona el 60% del tiempo entre las 7:00 h y las 19:00 h elevando una carga media del 85% de la carga máxima? Suponer que el coste energético es de 15 céntimos por kilowatt hora.

91 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Para reducir el consumo de potencia de los motores de los ascensores, éstos utilizan contrapesos conectados mediante un cable que pasa por una polea situada en la parte superior del eje del ascensor. Si el ascensor del problema 90 tiene un contrapeso de masa 1500 kg, ¿cuál es la potencia suministrada por el motor cuando asciende a plena carga a una velocidad de 2,3 m/s? ¿Qué potencia suministra el motor cuando el ascensor asciende vacío a 2,3 m/s?

92 •• En las antiguas películas de ciencia ficción, los escritores intentaban idear nuevas formas de enviar naves espaciales a la Luna. Uno de los guionistas pensó en utilizar un túnel profundo, inclinado 65° sobre la horizontal. En el fondo del túnel habría un enorme muelle anclado por un extremo. Cuando el muelle está relajado, su otro extremo estaría a 30 m de la parte alta del túnel. El guionista había calculado que para que una nave de 318 kg llegara a la Luna debía salir del túnel a 11,2 km/s. Si el muelle se comprime 95 m justo antes del lanzamiento, ¿cuál es el valor mínimo de la constante elástica del muelle? Despreciar el rozamiento con el aire.

93 •• En una erupción volcánica, se expulsa verticalmente hacia arriba un trozo de 2 kg de roca volcánica porosa con una velocidad inicial de 40 m/s, alcanzando una altura de 50 m antes de que comience a caer hacia la Tierra. (*a*) ¿Cuál es la energía cinética inicial de la roca? (*b*) ¿Cuál es el incremento de energía térmica debido al rozamiento del aire durante el ascenso? (*c*) Si el incremento de energía térmica debido al rozamiento del aire en el descenso es el 70% del que tuvo lugar en el ascenso, ¿cuál es la velocidad de la roca cuando vuelve a su posición inicial? SSM

94 •• Un bloque de masa m parte del reposo a una altura h y se desliza hacia abajo por un plano inclinado, sin rozamiento, que forma un ángulo θ con la horizontal, como indica la figura 7.53. El bloque choca contra un muelle de constante elástica k. Determinar la compresión del muelle cuando el bloque se detiene momentáneamente.

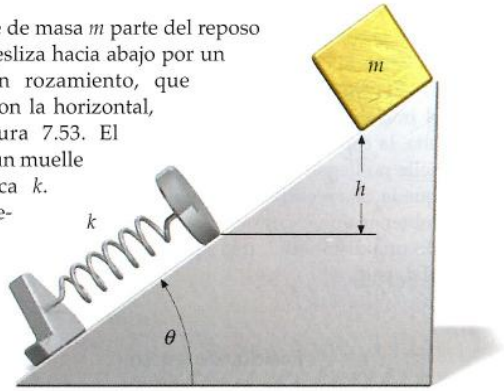


FIGURA 7.53 Problema 94

95 •• **HOJA DE CÁLCULO** Se suspende una masa m del techo mediante un muelle que puede moverse verticalmente en la dirección y, como se indica en la figura 7.54. La dirección $+y$ va hacia abajo y el origen se sitúa en la posición de la masa cuando se halla en reposo. (*a*) Mostrar que la energía potencial como función de la posición se expresa mediante $U = \frac{1}{2}ky^2 - mgy$. (*b*) Representar U en función de y usando una hoja de cálculo o una calculadora gráfica. Tomar los valores $k = 2$ N/m y $mg = 1$ N. (*c*) Explicar cómo este gráfico muestra que hay una posición de equilibrio estable para un valor positivo de y. Utilizando la expresión del apartado (*a*) para U, determinar (simbólicamente) el valor de y para el cual la masa está en equilibrio. (*d*) A partir de la expresión de U, determinar la fuerza neta hacia abajo que actúa sobre m en cualquier posición y. (*e*) La masa se deja libre desde el reposo en $y = 0$; si no hay rozamiento, ¿cuál es el valor máximo, $y_{máx}$, que alcanzará la masa? Indicar $y_{máx}$ en el gráfico. SSM

FIGURA 7.54 Problema 95

96 •• Una pistola lanzaseñales se carga comprimiendo el muelle una distancia d y dispara una bengala de masa m dirigida verticalmente hacia arriba. La bengala tiene una velocidad v_0 cuando abandona el muelle y alcanza una altura máxima h respecto al punto donde abandona el muelle. Los efectos de resistencia del aire son importantes. (Expresar las respuestas en función de m, v_0, d, h y g.) (*a*) ¿Cuánto trabajo se realiza sobre el muelle en el proceso de compresión? (*b*) ¿Cuál es el valor de la constante del muelle, k? (*c*) ¿Cuánta energía mecánica se transforma en energía térmica a causa de la fuerza de arrastre del aire sobre la bengala en el tiempo que transcurre entre el disparo y la llegada a su altura máxima?

97 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Una vagoneta de una montaña rusa de masa total 500 kg (incluidos los pasajeros) se desplaza libremente por la pista, sin rozamiento del aire, indicada en la figura 7.55. Los puntos A, E y G son secciones rectas horizontales, todas ellas de la misma altura de 10 m sobre el suelo. El punto C, que está a una altura de 10 m sobre el suelo,

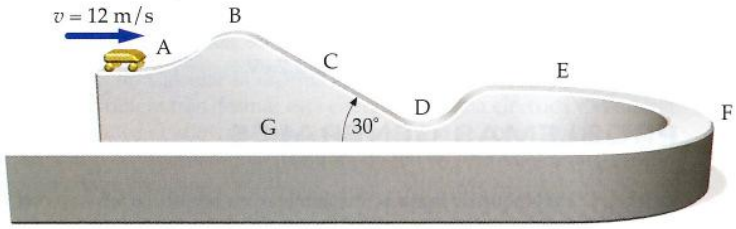


FIGURA 7.55 Problema 97

pertenece a una pendiente que forma un ángulo de 30°. El punto B está en lo alto de una cuesta, mientras que el punto D pertenece a una hondonada que está al nivel del suelo. El radio de curvatura de cada uno de estos puntos es 20 m. El punto F está en el medio de una curva horizontal con peralte de radio de curvatura 30 m y a la misma altura de 10 m sobre el suelo que los puntos A, E y G. En el punto A, la velocidad de la vagoneta es 12 m/s. (*a*) Si la vagoneta es capaz de llegar justamente al punto B de la cuesta, ¿cuál es la altura de este punto sobre el suelo? (*b*) Si se cumple la condición (*a*), ¿cuál es la magnitud de la fuerza total ejercida sobre la vagoneta por la pista en el punto B? (*c*) ¿Cuál es la aceleración de la vagoneta en el punto C? (*d*) ¿Cuáles son el módulo y dirección de la fuerza total ejercida sobre la vagoneta por la pista en el punto D? (*e*) ¿Cuáles son el módulo y dirección de la fuerza total ejercida sobre la vagoneta por la pista en el punto F? (*f*) Al llegar el punto G se aplica a la vagoneta una fuerza de frenado constante que provoca su parada en una distancia de 25 m. ¿Cuál es la fuerza de frenado?

98 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** El cable de un ascensor de 200 kg se ha roto y éste se mueve hacia abajo a $v_0 = 1{,}5$ m/s. Un sistema de frenado evita que la velocidad de descenso se incremente. (*a*) ¿A qué ritmo (en J/s) se transforma la energía mecánica en energía térmica en el sistema de frenado? (*b*) Cuando el ascensor se mueve hacia abajo a $v_0 = 1{,}5$ m/s, falla el sistema de frenado y cae libremente a lo largo de una distancia $d = 5$ m antes de chocar contra el tope de un gran muelle de seguridad con una constante elástica $k = 1{,}5 \times 10^4$ N/m. Determinar la distancia Δy que se comprime el muelle tras el choque antes de que la cabina del ascensor quede en reposo.

99 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Para medir la fuerza de rozamiento (rozamiento por rodadura y fuerza arrastre del aire) sobre un coche en movimiento, un mecánico apaga el motor y deja que el vehículo se deslice cuesta abajo en pendientes conocidas. El mecánico registra los siguientes datos: (1) Sobre una pendiente de 2,87° el coche se desliza uniformemente a 20 m/s. (2) Sobre una pendiente de 5,74° la velocidad constante de deslizamiento es 30 m/s. La masa total del coche es 1000 kg. (*a*) ¿Cuál es la fuerza de rozamiento a 20 m/s (F_{20}) y a 30 m/s (F_{30})? (*b*) ¿Qué potencia útil debe suministrar el motor para que el coche circule sobre una carretera horizontal a las velocidades estacionarias de 20 m/s (P_{20}) y 30 m/s (P_{30})? (*c*) A todo gas, el motor suministra 40 kW. ¿Cuál es el ángulo máximo de pendiente hacia arriba para el cual el coche puede mantener una velocidad estacionaria de 20 m/s? (*d*) Suponer que el motor suministra el mismo trabajo útil total por cada litro de combustible, cualquiera que sea su velocidad. A 20 m/s sobre una carretera horizontal, el coche recorre 12,7 km/L. ¿Cuántos kilómetros por litro recorrerá si su velocidad es 30 m/s? SSM

100 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** (*a*) Calcular la energía cinética de un coche de 1200 kg que se mueve a 50 km/h. (*b*) Si el rozamiento (de rodadura y del aire) produce una fuerza de 300 N a una velocidad de 50 km/h, ¿cuál es la energía mínima necesaria para que el coche se desplace 300 m a 50 km/h?

101 ••• Un péndulo consiste en una pequeña masa (M) atada al extremo de una cuerda de longitud L. Tal como muestra la figura 7.56, la masa se coloca en posición horizontal y se suelta. En el punto más bajo de la oscilación, la cuerda choca con una clavija delgada situada a una distancia R por encima de dicho punto. Demostrar que R debe ser menor que $2L/5$ para que la masa describa un círculo entero alrededor del punto R.

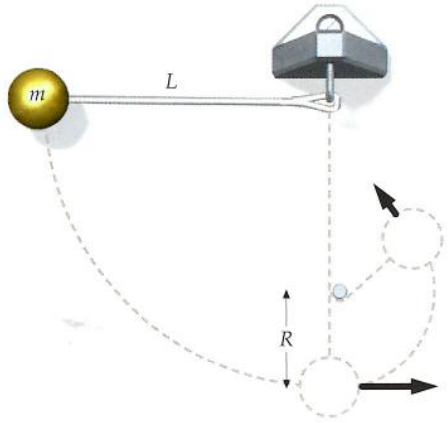


FIGURA 7.56 Problema 101

102 •• Una lancha de 285 kg se conduce sobre la superficie de un lago a una velocidad de 13,5 m/s en dirección hacia una rampa inclinada un ángulo de 25° sobre la horizontal. El coeficiente de rozamiento entre la parte inferior de la lancha y la superficie de la rampa es de 0,15 y la parte más elevada de la rampa queda a 2 m por encima de la superficie del agua. (*a*) Suponiendo que los motores se apagan cuando la lancha llega a la rampa, ¿a qué velocidad sale la lancha de la rampa? (*b*) ¿Con qué velocidad cae de nuevo la lancha sobre el agua? Despreciar la resistencia del aire.

FIGURA 7.57 Problema 103

103 •• En la figura 7.57 se muestra una experiencia estándar de un curso introductorio de física diseñada para analizar la conservación de la energía y las leyes de Newton. Una pequeña viga de masa M atada a una cuerda sin masa de cuyo extremo cuelga un peso de masa m se coloca en un raíl de aire. Cuando el aire circula por el raíl, éste esencialmente no tiene rozamiento. Se suelta entonces la masa m y se mide la velocidad de la viga después de que el peso haya caído una distancia y. Para demostrar que las leyes de la física son coherentes, determinar la velocidad de la viga de dos formas diferentes: (*a*) mediante la conservación de la energía mecánica; (*b*) usando la segunda y la tercera leyes de Newton directamente, es decir, haciendo un diagrama de fuerzas para las dos masas, determinando su aceleración y, a partir de ella, calculando la velocidad de la viga.

104 •• **APLICACIÓN BIOLÓGICA** En el caso de una persona haciendo *footing*, se supone que la energía se consume principalmente en acelerar y decelerar los pies y las partes más bajas de las piernas. Si esta persona corre a una velocidad v, entonces la velocidad máxima de un pie y de la parte inferior de la pierna es $2v$. (Desde el momento en que el pie deja de estar en contacto con el suelo hasta el momento que contacta de nuevo recorre casi dos veces la distancia que recorre el torso, de forma que debe ir casi dos veces más rápido que el torso.) Si la masa del pie y la parte más baja de la pierna es m, la energía necesaria para acelerar el pie y la parte baja de la pierna desde el reposo hasta una velocidad $2v$ es $\frac{1}{2}m(2v)^2 = 2mv^2$, y la misma energía se necesita para decelerar esta masa hasta el próximo paso. Suponer que la masa del pie y la parte más baja de la pierna es de 5 kg y que una persona corre a 3 m/s con una zancada de 1 m. La energía que se debe aportar a cada pierna por cada 2 m de recorrido es $2mv^2$, de forma que la energía necesaria para ambas piernas por cada segundo de footing es $6mv^2$. Calcular la tasa de consumo energético de una persona cuyos músculos tienen un eficiencia del 20% utilizando este modelo.

105 •• Un profesor de química de secundaria sugirió medir el módulo de la aceleración de la gravedad mediante el método siguiente: Colgar un peso de un hilo muy fino de longitud L formando un péndulo que se coloca en el extremo de una mesa, de tal forma que éste queda a una altura H sobre el suelo en el punto de altura mínima de su oscilación. Tirar entonces del hilo de forma que forme un ángulo θ_0 con la vertical. Colocar en el punto más bajo del péndulo una cuchilla que corte el hilo. Cuando éste se ha cortado, la masa se proyecta horizontalmente y cae a una distancia D del borde de la mesa. La idea es medir D en función de θ_0 y que esto sirva para determinar g. Además de las dificultades experimentales obvias, el procedimiento tiene un problema grave: ¡D no depende de g! Muestre que esto es verdad y que D depende únicamente de θ_0. SSM

106 ••• Se empuja hacia un lado la lenteja de un péndulo de longitud L de modo que la cuerda forme con la vertical un ángulo θ_0, y luego se suelta. En el ejemplo 7.5 se utilizó el principio de conservación de la energía para obtener su velocidad en la parte inferior de la trayectoria. En este problema se pide llegar al mismo resultado utilizando la segunda ley de Newton. (*a*) Demostrar que la componente tangencial de la segunda ley de Newton viene dada por $dv/dt = -g \operatorname{sen}\theta$, donde v es el módulo de la velocidad y θ el ángulo que forma la cuerda con la vertical. (*b*) Demostrar que v se puede escribir en la forma $v = L\, d\theta/dt$. (*c*) Utilizar este resultado y la regla de la derivación en cadena para obtener $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{d\theta}\dfrac{v}{L}$. (*d*) Combinar los resultados de (*a*) y (*c*) para obtener $v\, dv = -gL \operatorname{sen}\theta\, d\theta$. (*e*) Integrar el miembro de la izquierda de esta ecuación desde $v = 0$ hasta la velocidad final v y el miembro de la derecha desde $\theta = 0$ a $\theta = \theta_0$ y demostrar que el resultado es equivalente a $v = \sqrt{2gh}$, siendo h la altura original de la lenteja del péndulo sobre el punto más bajo de su recorrido.

107 ••• **HOJA DE CÁLCULO** Un escalador de 85 kg está bajando por la pendiente de una roca cuando su sujeción falla y queda sostenido únicamente por la cuerda de seguridad atada a un punto de la cima. La forma de la pared puede esquematizarse tal como se muestra en la fi-

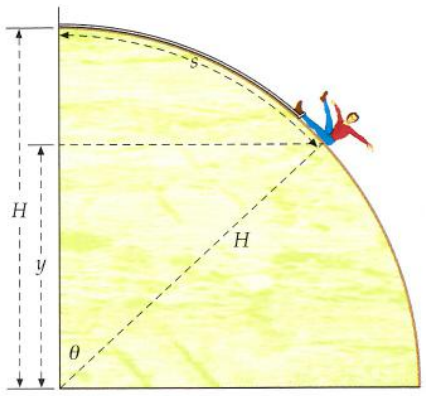


FIGURA 7.58 Problema 107

gura 7.58, con $H = 300$ m. Suponga que la cuerda se comporta como un muelle de constante elástica $k = 5$ N/m y de 60 m de longitud. (*a*) Usando una hoja de cálculo, represente gráficamente la energía potencial del escalador en función de s, siendo ésta la distancia desde la cima medida a lo largo de la curva de la superficie de la roca. Use valores de s comprendidos entre 60 m y 200 m. (*b*) Si la caída comenzó cuando estaba a una distancia $s_i = 60$ m de la cima y acabó a una distancia $s_f = 110$ m, determinar cuánta energía se disipó por rozamiento desde el momento que empezó a resbalar hasta que finalmente quedó parado.

108 ••• **HOJA DE CÁLCULO** Un bloque de madera de masa m está conectado a dos muelles sin masa, tal como se muestra en la figura 7.59. Cada muelle tiene una longitud L y una constante elástica k. (*a*) Si el bloque se desplaza una distancia x, como se muestra en la figura, ¿cuál es el cambio de la energía potencial almacenada en los muelles? (*b*) ¿Cuál es el módulo de la fuerza que tira del bloque hacia la posición de equilibrio? (*c*) Usando una hoja de cálculo o una calculadora gráfica, represente gráficamente la energía potencial U en función de x para $0 \leq x \leq 0{,}2$ m. Supóngase $k = 1$ N/m, $L = 0{,}1$ m y $m = 1$ kg. (*d*) Si el bloque se desplaza una distancia $x = 0{,}1$ m y, posteriormente, se suelta, ¿cuál es su velocidad cuando pasa por la posición de equilibrio? Supóngase que el bloque está descansando sobre una superficie sin rozamiento.

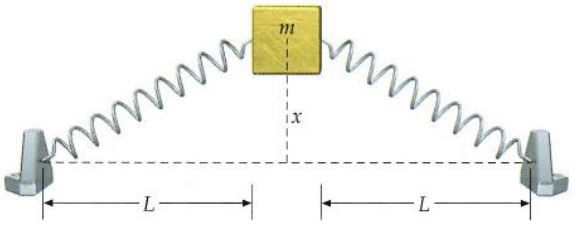


FIGURA 7.59 Problema 108

CAPÍTULO 8

DURANTE EL BREVE PERIODO DE TIEMPO QUE LA CABEZA DE UN PALO DE GOLF ESTÁ EN CONTACTO CON LA BOLA DE GOLF, SE EJERCE UNA GRAN FUERZA QUE HACE VOLAR A LA BOLA A TRAVÉS DEL AIRE. LA FUERZA APLICADA SUELE SER UNAS 10 000 VECES EL PESO DE LA BOLA, COMUNICANDO UNA ACELERACIÓN DE 10 000*g* DURANTE MEDIO MILISEGUNDO, APROXIMADAMENTE.
(Joe McNally/Getty Images.)

Conservación del momento lineal

8.1 Conservación del momento lineal
8.2 Energía cinética de un sistema
8.3 Colisiones
*8.4 Colisiones en el sistema de referencia del centro de masas
8.5 Sistemas de masa variable: la propulsión de los cohetes

? Si el golfista desplaza la bola a 200 metros, ¿cuánto vale la fuerza que ejerció el palo de golf sobre la bola? (Véase el ejemplo 8.8.)

Cuando la cabeza del palo de golf golpea la bola, el módulo de la fuerza ejercida sobre la bola crece hasta alcanzar un valor máximo a partir del cual desciende hasta cero cuando la bola sale despedida. Para describir cómo una fuerza dependiente del tiempo afecta al movimiento del cuerpo sobre el que actúa, necesitaremos introducir dos conceptos nuevos: el impulso de una fuerza y el momento* de un cuerpo. Como sucede con la energía, el momento es una magnitud que se conserva. Uno de los principios más importantes de la física es la *ley de conservación del momento*, que dice que el momento total de un sistema y sus alrededores no cambia. Siempre que el momento de un sistema cambie, quiere decir que debemos considerar la aparición o desaparición de momento en algún otro lugar. Teniendo presente estas ideas, dispondremos de nuevas herramientas para analizar las colisiones que tienen lugar entre partículas, como, por ejemplo, entre los palos y las bolas de golf, entre coches o entre partículas subatómicas en un reactor.

* En este capítulo, el término momento se refiere al momento lineal. (El momento angular se trata en el capítulo 10.)

En este capítulo, introducimos las ideas de impulso y momento lineal y demostramos cómo a partir de la integración de la segunda ley de Newton obtendremos un teorema importante conocido como el teorema impulso-momento. Determinaremos si el momento de un sistema permanece constante y cómo aplicar esta conservación para resolver problemas de colisiones entre cuerpos. Además, examinamos un nuevo sistema de referencia, conocido como el sistema de referencia del centro de masas y exploraremos situaciones en las cuales un sistema tiene una masa que varía continuamente.

8.1 CONSERVACIÓN DEL MOMENTO LINEAL

Cuando Newton concibió su segunda ley consideró el producto de la masa y la velocidad como una medida de la cantidad de movimiento de un cuerpo. Hoy en día, llamamos momento lineal o cantidad de movimiento $\vec{p}$ al producto de la velocidad de una partícula por su masa:

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{8.1}$$

DEFINICIÓN: MOMENTO LINEAL DE UNA PARTÍCULA

La cantidad $\vec{p}$ se designa como *momento lineal de una partícula* para distinguirlo del momento angular, que se trata en el capítulo 10. Cuando no hace falta clarificar que el momento se refiere al momento lineal, el adjetivo lineal se omite y nos referimos simplemente al *momento*. En el resto de este capítulo se usa el vocablo momento para referirnos al *momento* lineal.

El momento lineal es una magnitud vectorial. Es el producto entre un vector (la velocidad) y un escalar (la masa). Su módulo es mv y tiene la misma dirección que $\vec{v}$. Las unidades del momento son unidades de masa por velocidad; así, en el SI las unidades del momento son kg · m/s.

El momento puede considerarse como una medida de la dificultad de llevar la partícula hasta el reposo. Por ejemplo, un camión pesado tiene mayor momento lineal que un automóvil ligero que se mueve con igual velocidad. Es necesaria una fuerza mayor para detener el camión en un tiempo determinado que para detener el automóvil en el mismo tiempo.

La segunda ley de Newton puede escribirse en función del momento de una partícula. Diferenciando la ecuación 8.1, se obtiene

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

Sustituyendo $m\vec{a}$ por la fuerza $\vec{F}_{\text{neta}}$, resulta

$$\vec{F}_{\text{neta}} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{8.2}$$

Por lo tanto, la fuerza neta que actúa sobre una partícula es igual a la derivada respecto al tiempo del momento de la partícula. En realidad, el enunciado original de Newton sobre la segunda ley tenía esta forma. (En su famoso tratado *Principia* (1687), Isaac Newton presenta la segunda ley de Newton de esa forma, mas que de la forma $\vec{F}_{\text{neta}} = m\vec{a}$.)

El momento total $\vec{P}_{\text{sist}}$ de un sistema de muchas partículas es la suma de los momentos de las partículas individuales:

$$\vec{P}_{\text{sist}} = \sum_i m_i\vec{v}_i = \sum_i \vec{p}_i$$

De acuerdo con la ecuación 5.20, $\Sigma m_i\vec{v}_i$ es igual a la masa total M multiplicada por la velocidad del centro de masas:

$$\vec{P}_{\text{sist}} = \sum_i m_i\vec{v}_i = M\vec{v}_{\text{cm}} \tag{8.3}$$

MOMENTO TOTAL DE UN SISTEMA

Derivando esta ecuación respecto al tiempo, se obtiene

$$\frac{d\vec{P}_{\text{sist}}}{dt} = M\frac{d\vec{v}_{\text{cm}}}{dt} = M\vec{a}_{\text{cm}}$$

pero de acuerdo con la segunda ley de Newton, $M\vec{a}_{\text{cm}}$ es igual a la fuerza externa neta que actúa sobre el sistema. Por lo tanto,

$$\sum_i \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{F}_{\text{neta ext}} = \frac{d\vec{P}_{\text{sist}}}{dt} \qquad 8.4$$

Cuando la fuerza externa resultante que actúa sobre un sistema de partículas es cero, la derivada del momento lineal total es también cero, y el momento lineal total del sistema permanece constante:

Si $\Sigma\vec{F}_{\text{ext}} = 0$, entonces $\vec{P}_{\text{sist}} = \sum_i m_i\vec{v}_i = M\vec{v}_{\text{cm}} = \text{constante}$ 8.5

CONSERVACIÓN DEL MOMENTO

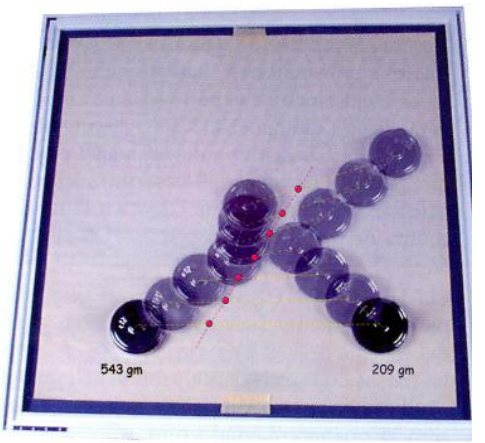
Este resultado se conoce con el nombre de **ley de conservación del momento**:

> Si la fuerza externa resultante sobre un sistema es cero, el momento lineal total del sistema permanece constante.

Esta ley es una de las más importantes de la física. Es aplicable en un mayor número de casos que la ley de conservación de la energía mecánica debido a que las fuerzas internas ejercidas por una partícula del sistema sobre otra son frecuentemente no-conservativas. Así pues, estas fuerzas internas pueden hacer variar la energía mecánica total del sistema, pero no pueden modificar la cantidad de movimiento total del sistema. Si el momento lineal total de un sistema es constante, la velocidad vectorial del centro de masas del sistema también es constante. La ley de conservación del momento es una relación vectorial, por lo que es válida componente a componente. Por ejemplo, si la suma de las componentes x de las fuerzas externas que actúan sobre el sistema es cero, la componente x del momento total del sistema permanece constante. Es decir,

Si $\Sigma F_{\text{ext}\,x} = 0$, entonces $P_{\text{sist}\,x} = \text{constante}$ 8.6

CONSERVACIÓN DE UNA COMPONENTE DEL MOMENTO



Dos discos se mueven en un colchón de aire sobre una superficie horizontal. (En la fotografía no se ven los pequeños agujeros por los que sale el aire.) La colisión hace cambiar el módulo y la dirección de la velocidad de cada disco, pero la velocidad del centro de masas sigue constante, sin que le afecten las fuerzas internas de la colisión. *(Gentileza de Daedalon Corporation.)*

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Calcular velocidades utilizando la conservación del momento (ecuación 8.5)

PLANTEAMIENTO Verificar que la fuerza neta externa $\Sigma\vec{F}_{\text{ext}}$ (o $\Sigma F_{\text{ext}\,x}$) que actúa sobre el sistema es despreciable durante algún intervalo de tiempo. Si esto no se cumple, no se puede resolver el problema de la forma que se plantea a continuación.

SOLUCIÓN

1. Dibujar el sistema antes y después del intervalo de tiempo. Incluir ejes de coordenadas e indicar en la gráfica los vectores velocidad inicial y final.
2. Igualar los momentos iniciales con los finales. Es decir, escribir la ecuación $m_1\vec{v}_{1\text{i}} + m_2\vec{v}_{2\text{i}} = m_1\vec{v}_{1\text{f}} + m_2\vec{v}_{2\text{f}}$ (o $m_1v_{1\text{i}x} + m_2v_{2\text{i}x} = m_1v_{1\text{f}x} + m_2v_{2\text{f}x}$).
3. Introducir la información dada en las ecuaciones del paso 2 y despejar las incógnitas.

COMPROBACIÓN Asegúrese de que se incluyen los signos de las direcciones de las velocidades, ya que tendrán influencia en el resultado final.

Ejemplo 8.1 Mantenimiento espacial

Durante la reparación del telescopio espacial *Hubble*, una astronauta reemplaza dos paneles solares cuyos marcos se han curvado. Al empujar los paneles deteriorados hacia atrás en el espacio exterior, ella experimenta un impulso en sentido opuesto. La masa de la astronauta es 60 kg y la del panel 80 kg. La astronauta y el panel están inicialmente en reposo respecto al telescopio. La astronauta empuja el panel y éste se mueve a 0,3 m/s respecto del telescopio. ¿Cuál es su velocidad posterior respecto al telescopio? (Durante esta operación la astronauta está sujeta con una cuerda a la nave espacial; para nuestro cálculo, suponer que la cuerda permanece floja.)

(NASA.)

PLANTEAMIENTO Consideramos que el sistema está compuesto de la astronauta y el panel, y tomamos la dirección $-x$ como la dirección del movimiento del panel. El momento del sistema se conserva, pues no hay fuerzas externas que actúen sobre él. Como sabemos las masas de la astronauta y del panel, podemos calcular la velocidad de la astronauta utilizando la conservación del momento. Como el momento total del sistema es inicialmente cero, permanecerá igual a cero.

SOLUCIÓN

1. Hacer un dibujo del sistema antes y después del empujón. Incluir los vectores velocidad (figura 8.1):

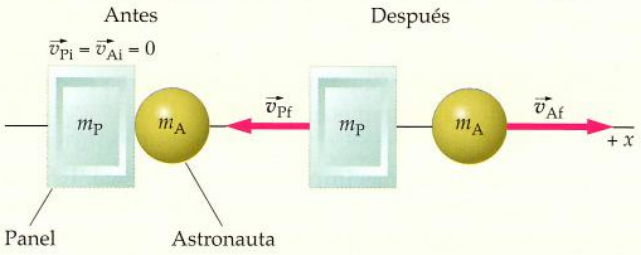


FIGURA 8.1

2. Aplicar la segunda ley de Newton al sistema. Como no hay fuerzas externas, el momento total del sistema permanece constante:

$$\sum_i \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}_{sist}}{dt}$$

$$0 = \frac{d\vec{P}_{sist}}{dt},$$

por lo tanto, $\vec{P}_{sist} = \text{constante}$

3. Igualar los momentos inicial y final. Aplicar la conservación del momento para determinar la velocidad de la astronauta. Como el momento inicial total es cero, continuará siendo cero durante el proceso:

$$\vec{P}_{sist\,i} = \vec{P}_{sist\,f}$$
$$m_P\vec{v}_{Pi} + m_A\vec{v}_{Ai} = m_P\vec{v}_{Pf} + m_A\vec{v}_{Af}$$
$$0 + 0 = m_P\vec{v}_{Pf} + m_A\vec{v}_{Af}$$

4. Despejar la velocidad de la astronauta:

$$\vec{v}_{Af} = -\frac{m_P}{m_A}\vec{v}_{Pf} = -\frac{80\text{ kg}}{60\text{ kg}}(-0{,}30\text{ m/s})\hat{i} = \boxed{(0{,}40\text{ m/s})\hat{i}}$$

COMPROBACIÓN Es de esperar que la velocidad de la astronauta vaya en la dirección $+x$, pues la velocidad del panel va en la dirección $-x$. Como la masa de la astronauta es menor que la del panel también es de esperar que que su velocidad sea mayor que la del panel. Nuestros resultados confirman estos razonamientos.

OBSERVACIÓN Aunque el momento se conserva, la energía mecánica de este sistema se incrementa, ya que, al realizar un esfuerzo, la energía química de la astronauta se convierte en energía cinética.

PROBLEMA PRÁCTICO 8.1 Determinar la energía cinética final del sistema astronauta-panel.

Ejemplo 8.2 El vagón incontrolado

Un vagón de ferrocarril incontrolado de masa 14 000 kg se desplaza horizontalmente a 4 m/s hacia un cambio de agujas. Al pasar cerca de un almacén de grano, 2000 kg de grano caen súbitamente sobre el vagón. ¿Cuánto tiempo tardará el vagón en cubrir la distancia de 500 m que hay desde el almacén hasta el cambio de agujas? Suponer que el grano cae verticalmente y que la desaceleración debida al rozamiento por rodadura y a la resistencia del aire es despreciable.

PLANTEAMIENTO Determinamos el tiempo de recorrido a partir de la distancia al cambio de agujas y la velocidad del vagón. Consideramos como sistema el vagón y el grano caído en él (figura 8.2). Sea $+x$ la dirección del vagón. Como no actúan fuerzas externas horizontales sobre el sistema, la componente horizontal del momento lineal del sistema se conserva. La velocidad final del vagón lleno de grano puede determinarse a partir de su momento final, el cual es igual al momento inicial del vagón. (El grano inicialmente carece de momento lineal horizontal.) Sean m_v y m_g las masas del vagón y del grano, respectivamente.

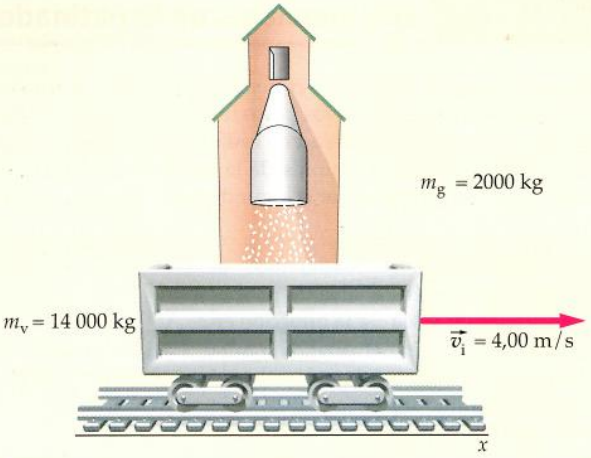


FIGURA 8.2

SOLUCIÓN

1. El tiempo transcurrido desde el almacén hasta el cambio de agujas es la distancia d recorrida dividida por la velocidad v_f del vagón después de que haya caído el grano:
$$d = v_{fx}\,\Delta t$$

2. Dibujar el diagrama de fuerzas del sistema formado por el vagón, el grano que ya está en el vagón y el grano cayendo dentro del vagón (figura 8.3). Incluir los ejes de coordenadas:

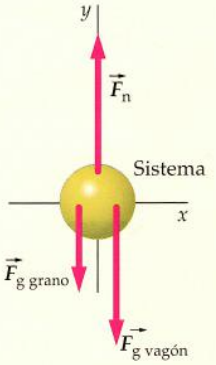


FIGURA 8.3 Las tres fuerzas que actúan sobre el sistema son: la fuerza gravitacional sobre el grano y la vagoneta y la fuerza normal del raíl sobre el vagón.

3. La suma de las fuerzas externas que actúan sobre el sistema grano-vagón es igual al cambio del momento del sistema (ecuación 8.4):
$$\sum \vec{F}_{i\,ext} = \vec{F}_{g\,grano} + \vec{F}_{g\,vagón} + \vec{F}_n = \frac{d\vec{P}_{sist}}{dt}$$

4. Todas las fuerzas son verticales, es decir, no tienen componente x. Tomamos la componente x de cada término del resultado del paso 3. La componente x de la fuerza externa es cero, de forma que $P_{sist\,x}$ es constante:
$$F_{g\,grano\,x} + F_{g\,vagón\,x} + F_{n\,x} = \frac{dP_{sist\,x}}{dt}$$
$$0 + 0 + 0 = \frac{dP_{sist\,x}}{dt}$$
$$\therefore\ P_{sist\,fx} = P_{sist\,ix}$$

5. Hacer un esquema del sistema antes y después de la colisión (figura 8.4):

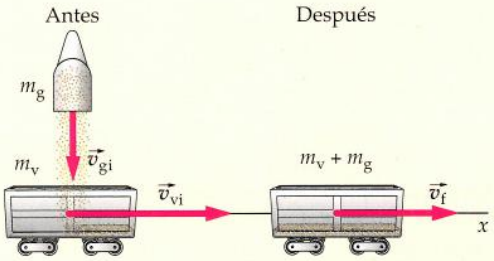


FIGURA 8.4

6. Aplicar el principio de conservación del momento para relacionar la velocidad final v_{fx} con la velocidad inicial v_{ix}. ¡Cuidado! Sólo se conserva la componente horizontal del momento del sistema:
$$P_{sist\,fx} = P_{sist\,i}$$
$$(m_v + m_g)v_{fx} = m_v v_{ix} + m_g(0)$$

7. Despejar v_{fx}:
$$v_{fx} = \frac{m_v}{m_v + m_s} v_{ix}$$

8. Aplicar el valor de v_{fx} del paso 1 y despejar el tiempo:
$$\Delta t = \frac{d}{v_{fx}} = \frac{(m_v + m_s)d}{m_v v_{ix}}$$
$$= \frac{(14\,000\text{ kg} + 2000\text{ kg})(500\text{ m})}{(14\,000\text{ kg})(4{,}00\text{ m/s})}$$
$$= \boxed{1{,}43 \times 10^2\text{ s}}$$

COMPROBACIÓN La masa del vagón vacío es siete veces mayor que la masa del grano, de forma que no se espera que el grano reduzca mucho la velocidad del vagón. Si el vagón hubiese continuado con la velocidad inicial de 4 m/s, hubiese tardado 125 s en recorrer los 500 m, un poco menos de lo que tardó en realidad, 143 s.

PROBLEMA PRÁCTICO 8.2 Supongamos que hay un pequeño agujero en el fondo del vagón, de modo que el grano se escapa por él a razón de 10 kg/s. ¿Cuánto tiempo tarda ahora el vagón en cubrir los 500 m?

Ejemplo 8.3 Los ejercicios de la patinadora

Una patinadora de 40 kg está entrenándose con dos pesas de 5 kg sobre una tabla de 3 kg. Partiendo del reposo, lanza los pesos horizontalmente uno tras otro desde su tabla. Después de su lanzamiento, la velocidad de cada peso es de 7 m/s relativa a la patinadora y su tabla. (*a*) ¿Con qué velocidad es impulsada la patinadora en dirección opuesta después de lanzar el primer peso? (*b*) ¿Y tras lanzar el segundo peso? Suponer que la tabla se mueve sin rozamiento.

PLANTEAMIENTO Consideremos el sistema formado por la tabla, la patinadora y los pesos, y sea $-x$ la dirección en la que se lanza el primer peso. Ninguna fuerza externa horizontal actúa sobre el sistema patinadora-pesos-tabla, de modo que la componente horizontal del momento lineal se conserva. Necesitamos determinar la velocidad de la patinadora después del lanzamiento de cada peso (figura 8.5). Podemos utilizar la conservación del momento, donde la masa m de cada peso es 5 kg y la masa M de la tabla más la patinadora es de 43 kg. El suelo es un sistema de referencia inercial.

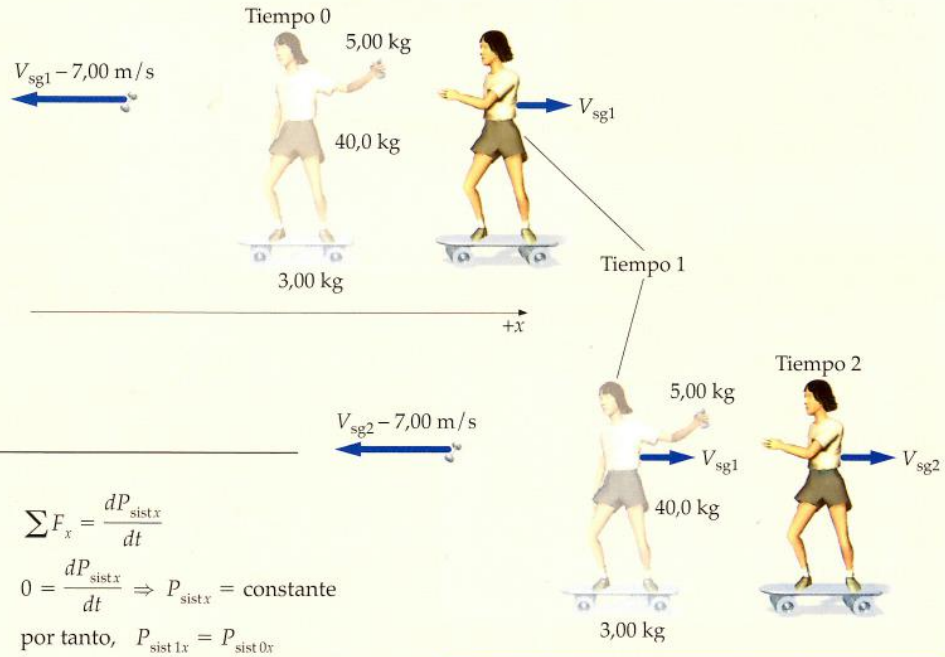


FIGURA 8.5 Los subíndices indican el tiempo. El tiempo 0 corresponde a un instante anterior al lanzamiento del primer peso, el tiempo 1 corresponde a un instante de tiempo comprendido entre el primer y el segundo lanzamiento, y el subíndice 2 indica que la patinadora ya ha lanzado los dos pesos.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Sean V_{sg1x} y V_{ws1x} las componentes x de velocidades respectivas de la patinadora y del primer peso lanzado relativas al suelo. Aplicar la conservación del momento después del lanzamiento del primer peso:

$$\sum F_x = \frac{dP_{sistx}}{dt}$$

$$0 = \frac{dP_{sistx}}{dt} \Rightarrow P_{sistx} = \text{constante}$$

por tanto, $P_{sist\,1x} = P_{sist\,0x}$

$$(M + m)V_{sg1x} + mv_{wg1x} = 0$$

2. La velocidad del peso lanzado relativo al suelo es la velocidad del peso relativa a la tabla más la velocidad de la tabla relativa al suelo:

$$v_{wg1x} = v_{ws\,1x} + V_{sg1x}$$

3. Sustituyendo v_{ws1x} por el resultado del paso 1, se obtiene V_{sg1x}:

$$(M + m)V_{sg1x} + m(v_{ws1x} + V_{sg1x}) = 0$$

por lo tanto,

$$V_{sg1x} = -\frac{m}{M + 2m}v_{ws1x}$$

$$= -\frac{5{,}00\text{ kg}}{43{,}0\text{ kg} + 10{,}0\text{ kg}}(-7{,}00\text{ m/s}) = \boxed{0{,}660\text{ m/s}}$$

(*b*) 1. Se repite el paso 1 del apartado (*a*) para el lanzamiento del segundo peso. Sean V_{sg2x} y $v_{w'g2x}$ las velocidades respectivas de la patinadora y del segundo peso lanzado relativas al suelo:

$$P_{sist2x} = P_{sist\,1x}$$

$$MV_{sg2x} + mv_{w'g2x} = (M + m)V_{sg1x}$$

2. Se repite el paso 2 del apartado (*a*) para el lanzamiento del segundo peso:

$$v_{w'g2x} = v_{w's2x} + V_{sg2x}$$

3. Sustituyendo en $v_{w'g2x}$ el resultado del paso 1 del apartado (*b*), se obtiene V_{sg2x}:

$$MV_{sg2x} + m(v_{w's2x} + V_{sg2x}) = (M + m)V_{sg1x}$$

por lo tanto,

$$V_{sg2x} = \frac{(M + m)V_{sg1x} - mv_{w's2x}}{M + m} = V_{sg1x} - \frac{m}{M + m}v_{w's2x}$$

$$= 0{,}660\text{ m/s} - \frac{5{,}00\text{ kg}}{48{,}0\text{ kg}}(-7{,}00\text{ m/s}) = \boxed{1{,}39\text{ m/s}}$$

COMPROBACIÓN Después del segundo lanzamiento, la masa de la tabla y su carga es de 43 kg, es decir, 5 kg menos que después del primer lanzamiento. Como la masa es menor para el segundo lanzamiento, esperamos que el aumento de la velocidad de la patinadora sea mayor en el segundo lanzamiento que en el primero. Los resultados muestran cómo su velocidad aumenta en 0,66 m/s durante el primer lanzamiento y en 1,39-0,66 m/s = 0,73 m/s durante el segundo lanzamiento, como era de esperar, se trata de un pequeño aumento en el cambio de la velocidad.

OBSERVACIÓN Este ejemplo ilustra el principio del cohete; un cohete se mueve hacia delante lanzando combustible hacia atrás en forma de gases de escape. Conforme la masa del cohete disminuye, su aceleración aumenta, como sucede con la patinadora, que gana más velocidad con el segundo lanzamiento que con el primero.

PROBLEMA PRÁCTICO 8.3 ¿A qué velocidad se mueve la patinadora si, partiendo del reposo, lanza los dos pesos a la vez, de tal modo que después de lanzados, su velocidad respecto a la patinadora y su tabla es de 7 m/s? ¿Cómo gana más velocidad, lanzándolos a la vez o primero uno y después el otro?

Ejemplo 8.4 Desintegración radiactiva

Un núcleo de torio-227 en reposo se desintegra en un núcleo de radio-223 (masa 223 u) por emisión de una partícula α (masa 4 u) (figura 8.6). La energía cinética de la partícula α resulta ser de 6,00 MeV. ¿Cuál es la energía cinética del núcleo de radio en retroceso?

FIGURA 8.6

PLANTEAMIENTO La desintegración de una partícula en dos partículas es como una colisión invertida en el tiempo. Como el núcleo de torio antes de la desintegración está en reposo, su momento lineal total es cero. Podemos relacionar la velocidad del núcleo de radio con la velocidad de la partícula alfa a partir del principio de conservación del momento lineal.

SOLUCIÓN

1. Expresar la energía cinética del núcleo de radio K_{Ra} en función de su masa m_{Ra} y su velocidad v_{Ra}:
$$K_{Ra} = \tfrac{1}{2} m_{Ra} v_{Ra}^2$$

2. Expresar la energía cinética de la partícula α, K_α en función de su masa m_α y su velocidad v_α:
$$K_\alpha = \tfrac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2$$

3. Utilizar la conservación del momento lineal para relacionar v_{Ra} con v_α. El núcleo de torio estaba en reposo, entonces el momento del sistema es cero:
$$m_\alpha v_\alpha = m_{Ra} v_{Ra}$$

4. Despejar las velocidades v_{Ra} y v_α de los pasos 1 y 2, y sustituir sus expresiones en el resultado del paso 3:
$$K_{Ra} = \tfrac{1}{2} m_{Ra} v_{Ra}^2 \qquad K_\alpha = \tfrac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2$$
$$v_{Ra} = \left(\frac{2K_{Ra}}{m_{Ra}}\right)^{1/2} \qquad v_\alpha = \left(\frac{2K_\alpha}{m_\alpha}\right)^{1/2}$$
$$\text{luego} \quad m_\alpha \left(\frac{2K_\alpha}{m_\alpha}\right)^{1/2} = m_{ra} \left(\frac{2K_{Ra}}{m_{Ra}}\right)^{1/2}$$

5. Despejar K_{Ra}:
$$K_{Ra} = \frac{m_\alpha}{m_{Ra}} K_\alpha = \frac{4{,}00\ \text{u}}{223\ \text{u}} (6{,}00\ \text{MeV}) = \boxed{0{,}107\ \text{MeV}}$$

COMPROBACIÓN Comprobemos el resultado del paso 5 para varios valores de m_α / m_{Ra}. Si las dos masas son iguales, obtenemos, lógicamente, $K_\alpha = K_{Ra}$. Si $m_\alpha << m_{Ra}$ entonces nuestro resultado da $K_{Ra} << K_\alpha$, lo que significa que la energía cinética de la partícula alfa es mucho mayor que la del núcleo de radio. Así mismo, como era de esperar, la velocidad de la partícula alfa será mucho mayor que la del núcleo de radio.

OBSERVACIÓN En este proceso, la energía en reposo del núcleo de torio se transforma en energía cinética de la partícula alfa y del núcleo de radio. La masa del núcleo de torio es mayor que la de la partícula alfa más la del núcleo de radio en unos $(K_\alpha + K_{Ra})/c^2 = 6{,}1\ \text{MeV}/c^2$.

8.2 ENERGÍA CINÉTICA DE UN SISTEMA

Aunque el momento lineal total de un sistema de partículas debe ser constante si la fuerza externa resultante sobre el sistema es cero, la energía mecánica total del sistema puede variar. Como vimos en los ejemplos de la sección anterior, las fuerzas internas, que no pueden alterar el momento lineal total, pueden ser fuerzas no-conservativas y, por lo tanto, modificar la energía mecánica total del sistema. Existe un importante teorema que se refiere a la energía cinética de un sistema de partículas que nos permite tratar más fácilmente la energía de sistemas complejos, así como los cambios energéticos dentro de un sistema:

> La energía cinética de un sistema de partículas puede escribirse como la suma de dos términos: (1) la energía cinética asociada con el movimiento del centro de masas, $\frac{1}{2}Mv_{cm}^2$, donde M es la masa total del sistema; y (2) la energía cinética asociada con el movimiento de las partículas del sistema respecto al centro de masas, $\Sigma\frac{1}{2}m_iu_i^2$, siendo $\vec{u}_i$ la velocidad de la partícula i relativa al centro de masas.

TEOREMA PARA LA ENERGÍA CINÉTICA DE UN SISTEMA

Así,

$$K = \sum_i \tfrac{1}{2}m_iv_{cm}^2 + \sum_i \tfrac{1}{2}m_iu_i^2 = \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2 + K_{rel} \qquad 8.7$$

ENERGÍA CINÉTICA DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

donde M es la masa total y K_{rel} es la energía cinética de las partículas *relativa al centro de masas*.

Para demostrar este teorema, recordemos que la energía cinética de un sistema de partículas es la suma de las energías cinéticas de las partículas individuales:

$$K = \sum_i K_i = \sum_i \tfrac{1}{2}m_iv_i^2 = \sum_i \tfrac{1}{2}m_i(\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i)$$

donde hemos utilizado que $v_i^2 = \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i$. La velocidad de la partícula i puede escribirse como la suma de la velocidad del centro de masas $\vec{v}_{cm}$ y la velocidad de la partícula relativa al centro de masas $\vec{u}_i$:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{u}_i \qquad 8.8$$

La energía cinética del sistema es, por lo tanto,

$$K = \sum_i \tfrac{1}{2}m_i(\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i) = \sum_i \tfrac{1}{2}m_i(\vec{v}_{cm} + \vec{u}_i) \cdot (\vec{v}_{cm} + \vec{u}_i)$$
$$= \sum_i \tfrac{1}{2}m_i(v_{cm}^2 + u_i^2 + 2\vec{v}_{cm} \cdot \vec{u}_i)$$

que puede escribirse como suma de tres términos:

$$K = \sum_i \tfrac{1}{2}m_iv_{cm}^2 + \sum_i \tfrac{1}{2}m_iu_i^2 + \vec{v}_{cm} \cdot \sum_i m_i\vec{u}_i$$

donde en el sumando de la derecha hemos sacado factor común $\vec{v}_{cm}$, ya que es el mismo para todas las partículas, es decir, se refiere al sistema y no a una partícula específica. La magnitud $\Sigma m_i\vec{u}_i$ es el momento lineal del sistema referido al centro de masas. Esta magnitud, que es igual a $M\vec{u}_{cm}$, es necesariamente cero. (Con respecto al centro de masas, la velocidad del centro de masas $\vec{u}_{cm}$ es cero, de modo que el momento lineal total $\Sigma m_i\vec{u}_i$ es también cero.) Por lo tanto,

$$K = \sum_i \tfrac{1}{2}m_iv_{cm}^2 + \sum_i \tfrac{1}{2}m_iu_i^2 = \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2 + K_{rel}$$

Véase el **Apéndice de matemáticas** *para más información sobre* **Factorización**

que completa la demostración de la ecuación 8.7. Cuando no hay fuerzas externas, $\vec{v}_{cm}$ es constante y la energía cinética asociada con el movimiento global $\frac{1}{2}Mv_{cm}^2$ no varía. Sólo la energía cinética relativa puede cambiar en un sistema aislado.

PROBLEMA PRÁCTICO 8.4

Un carrito A se desliza a 1 m/s en la dirección $+x$ a lo largo de un carril con aire sin rozamiento. Un carrito B idéntico se estaciona delante del carrito A. La masa de cada carrito es de 1 kg y el sistema está constituido por ambos carritos. (*a*) ¿Cuál es la velocidad del centro de masas? (*b*) ¿Cuál es la energía cinética de cada carrito relativa al centro de masas? (*c*) ¿Cuál es la energía cinética total relativa al centro de masas? (*d*) Los carritos colisionan y quedan pegados. ¿Cuál es ahora la energía cinética relativa al centro de masas?

8.3 COLISIONES

Un coche colisiona frontalmente con otro. Un bate golpea una pelota de béisbol. Un dardo impacta sobre el blanco de una diana. Cada uno de ellos son ejemplos de colisiones en los cuales dos cuerpos se acercan e interaccionan fuertemente durante un breve periodo de tiempo.

Durante el breve tiempo de colisión, cualquier fuerza externa es mucho menor que las fuerzas de interacción entre los objetos. Entonces, los objetos que colisionan pueden ser tratados como sistemas aislados durante la colisión. Por ello, las únicas fuerzas importantes que actúan sobre el sistema formado por los dos objetos son las fuerzas de interacción, que son iguales y opuestas, de modo que el momento lineal total del sistema permanece invariable. Es decir, el momento total del sistema en el instante anterior a la colisión es igual al momento en el instante posterior a la colisión. El tiempo de colisión es, normalmente, tan pequeño que el desplazamiento de los objetos durante el choque puede despreciarse.

Cuando la energía cinética total de los dos objetos es la misma antes y después del choque se trata de un **choque elástico**. Si la energía cinética total no es la misma después del choque, se dice que es un **choque inelástico**. Un caso extremo es el **choque perfectamente inelástico**, en el cual toda la energía cinética relativa al centro de masas se convierte en calor o energía interna del sistema y los dos objetos comparten la misma velocidad, pues quedan unidos después de la colisión. Examinaremos los diferentes tipos de colisiones con mayor detalle en la próxima sección.

IMPULSO Y FUERZA MEDIA

Cuando dos objetos colisionan, se ejercen mutuamente grandes fuerzas durante un breve tiempo. La fuerza ejercida por un bate de béisbol, por ejemplo, puede ser varios miles de veces el peso de la pelota, pero esta enorme fuerza se ejerce solo durante un milisegundo, aproximadamente. Tales fuerzas se denominan *fuerzas impulsivas*. En la figura 8.7 se muestra la variación con el tiempo del módulo de una fuerza típica ejercida por un cuerpo sobre otro durante un choque. Durante la mayor parte del tiempo de colisión, el intervalo $\Delta t = t_f - t_i$, la fuerza es grande. El resto del tiempo, la fuerza es despreciablemente pequeña. El impulso $\vec{I}$ de la fuerza $\vec{F}$ durante el intervalo de tiempo $\Delta t = t_f - t_i$ es un vector definido por

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\, dt \qquad 8.9$$

DEFINICIÓN: IMPULSO

El impulso es una medida de la intensidad y de la duración de la fuerza de colisión. La componente x del impulso de una fuerza es el área de la curva F_x frente a t. La unidad del impulso en el SI es N · s.

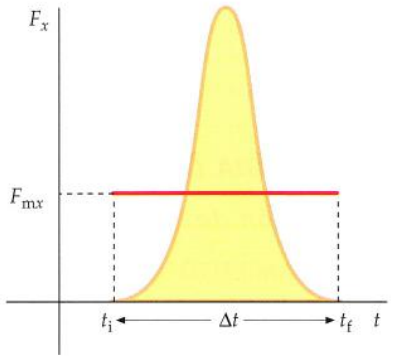


FIGURA 8.7 Variación típica de la fuerza de colisión con el tiempo. El área bajo la curva F_x en función de t es la componente x del impulso, I_x. F_{mx} es la fuerza media en el intervalo de tiempo Δt. El área rectangular $F_{mx}\,\Delta t$ es la misma que la encerrada bajo la curva de F_x en función de t.

Si $\vec{F}_{\text{neta}}$ es la fuerza neta que actúa sobre la partícula, su relación con la variación del momento de esta partícula viene expresada por la segunda ley de Newton, $\vec{F}_{\text{neta}} = d\vec{p}/dt$. Por lo tanto, el impulso de la fuerza neta es igual a la variación total del momento Δp durante el intervalo de tiempo de la colisión:

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{\text{neta}}\, dt = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\vec{p}}{dt}\, dt = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

Identificando el lado izquierdo de esta ecuación como el impulso de la fuerza neta, se tiene

$$\vec{I}_{\text{neta}} = \Delta\vec{p} \qquad 8.10$$

TEOREMA IMPULSO: MOMENTO PARA UNA PARTÍCULA

donde $\vec{I}_{\text{neta}} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{\text{neta}}\, dt$ y $\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$. La ecuación 8-10 se denomina *teorema del impulso mecánico para una partícula*. Asimismo, el impulso neto debido a fuerzas externas en un sistema se iguala con el cambio del momento total del sistema:

$$\vec{I}_{\text{neta ext}} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{\text{neta ext}}\, dt = \Delta\vec{P}_{\text{sist}} \qquad 8.11$$

TEOREMA IMPULSO: MOMENTO PARA UN SISTEMA

La fuerza media durante el intervalo $\Delta t = t_f - t_i$ viene definida por

$$\vec{F}_m = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\, dt = \frac{1}{\Delta t}\vec{I} \qquad 8.12$$

DEFINICIÓN: FUERZA MEDIA

que puede reescribirse de la forma

$$\vec{I} = \vec{F}_m\, \Delta t \qquad 8.13$$

IMPULSO Y FUERZA MEDIA

La fuerza media es la fuerza constante que produce el mismo impulso que la fuerza real en el intervalo de tiempo Δt, como indica el rectángulo de la figura 8.7. La fuerza media puede calcularse a partir del cambio del momento si se conoce el tiempo de choque. Este tiempo puede estimarse a partir de la distancia recorrida por uno de los objetos durante la colisión.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Estimación de la fuerza media

PLANTEAMIENTO Para estimar la fuerza media $\vec{F}_m$ primero estimamos el impulso de la fuerza $\vec{I}$. El impulso de la fuerza es igual (suponiendo que otras fuerzas externas son despreciables) al cambio de momento, que es igual al producto de la masa m por el cambio de velocidad $\vec{v}_f - \vec{v}_i$. Una estimación del cambio de velocidad puede obtenerse a partir del tiempo de colisión Δt y del desplazamiento $\Delta\vec{r}$.

SOLUCIÓN

1. Calcular (o estimar) el impulso $\vec{I}$ y el tiempo Δt. Para realizar esta estimación debemos suponer que durante la colisión, la fuerza de colisión es muy grande en comparación con otras fuerzas que actúan sobre el

objeto. Este procedimiento es válido *sólo* si se puede determinar el desplazamiento después de la colisión.

2. Dibujar el sistema antes y después de la colisión. Incluir los ejes de coordenadas e indicar en la gráfica las velocidades inicial y final, así como el desplazamiento $\Delta\vec{r}$ durante la colisión.
3. Calcular el cambio del momento del objeto durante la colisión. El impulso del objeto será igual al cambio de momento ($\vec{I} = \Delta\vec{p} = m\,\Delta\vec{v}$).
4. Utilizar la cinemática para estimar el tiempo de colisión. Esto quiere decir que utilizando $\vec{v}_m \approx \frac{1}{2}(\vec{v}_i + \vec{v}_f)$ y $\Delta\vec{r} = \vec{v}_m\,\Delta t$ podemos obtener $\Delta\vec{r} \approx \frac{1}{2}(\vec{v}_i + \vec{v}_f)\,\Delta t$, y luego despejar Δt.
5. Usar $\vec{F}_m = \vec{I}/\Delta t = m\,\Delta\vec{v}/\Delta t$ para calcular la fuerza media (ecuación 8.13).

COMPROBACIÓN La fuerza media es un vector. Los resultados de la fuerza media deberán tener la misma dirección que el cambio de velocidad.

(Robert R. Edwards/ BOB-E.)

Ejemplo 8.5 Una colisión en la práctica del kárate

Con un golpe experto de kárate, un karateca rompe un bloque de hormigón. Su mano tiene una masa de 0,70 kg, se mueve a 5,0 m/s al chocar contra el bloque y se detiene a 6 mm del punto de contacto. (*a*) ¿Qué impulso ejerce el bloque sobre la mano del karateca? (*b*) ¿Cuál es el tiempo de colisión aproximado y la fuerza media que el bloque ejerce sobre la mano?

PLANTEAMIENTO El impulso neto es igual a la variación del momento $\Delta\vec{p}$. Esta variación puede determinarse a partir de la masa y velocidad de la mano. El tiempo de colisión correspondiente al apartado (*b*) puede obtenerse del desplazamiento y de la velocidad media durante la colisión, que puede estimarse de la fórmula cinemática, suponiendo una aceleración constante.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Hacer un esquema de la mano y el bloque antes y después del golpe. En la figura de antes del golpe la mano está justo en contacto con el bloque. Incluir un eje de coordenadas vertical (figura 8.8):

2. Expresar que el impulso es igual a la variación de la cantidad de movimiento:
$$\vec{I} = \Delta\vec{p} = m\,\Delta\vec{v}$$

3. La velocidad inicial $\vec{v}_i$ es la que posee la mano antes de chocar contra el bloque. La velocidad final es cero:
$$\vec{v}_i = -5{,}0\ \text{m/s}\,\hat{j}$$
$$\vec{v}_f = 0$$

4. Sustituir los resultados del paso 3 en la ecuación del paso 2 para hallar el impulso que ejerce el bloque sobre la mano:
$$\vec{I} = m\,\Delta\vec{v} = (0{,}70\ \text{kg})[0 - (-5{,}0\ \text{m/s}\,\hat{j})] = 3{,}5\ \text{kg}\cdot\text{m/s}\,\hat{j} = \boxed{3{,}5\ \text{N}\cdot\text{s}\,\hat{j}}$$

(*b*) 1. El desplazamiento es igual a la velocidad media multiplicada por el tiempo. Estimamos la velocidad media suponiendo que la aceleración es constante. Entonces $v_{my} \approx \frac{1}{2}(v_{iy} + v_{fy})$:
$$\Delta y = v_m\,\Delta t \approx \tfrac{1}{2}(v_{iy} + v_{fy})\,\Delta t$$

2. Como hemos elegido $+y$ como la dirección hacia arriba, tanto Δy como v_{my} son negativas. Calculamos Δt:
$$\Delta t \approx \frac{\Delta y}{\frac{1}{2}(v_{iy} + v_{fy})} = \frac{-0{,}006\ \text{m}}{-2{,}5\ \text{m/s}} = 0{,}0024\ \text{s} = 2{,}4\ \text{ms}$$

3. A partir de la ecuación 8.12, la fuerza media es el impulso dividido por el tiempo de colisión. Está dirigida hacia arriba, como era de esperar:
$$\vec{F}_m = \frac{\vec{I}}{\Delta t} = \frac{3{,}5\ \text{N}\cdot\text{s}\,\hat{j}}{2{,}4\ \text{ms}} = \boxed{1{,}5\ \text{kN}\,\hat{j}}$$

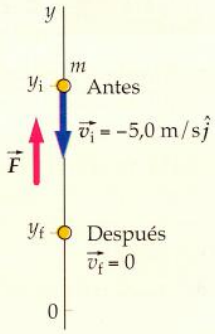


FIGURA 8.8

COMPROBACIÓN La fuerza media sobre la mano va en la dirección $+y$ (hacia arriba). Como era de esperar, esta dirección es la misma que la del cambio de velocidad. (La fuerza media que ejerce el borde de la mano sobre el bloque es igual y opuesta a la fuerza media que ejerce el bloque sobre la mano.)

OBSERVACIÓN La fuerza media es relativamente grande. Si la masa de la mano es aproximadamente de un kilogramo, la fuerza media es unas 150 veces mayor que el peso de la mano. La fuerza media de colisión es mucho mayor que la fuerza gravitacional que actúa sobre la mano durante la colisión.

Ejemplo 8.6 Un coche abollado

Un coche equipado con un maniquí de 80 kg para ensayos de accidentes (figura 8.9), choca contra un muro a 25 m/s. Estimar el desplazamiento del maniquí durante el choque.

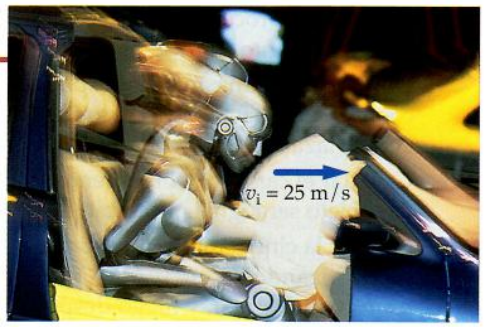


FIGURA 8.9 *(Romilly Lockyer/ The Image Bank.)*

PLANTEAMIENTO El compartimento del pasajero de un coche está diseñado para permanecer rígido, mientras que los parachoques frontal y trasero están diseñados para deformarse con el impacto. Suponer que el maniquí está a medio camino entre la parte frontal y posterior del coche, y que la parte frontal se deforma completamente.

SOLUCIÓN

1. La parte frontal del coche es el compartimento del motor, el radiador, la chapa y el parachoques. Estimar la fracción de longitud que ocupa la parte frontal del coche: — La parte frontal es, aproximadamente, un 25% de la longitud total del coche.
2. Estimar el desplazamiento del compartimento del pasajero si la parte frontal se deforma completamente: — Como la parte frontal colapsa completamente, el desplazamiento del resto del coche, incluyendo el maniquí sería un 25% de la longitud del coche.
3. Estimar la longitud del coche: — La longitud de un coche es de unos 4 m.
4. La longitud del desplazamiento es igual a la longitud de la parte frontal: — La longitud del desplazamiento es el 25% de la longitud del coche, es decir, aproximadamente $\boxed{1{,}0\text{ m}}$.

COMPROBACIÓN El maniquí estaba a 2 m de la pared en el momento del impacto. Nuestro resultado es la mitad de esa distancia, lo que resulta aceptable.

Ejemplo 8.7 Ensayo de un accidente — *Inténtelo usted mismo*

Para el coche del ejemplo 8.6, estimar la fuerza que el cinturón de seguridad ejerce sobre el maniquí durante el impacto.

PLANTEAMIENTO Para determinar la fuerza, calcularemos el impulso $\vec{I}$ y después lo dividiremos por el tiempo de colisión Δt.

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	Respuestas
1. Relacionar la fuerza media con el impulso y, en consecuencia, con el cambio de momento.	$\vec{I} = \vec{F}_m \Delta t = \Delta\vec{p}$
2. Dibujar una figura que muestre el maniquí antes y después del choque (figura 8.10).	
3. Determinar el cambio del momento del maniquí. Elegir el eje $+x$ para la dirección hacia adelante.	$\Delta\vec{p} = m\vec{v}_f - m\vec{v}_i = -2000\text{ N}\cdot\text{s}\,\hat{i}$
4. Relacionar el tiempo con el desplazamiento, suponiendo que la aceleración es constante.	$\Delta x = v_m \Delta t$
5. Obtener el desplazamiento del maniquí durante el accidente a partir del paso 4 del ejemplo 8.6.	$\Delta x = 1{,}0\text{ m}$
6. Determinar la velocidad media y usarla conjuntamente con los resultados de los pasos 4 y 5 para calcular el tiempo.	$\vec{v}_m \approx \frac{1}{2}(\vec{v}_f + \vec{v}_i) = 12{,}5\text{ m/s}\,\hat{i}$, por lo tanto $\Delta t = 0{,}080\text{ s} = 80\text{ ms}$
7. Sustituir los resultados de los pasos 3 y 6 en el resultado del paso 1 y determinar la fuerza.	$\vec{F}_m = \boxed{-25\text{ kN}\,\hat{i}}$

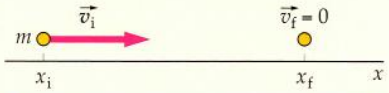


FIGURA 8.10

COMPROBACIÓN La fuerza media va en la dirección $+x$, que es opuesta a la dirección de avance del coche. Este resultado era de esperar porque la fuerza debe oponerse a la dirección del maniquí.

OBSERVACIÓN El módulo de la aceleración media es $a_m = \Delta v/\Delta t \approx 300\ \text{m/s}^2$, aproximadamente $32g$. Tal aceleración representa una fuerza neta de unas 32 veces el peso del maniquí, suficiente para provocar daños serios. Una bolsa de aire (airbag) incrementa la distancia de frenado, lo que ayuda a evitar daños. El airbag también permite que la fuerza se distribuya en un área mucho mayor. En la figura 8.11, el gráfico (*a*) muestra la fuerza media ejercida sobre el maniquí en función de la distancia de frenado x. Sin cinturón de seguridad ni airbag, el conductor "volaría" a través del parabrisas o sería detenido en una fracción de un metro por el salpicadero o el volante de dirección. El gráfico (*b*) muestra la fuerza en función de la velocidad inicial para tres distancias de frenado: 2 m, 1,5 m y 1 m.

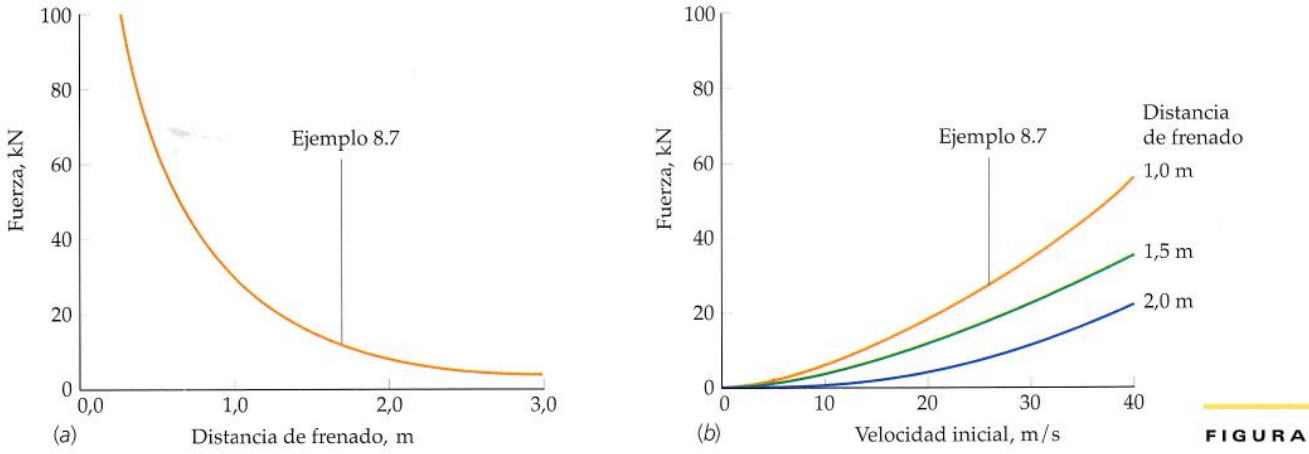


FIGURA 8.11

Ejemplo 8.8 Una pelota de golf

Una persona golpea una pelota con un palo de golf. Estimar (*a*) el impulso $\vec{I}$, (*b*) el tiempo de colisión Δt y (*c*) la fuerza media $\vec{F}_m$. Considerar que la masa de una pelota de golf típica es $m = 45$ g y su radio $r = 2$ cm. En un recorrido típico, el alcance R es de unos 190 m (figura 8.12). La pelota sale formando un ángulo $\theta_0 = 13°$ con la horizontal.

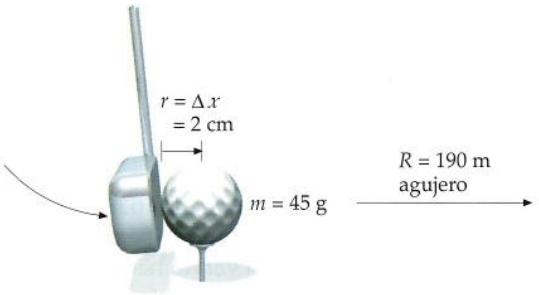


FIGURA 8.12

PLANTEAMIENTO Sea v_0 el módulo de la velocidad de la pelota cuando se separa del palo. El impulso es igual a la variación de su momento lineal, o sea, mv_0 durante la colisión. Estimaremos la velocidad inicial v_0 a partir del alcance. Estimaremos el tiempo de colisión a partir de la distancia recorrida durante el choque Δx y la velocidad media $\frac{1}{2}(v_{ix} + v_{fx})$ durante la colisión, suponiendo constante la aceleración. Consideramos $\Delta x = 2$ cm, que es el radio de la bola. La fuerza media se obtiene entonces a partir del impulso $\vec{I}$ y el tiempo de colisión Δt.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Igualar el impulso con la variación del momento de la bola:

$$I_x = F_{mx}\Delta t = \Delta p_x$$

2. Hacer un dibujo donde se muestre la bola antes y después del impacto con el palo (figura 8.13):

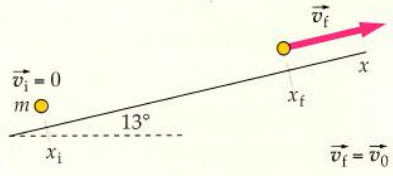


FIGURA 8.13

3. La velocidad v_f inmediatamente después de la colisión está relacionada con el alcance R mediante $R = (v_0^2/g)\operatorname{sen} 2\theta_0$ (ecuación 2.23) donde v_0 es la velocidad después de la colisión v_f:

$$R = \frac{v_f^2}{g}\operatorname{sen} 2\theta_0$$

4. Considerar que $\theta_0 = 13°$ y calcular la velocidad inicial:

$$v_0 = \sqrt{\frac{Rg}{\operatorname{sen} 2\theta_0}} = \sqrt{\frac{(190\ \text{m})(9{,}81\ \text{m/s}^2)}{\operatorname{sen} 26°}} = 65{,}2\ \text{m/s}$$

5. Utilizar este valor de v_0 para calcular el módulo del impulso:

$$I_x = \Delta p_x = m(v_{0x} - 0) = (0{,}045\ \text{kg})(65{,}2\ \text{m/s})$$
$$= 2{,}93\ \text{kg}\cdot\text{m/s} = \boxed{2{,}90\ \text{N}\cdot\text{s}}$$

(*b*) Calcular el tiempo de colisión Δt considerando $\Delta x = 2{,}0$ cm y $v_{mx} = \frac{1}{2}(v_{ix} + v_{fx})$:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_{mx}} = \frac{\Delta x}{\frac{1}{2}(0 + v_0)} = \frac{0{,}020\ \text{m}}{\frac{1}{2}(65{,}2\ \text{m/s})}$$
$$= 6{,}13 \times 10^{-4}\ \text{s} = \boxed{6{,}1 \times 10^{-4}\ \text{s}}$$

(*c*) Mediante los valores calculados de I_x y Δt determinar el módulo de la fuerza media:

$$F_m = F_{mx} = \frac{I_x}{\Delta t} = \frac{2{,}93\ \text{N}\cdot\text{s}}{6{,}13 \times 10^{-4}\ \text{s}} = 4{,}78\ \text{kN} = \boxed{4{,}8\ \text{kN}}$$

COMPROBACIÓN El peso de la bola es mg, que es 0,5 N, aproximadamente. Por tanto, hemos calculado que la fuerza del palo sobre la bola es mucho mayor que el peso de la bola, como era de esperar.

OBSERVACIÓN En este ejemplo, la fuerza de resistencia del aire no se ha tenido en cuenta. En un lanzamiento de golf real la resistencia del aire no es despreciable.

FIGURA 8.14 En las carreras de coches, a menudo los conductores chocan con el coche de delante para "mandarles un recado" —un ejemplo de colisión inelástica. *(Sam Sharpe/The Sharpe Image/Corbis.)*

COLISIONES EN UNA DIMENSIÓN

Las colisiones en las que los cuerpos que colisionan se mueven en línea recta antes, durante y después de la colisión, se denominan colisiones unidimensionales (figura 8.14).

Para movimientos sobre el eje x, v representa el módulo del vector velocidad y v_x representa el vector velocidad. Sin embargo, a partir de ahora, utilizaremos una nueva notación menos específica pero más concisa. Así, cada vez que aparezca v en este capítulo, el lector tendrá que determinar si se trata del vector velocidad o de su módulo, en función del contexto.

Consideremos un cuerpo de masa m_1 que se mueve con una velocidad inicial v_{1i} hacia un segundo cuerpo de masa m_2 que se mueve con una velocidad inicial v_{2i}. Si $v_{2i} < v_{1i}$, los cuerpos chocarán. Sean v_{1f} y v_{2f} las velocidades finales de los cuerpos después del choque. Los dos cuerpos forman un sistema aislado. El principio de conservación de la cantidad de movimiento nos da una relación entre las dos velocidades desconocidas, v_{1f} y v_{2f}:

$$m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} \qquad 8.14$$

Para calcular v_{1f} y v_{2f}, es necesaria una segunda ecuación. Esta segunda ecuación, que ahora desarrollaremos, depende del tipo de colisión.

> **!** El símbolo "v" puede representar, o bien el vector velocidad o bien su módulo.

Colisión perfectamente inelástica en una dimensión En las colisiones perfectamente inelásticas, las partículas tienen la misma velocidad después de la colisión, pues quedan unidas tras el impacto. Una colisión a baja velocidad entre dos vagones, uno parado y otro yendo hacia él, en la que los dos vagones quedan unidos (figura 8.15) es una colisión perfectamente inelástica. En una colisión perfectamente inelástica, las velocidades finales son iguales entre sí e iguales a la velocidad del centro de masas:

$$v_{1f} = v_{2f} = v_{cm}$$

Este resultado combinado con la ecuación 8.14 nos da

$$(m_1 + m_2)v_{cm} = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} \qquad 8.15$$

Con frecuencia es útil expresar la energía cinética K de una partícula en función de su momento lineal p. Para una masa m que se mueve con velocidad v, tenemos

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \frac{(mv)^2}{2m}$$

Como $p = mv$,

$$K = \frac{p^2}{2m} \qquad 8.16$$

FIGURA 8.15 La locomotora choca con el vagón para unirse; un ejemplo de colisión perfectamente inelástica. *(Gentileza de Dick Tinder.)*

Esta expresión puede aplicarse a un choque perfectamente inelástico cuando un objeto está inicialmente en reposo. El momento lineal del sistema es el del objeto incidente:

$$P_{\text{sist}} = p_{1\text{i}} = m_1 v_{1\text{i}}$$

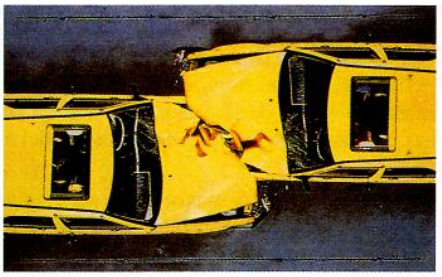
La energía cinética inicial es

$$K_{\text{i}} = \frac{P_{\text{sist}}^2}{2m_1} \qquad 8.17$$

Después del choque, los objetos se mueven unidos como una sola masa $m_1 + m_2$ con velocidad v_{cm}. El momento lineal se conserva, de modo que el momento lineal final es igual a P_{sist}. La energía cinética final es, por lo tanto,

$$K_{\text{f}} = \frac{P_{\text{sist}}^2}{2(m_1 + m_2)} \quad \text{(colisiones perfectamente inelásticas)} \qquad 8.18$$

Comparando las ecuaciones 8.17 y 8.18, vemos que la energía cinética final es menor que la inicial.



(Romilly Lockyer/ The Image Bank.)

Ejemplo 8.9 La captura de un libro durante un paseo espacial

Una astronauta de masa 60 kg da un paseo espacial para reparar un satélite de comunicaciones. De pronto necesita consultar el manual de reparaciones. Un compañero de equipo se lo lanza con una velocidad de 4 m/s relativa al vehículo espacial. Ella se encuentra en reposo relativo respecto al vehículo espacial justo antes de atrapar el libro, de masa 3,0 kg (figura 8.16). Determinar (*a*) la velocidad de la astronauta justo después de atrapar el libro, (*b*) la energía mecánica inicial y final del sistema libro-astronauta y (*c*) el impulso ejercido por el libro sobre la astronauta.

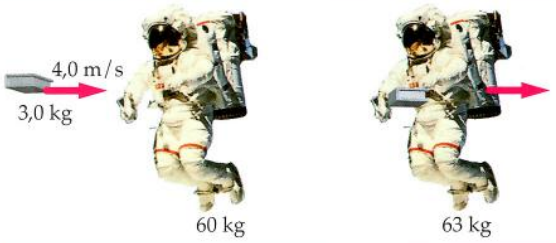


FIGURA 8.16

PLANTEAMIENTO Esta colisión es perfectamente inelástica. Así, después de atrapar el libro, éste y la astronauta se mueven con la misma velocidad. (*a*) Para calcular la velocidad, utilizamos la conservación del momento lineal, expresada por la ecuación 8.15. (*b*) Las energías mecánicas del libro y la astronauta se calculan directamente a partir de sus masas y velocidades. (*c*) El impulso ejercido por el libro sobre la astronauta es igual al cambio de momento lineal de la astronauta.

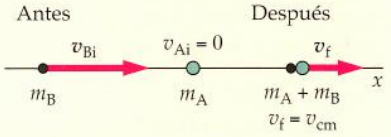


FIGURA 8.17

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Hacer un dibujo (figura 8.17) que muestre los objetos antes y después de la colisión. Sea $+x$ la dirección de lanzamiento:

2. Utilizar la conservación del momento lineal para relacionar la velocidad final del sistema, v_{f}, con las velocidades iniciales:

$$m_{\text{B}} v_{\text{Bi}} + m_{\text{A}} v_{\text{Ai}} = (m_{\text{A}} + m_{\text{B}}) v_{\text{f}}$$

3. Despejar v_{f}:

$$v_{\text{f}} = \frac{m_{\text{B}} v_{\text{B}} + m_{\text{A}} v_{\text{A}}}{m_{\text{B}} + m_{\text{A}}} = \frac{(3{,}0\ \text{kg})(4{,}0\ \text{m/s}) + (60\ \text{kg})(0\ \text{m/s})}{3{,}0\ \text{kg} + 60\ \text{kg}}$$

$$= 0{,}190\ \text{m/s} = \boxed{0{,}19\ \text{m/s}}$$

(*b*) 1. Como la astronauta está inicialmente en reposo, la energía mecánica inicial del sistema libro-astronauta es la energía cinética del libro:

$$K_{\text{sist i}} = K_{\text{Bi}} = \tfrac{1}{2} m_{\text{B}} v_{\text{Bi}}^2 = \tfrac{1}{2}(3{,}0\ \text{kg})(4{,}0\ \text{m/s})^2 = \boxed{24\ \text{J}}$$

2. La energía cinética final es la energía cinética del libro y la astronauta moviéndose conjuntamente a v_{f}:

$$K_{\text{sist f}} = \tfrac{1}{2}(m_{\text{B}} + m_{\text{A}}) v_{\text{f}}^2 = 2(63\ \text{kg})(0{,}190\ \text{m/s})^2 = 1{,}14\ \text{J} = \boxed{1{,}1\ \text{J}}$$

(*c*) Igualar el impulso ejercido sobre la astronauta con la variación de su momento lineal:

$$I_{\text{de B sobre A}} = \Delta p_{\text{A}} = m_{\text{A}} \Delta v_{\text{A}} = (60\ \text{kg})(0{,}190\ \text{m/s} - 0)$$

$$= 11{,}4\ \text{kg} \cdot \text{m/s} = \boxed{11\ \text{N} \cdot \text{s}}$$

COMPROBACIÓN La velocidad final, resultado del paso 3 apartado (*a*), es igual a la velocidad del centro de masas. Antes de la colisión, el sistema libro-astronauta tenía energía cinética asociada al movimiento del centro de masas y energía cinética relativa al centro de masas. Después de la colisión, la energía cinética relativa al centro de masas es cero. Como era de esperar, la energía cinética total del sistema ha decrecido.

OBSERVACIÓN La mayor parte de la energía cinética inicial de este proceso se pierde en forma de calor. El impulso ejercido por el libro sobre la astronauta es igual y opuesto al ejercido por la astronauta sobre el libro, de tal modo que la variación total del momento lineal del sistema libro-astronauta es cero.

Ejemplo 8.10 El péndulo balístico

En una prueba pública de puntería, una persona dispara una bala sobre un bloque de madera suspendido (figura 8.18), que es un dispositivo llamado péndulo balístico. El bloque, con el proyectil en su seno, oscila como un péndulo hacia arriba. A partir de la altura alcanzada por este péndulo, se informa inmediatamente al público de la velocidad de la bala. ¿A qué velocidad iba la bala?

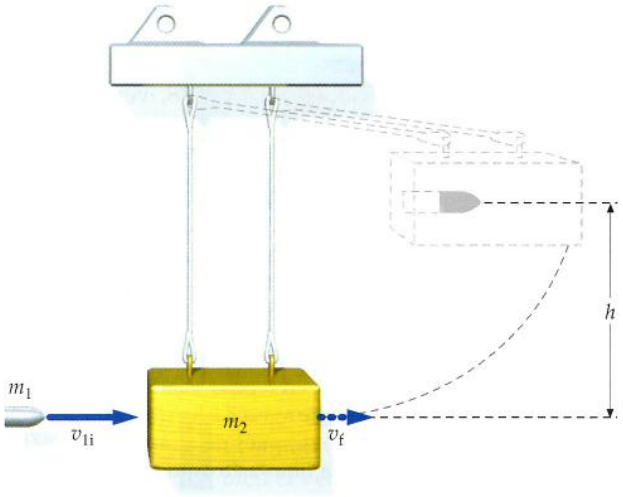


FIGURA 8.18

PLANTEAMIENTO Aunque el bloque se mueva hacia arriba tras la colisión, podemos considerar esta colisión como unidimensional, pues la dirección de la bala y del bloque justo después de la colisión está en la misma dirección que la velocidad inicial de la bala. La velocidad inicial de la bala v_{1i} está relacionada con la velocidad del sistema bala-bloque, v_f, justo después del choque inelástico, por la conservación del momento lineal. La velocidad v_f está relacionada con la altura h por la conservación de la energía mecánica. Sea m_1 la masa de la bala y m_2 la masa del blanco.

SOLUCIÓN

1. Utilizar la conservación de la energía mecánica *después* del choque para determinar v_f en función de la altura máxima h:
$$\tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 = (m_1 + m_2)gh$$
$$v_f = \sqrt{2gh}$$

2. Utilizar la conservación del momento lineal *durante* el choque para determinar v_{1i} en función de v_f:
$$m_1 v_{1i} = (m_1 + m_2)v_f$$
$$v_{1i} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} v_f$$

3. Despejar v_f de la ecuación del paso 1 y sustituirla en el resultado del paso 2 para determinar v_{1i}:
$$v_{1i} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} v_f = \boxed{\frac{m_1 + m_2}{m_1}\sqrt{2gh}}$$

COMPROBACIÓN La masa de la bala es mucho menor que la del bloque. Por tanto, es de esperar que la velocidad de la bala sea mucho mayor que la del bloque después de la colisión. El resultado del paso 2 confirma este razonamiento.

OBSERVACIÓN Hemos supuesto que el tiempo de colisión es tan corto que el desplazamiento del bloque durante el choque es despreciable. Esto quiere decir que el bloque adquiere velocidad inmediatamente después de la colisión, cuando aún está en el punto más bajo del arco.

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 8.1

¿Puede resolverse este ejemplo igualando la energía cinética inicial de la bala con la energía potencial del sistema compuesto bloque-bala, en su altura máxima? Es decir, ¿se conserva la energía mecánica tanto durante la colisión inelástica como durante el ascenso del péndulo?

Ejemplo 8.11 Colisión con una caja vacía

Inténtelo usted mismo

Repetir el ejemplo 8.10 utilizando una caja vacía como blanco. La bala choca contra el blanco y la atraviesa completamente. Un dispositivo láser indica que la bala emerge con una velocidad igual a la mitad del valor inicial. Con estos datos es posible deducir la altura alcanzada por el blanco. ¿Cuánto vale esta altura?

PLANTEAMIENTO La altura h está relacionada con la velocidad de la caja después del choque, v_2, por el principio de conservación de la energía mecánica (figura 8.19). Esta velocidad puede determinarse mediante el principio de conservación del momento lineal.

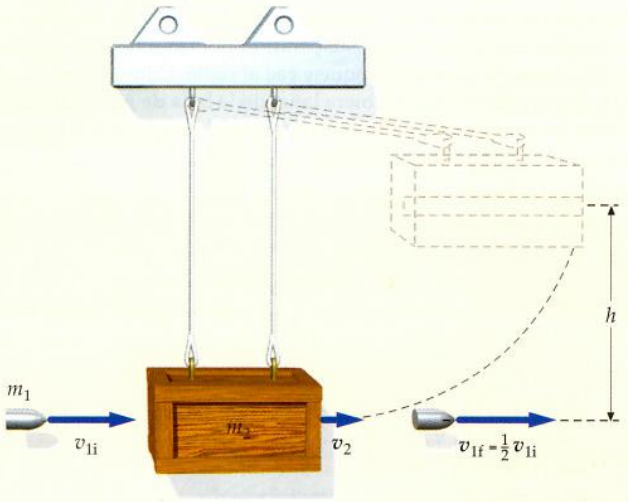


FIGURA 8.19

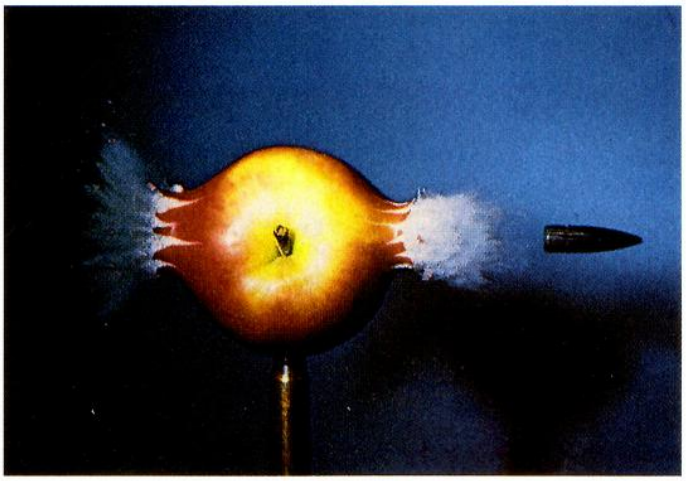
SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	Respuestas
1. Mediante la conservación de la energía mecánica relacionar la altura final h con la velocidad v_2 de la caja después de la colisión.	$m_2gh = \frac{1}{2}m_2v_2^2$
2. Mediante la conservación del momento expresar una ecuación que relacione v_{1i} con la velocidad post-colisión v_2.	$m_1v_{1i} = m_2v_2 + m_1(\frac{1}{2}v_{1i})$
3. Eliminar v_2 de las dos ecuaciones y despejar h.	$h = \boxed{\frac{m_1^2v_{1i}^2}{8m_2^2g}}$

COMPROBACIÓN El cociente v^2/g tiene unidades de m^2/s^2 dividido por m/s^2 que simplificando da m. Así, el resultado del paso 3 tiene las unidades apropiadas.

OBSERVACIÓN El choque entre la bala y la caja es un choque inelástico, pero no un choque perfectamente inelástico porque después de la colisión los dos objetos no van a la misma velocidad. Las colisiones inelásticas también ocurren en sistemas microscópicos. Por ejemplo, cuando un electrón choca contra un átomo, a veces éste se excita pasando a un estado energético interno más elevado. En consecuencia, la energía cinética total del átomo y el electrón es menor después de la colisión.



Una bala a 850 m/s choca inelásticamente con una manzana, la cual instantes más tarde se desintegra completamente. El tiempo de exposición es menor que una millonésima de segundo. *(Estate of Harold E. Edgerton/ Palm Press Inc.)*

Ejemplo 8.12 Colisiones con masilla — *Conceptual*

María tiene dos bolas de la misma masa, una bola de masilla y otra de goma. Lanza la bola de masilla contra un bloque suspendido por dos cuerdas como se muestra en la figura 8.20. La bola impacta contra el bloque y cae al suelo. Como consecuencia, el bloque asciende hasta una altura máxima h. Si hubiera lanzado la bola de goma con la misma velocidad, ¿el bloque habría ascendido a una altura mayor que h? La goma, a diferencia de la masilla, es elástica y hubiera rebotado contra el bloque.

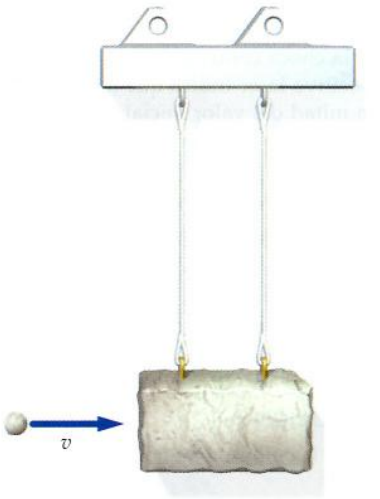


FIGURA 8.20

PLANTEAMIENTO Durante el impacto, el cambio de momento del sistema bola-bloque es cero. Cuanto mayor es el cambio de momento de la bola, mayor será el cambio de momento del bloque. ¿Aumenta más el cambio de momento de la bola si rebota en el bloque que si no lo hace?

SOLUCIÓN

La bola de masilla pierde una fracción importante de su momento inicial. La bola de goma perdería todo el momento inicial para ganar momento en la dirección opuesta. Por tanto, la bola de goma perdería mayor cantidad de momento que la bola de masilla.

> El bloque ascendería hasta una mayor altura después de ser impactado con la bola de goma que si hubiese sido impactado por la bola de masilla.

COMPROBACIÓN El bloque ejerce un impulso hacia atrás sobre la bola de masilla hasta hacerla parar. El mismo impulso hace detener la bola de goma, pero además el bloque ejerce un impulso adicional que la hacer retroceder. Así, el bloque ejerce un mayor impulso sobre la bola de goma que sobre la de masilla. Según la tercera ley de Newton, el impulso de la bola sobre el bloque es igual y opuesto al impulso del bloque sobre la bola. Entonces, la bola de goma ejerce un impulso mayor sobre el bloque confiriéndole un mayor cambio de momento.

Colisiones elásticas En las colisiones elásticas, la energía cinética del sistema es la misma antes y después de la colisión. En el mundo macroscópico, las colisiones elásticas son un ideal al cual la realidad puede aproximarse, pero nunca pueden llegar a darse. Si una pelota cae sobre una superficie de cemento y rebota hasta su altura inicial, la colisión entre la bola y el cemento es elástica. Pero esto no se ha observado nunca. A escala microscópica, las colisiones elásticas son más comunes. Por ejemplo, las colisiones entre las moléculas de aire a temperaturas habituales en la superficie terrestre son casi siempre elásticas.

En la figura 8.21 se muestran dos objetos antes y después de que tengan una colisión frontal unidimensional. Dado que el momento se conserva durante la colisión, entonces

$$m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} \qquad 8.19$$

La colisión es elástica y, por tanto, la energía cinética es la misma, antes y después de la colisión. Entonces,

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 \qquad 8.20$$

Estas dos ecuaciones son suficientes para determinar las velocidades finales de los dos objetos. Sin embargo, la naturaleza cuadrática de la ecuación 8.20 complica frecuentemente la solución de un problema de colisión elástica. Tales problemas pueden tratarse más fácilmente si expresamos la velocidad relativa de las dos partículas

FIGURA 8.21 Aproximación y retroceso de una colisión elástica en una dimensión.

después del choque en función de la velocidad relativa antes del choque. Reajustando la ecuación 8.20, se obtiene

$$m_2(v_{2f}^2 - v_{2i}^2) = m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2)$$

Como $(v_{2f}^2 - v_{2i}^2) = (v_{2f} - v_{2i})(v_{2f} + v_{2i})$ y $(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = (v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f})$, tenemos

$$m_2(v_{2f} - v_{2i})(v_{2f} + v_{2i}) = m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) \qquad 8.21$$

De la conservación del momento lineal, ecuación 8.19, podemos escribir

$$m_1v_{1f} + m_2v_{2f} = m_1v_{1i} + m_2v_{2i}$$

Reagrupando la ecuación para la conservación del momento (ecuación 8.19), se obtiene

$$m_2(v_{2f} - v_{2i}) = m_1(v_{1i} - v_{1f}) \qquad 8.22$$

Dividiendo ahora la ecuación 8.21 por la 8.22, resulta

$$v_{2f} + v_{2i} = v_{1i} + v_{1f}$$

de modo que

$$v_{1i} - v_{2i} = v_{2f} - v_{1f} \qquad 8.23$$

VELOCIDADES RELATIVAS EN UNA COLISIÓN ELÁSTICA

donde $v_{1i} - v_{2i}$ es la velocidad de aproximación de las dos partículas antes de la colisión y $v_{2f} - v_{1f}$ es la velocidad de separación después de la colisión (figura 8.22). La ecuación 8.23 establece que

> En las colisiones elásticas, el módulo de la velocidad de retroceso es igual a la velocidad de aproximación.

Normalmente, la resolución de problemas de choque elástico es más simple utilizando la ecuación 8.23 que las ecuaciones 8.19 y 8.20.

> **!** La ecuación 8.23 es válida únicamente si las energías cinéticas inicial y final son iguales, por lo que *sólo* es válida si las colisiones son elásticas.

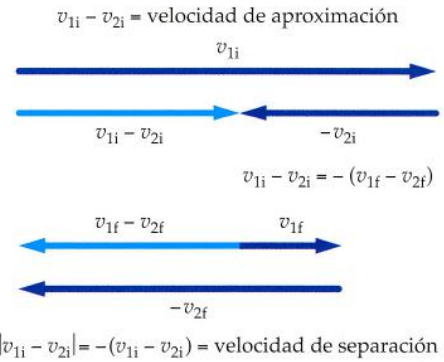


FIGURA 8.22

Ejemplo 8.13 Colisión elástica entre dos bloques

Un bloque de 4 kg que se mueve hacia la derecha con una velocidad de 6 m/s choca elásticamente con un bloque de 2 kg que también se mueve hacia la derecha, pero cuya velocidad es de 3 m/s (figura 8.23). Calcular las velocidades finales.

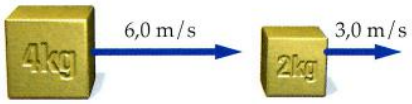


FIGURA 8.23

PLANTEAMIENTO La conservación del momento y la conservación de la energía (expresada como la inversa de las velocidades relativas), nos proporciona dos ecuaciones para las dos velocidades finales desconocidas. El subíndice 1 representa el bloque de 4 kg y el subíndice 2 el bloque de 2 kg.

SOLUCIÓN

1. Aplicar la conservación del momento y simplificar hasta encontrar una ecuación que relacione las dos velocidades finales:

$$m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f}$$
$$(4{,}0\text{ kg})(6{,}0\text{ m/s}) + (2{,}0\text{ kg})(3{,}0\text{ m/s}) = (4{,}0\text{ kg})v_{1f} + (2{,}0\text{ kg})v_{2f}$$
$$\text{por lo tanto,}\quad 2v_{1f} + v_{2f} = 15\text{ m/s}$$

2. Como se trata de una colisión elástica frontal, podemos aplicar la ecuación 8.23:

$$v_{2f} - v_{1f} = v_{1i} - v_{2i}$$
$$= 6{,}0\text{ m/s} - 3{,}0\text{ m/s} = 3{,}0\text{ m/s}$$

3. Restar el resultado del paso 2 del resultado del paso 1 y despejar v_{1f}:

$$2v_{1f} + v_{1f} = 12\text{ m/s} \quad \text{por lo tanto,} \quad v_{1f} = \boxed{4{,}0\text{ m/s}}$$

4. Sustituir en el resultado del paso 2 y despejar v_{2f}:

$$v_{2f} - 4{,}0\text{ m/s} = 3{,}0\text{ m/s} \quad \text{de donde} \quad v_{2f} = \boxed{7{,}0\text{ m/s}}$$

COMPROBACIÓN Como comprobación, calculemos las energías cinéticas inicial y final:

$$K_i = \tfrac{1}{2}(4{,}0\text{ kg})(6{,}0\text{ m/s})^2 + \tfrac{1}{2}(2{,}0\text{ kg})(3{,}0\text{ m/s})^2 = 72\text{ J} + 9{,}0\text{ J} = 81\text{ J}$$
$$K_f = \tfrac{1}{2}(4{,}0\text{ kg})(4{,}0\text{ m/s})^2 + \tfrac{1}{2}(2{,}0\text{ kg})(7{,}0\text{ m/s})^2 = 32\text{ J} + 49\text{ J} = 81\text{ J}$$

Las energías cinéticas pre y post colisión son iguales, como se esperaba.

Ejemplo 8.14 Colisión elástica entre un neutrón y un núcleo

Un neutrón de masa m_n y velocidad v_{ni} choca elásticamente con un núcleo de carbono de masa m_C en reposo (figura 8.24). (*a*) ¿Cuáles son las velocidades finales de ambas partículas? (*b*) ¿Qué fracción f de su energía cinética pierde el neutrón?

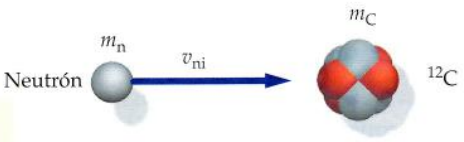


FIGURA 8.24

PLANTEAMIENTO La conservación del momento y conservación de la energía cinética nos permiten determinar las velocidades finales. Como la energía cinética inicial del núcleo de carbono es cero, su energía final es igual a la energía perdida por el neutrón.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. La conservación del momento nos ofrece una relación para las velocidades finales:

$$m_n v_{ni} = m_n v_{nf} + m_C v_{Cf}$$

2. Utilizamos la ecuación 8.23:

$$v_{Cf} - v_{nf} = v_{ni} - v_{Ci}$$
$$= v_{ni} - 0$$

por lo tanto, $v_{Cf} = v_{ni} + v_{nf}$

3. Para eliminar v_{Cf}, despejar esta magnitud en el paso 2 y sustituirla en el paso 1:

$$m_n v_{ni} = m_n v_{nf} + m_C(v_{ni} + v_{nf})$$

4. Despejar v_{nf}:

$$v_{nf} = \boxed{-\frac{m_C - m_n}{m_n + m_C} v_{ni}}$$

5. Sustituir el resultado del paso 4 en el resultado del paso 2 y despejar v_{Cf}:

$$v_{Cf} = v_{ni} - \frac{m_C - m_n}{m_n + m_C} v_{ni} = \boxed{\frac{2m_n}{m_n + m_C} v_{ni}}$$

(*b*) 1. La colisión es elástica, por lo que la energía cinética perdida por el neutrón es la energía cinética final del núcleo de carbono:

$$f = \frac{-\Delta K_n}{K_{ni}} = \frac{K_{Cf}}{K_{ni}} = \frac{\frac{1}{2} m_C v_{Cf}^2}{\frac{1}{2} m_n v_{ni}^2} = \frac{m_C}{m_n}\left(\frac{v_{Cf}}{v_{ni}}\right)^2$$

2. Calcular con los resultados del paso 5 del apartado (*a*) el cociente de las velocidades y sustituir en el resultado del paso 1 del apartado (*b*), determinando la pérdida fraccional de energía del neutrón:

$$f = \frac{m_C}{m_n}\left(\frac{2m_n}{m_n + m_C}\right)^2 = \boxed{\frac{4m_n m_C}{(m_n + m_C)^2}}$$

COMPROBACIÓN Obsérvese que el valor de v_{nf} es negativo. El neutrón m_n rebota tras colisionar con el núcleo de carbono de masa m_C. Este resultado es razonable cuando una partícula ligera colisiona con una partícula con gran masa inicialmente en reposo.

OBSERVACIÓN La pérdida de energía fraccional para colisiones frontales depende del cociente de las masas (ver figura 8.25).

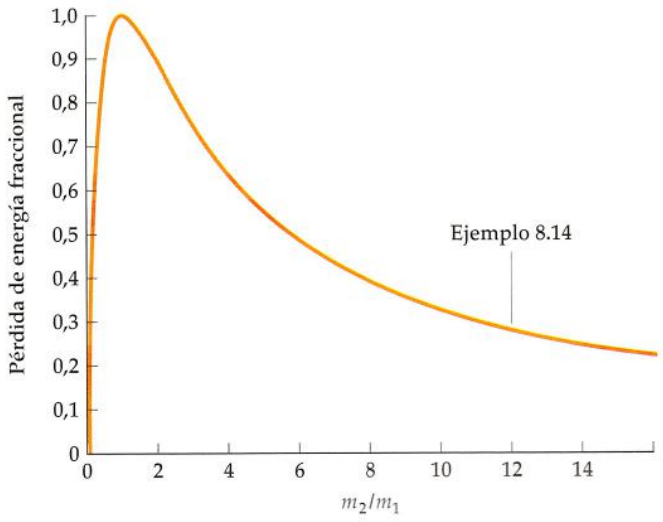


FIGURA 8.25 Pérdida de energía fraccional en función de la relación de las dos masas. La pérdida máxima de energía tiene lugar cuando $m_1 = m_2$.

PROBLEMA PRÁCTICO 8.5 Considerar una colisión frontal entre dos objetos que se mueven con masas iguales. Utilizar las ecuaciones 8.19 y 8.23 para demostrar que los dos objetos se intercambian las velocidades. Es decir, la velocidad final del objeto 1 es la velocidad inicial del objeto 2 y viceversa.

La velocidad final de la partícula incidente v_{1f} y la de la partícula estacionaria v_{2f} están relacionadas con la velocidad inicial de la partícula incidente por

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \qquad 8.24a$$

y

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} \qquad 8.24b$$

Esas ecuaciones fueron deducidas en el ejemplo 8.14. Aquí demostramos que dan resultados razonables para valores extremos de las masas. Cuando un objeto muy macizo (por ejemplo, la bola de una bolera) choca con un objeto ligero en reposo (por ejemplo, una pelota de ping-pong), el objeto macizo no se ve afectado esencialmente por el choque. Antes de la colisión, la velocidad relativa de aproximación es v_{1i}. Si el objeto macizo continúa esencialmente con la misma velocidad v_{1i} después del choque, la velocidad del objeto pequeño debe ser $2\,v_{1i}$ para que la velocidad de retroceso sea igual a la velocidad de aproximación. Este resultado se obtiene también de las ecuaciones 8.24*a* y 8.24*b* si tenemos en cuenta que m_2 es mucho menor que m_1, en cuyo caso $v_{1f} \approx v_{1i}$ y $v_{2f} \approx 2\,v_{1i}$, como era de esperar.

Coeficiente de restitución En general, un choque es una situación intermedia entre los casos extremos de choque elástico, en el que las velocidades relativas se invierten, y choque perfectamente inelástico, en el que no existe velocidad relativa después del choque. El **coeficiente de restitución** e, que es la medida de la elasticidad de una colisión, se define como el cociente entre la velocidad relativa de retroceso y la velocidad relativa de aproximación:

$$e = \frac{v_{ret}}{v_{ap}} = \frac{v_{1f} - v_{2f}}{v_{2i} - v_{1i}} \qquad 8.25$$

DEFINICIÓN: COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN

En una colisión elástica, $e = 1$; en una colisión perfectamente inelástica, $e = 0$.

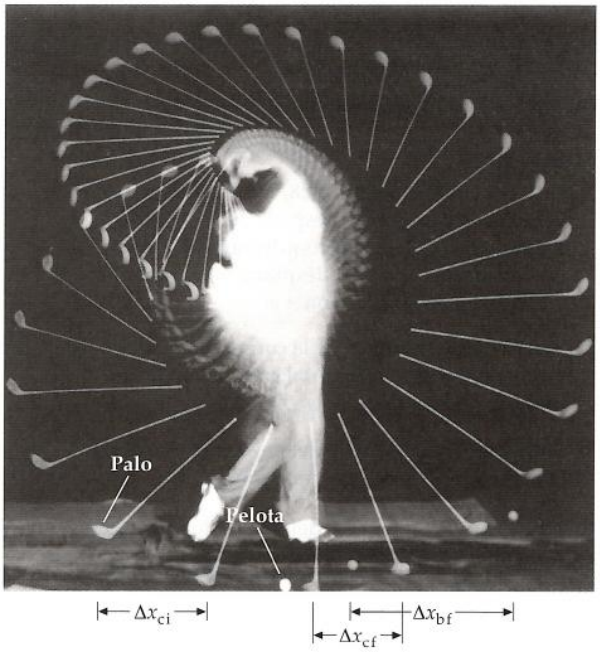


FIGURA 8.26
(Estate of Harold E. Edgerton/Palm Press Inc.)

PROBLEMA PRÁCTICO 8.6
A partir de la figura 8.26 del palo de golf impactando contra la pelota, estimar el coeficiente de restitución de la interacción pelota-palo de golf.

COLISIONES EN DOS Y TRES DIMENSIONES

En colisiones unidimensionales, las direcciones de los vectores velocidad inicial y final se especifican simplemente mediante un + o un −. Ese no es el caso de las colisiones bi y tridimensionales. En este tipo de colisiones, el momento se conserva en cada una de las direcciones x, y y z.

Colisiones inelásticas En las colisiones de dos o tres dimensiones, el momento inicial total se obtiene sumando los vectores momento inicial de cada objeto implicado en la colisión. Como tras la colisión perfectamente inelástica los objetos tienen la misma velocidad final y el momento se conserva, tenemos $m_{1i}\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = (m_1 + m_2)\vec{v}_f$. Por esta relación sabemos que los tres vectores velocidad, y la colisión, están en el mismo plano. También, a partir de la definición de centro de masas sabemos que $\vec{v}_f = \vec{v}_{cm}$.

Ejemplo 8.15 Colisión entre un coche y un camión

Un coche pequeño de 1200 kg circula hacia el este cuando choca en una intersección con un camión de 3000 kg que circula en dirección norte a 40 km/h, como indica la figura 8.27. El coche y el camión se acoplan como un solo cuerpo a consecuencia del choque. El conductor del camión esgrime que el conductor del coche es el culpable de la colisión, ya que iba a una velocidad superior a la permitida. El conductor del coche busca evidencias para desmontar el argumento del camionero. En primer lugar, no hay marcas de frenado, indicando que ninguno de los dos conductores se apercibió de la posibilidad de la colisión y frenó. En segundo lugar, hay una señal que limita la velocidad a 80 km/h. En tercer lugar, el velocímetro del camión después del choque se atrancó y la aguja marcaba 50 km/h. Y en cuarto lugar, los restos del choque se desparramaron en la dirección nordeste con un ángulo superior a 59°. ¿Estas evidencias, dan soporte al argumento de que el conductor del coche no iba a una velocidad superior a la permitida en el momento del choque?

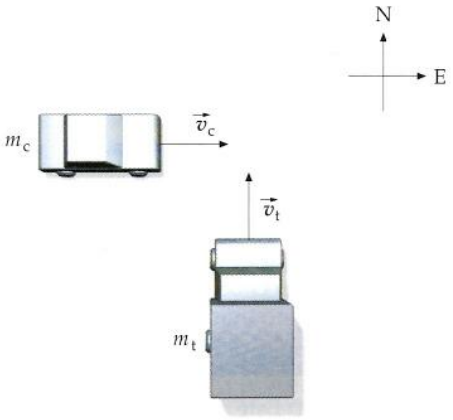


FIGURA 8.27

PLANTEAMIENTO Conocemos las masas de los vehículos y la velocidad del camión en el momento del impacto. Sabemos que la colisión es perfectamente inelástica, por lo que utilizaremos sólo la conservación del momento para determinar la velocidad inicial del coche.

SOLUCIÓN

1. Hacer un dibujo (figura 8.28) mostrando los dos vehículos justo antes y después de la colisión. Elegimos un sistema de coordenadas tal que inicialmente el coche se desplaza en la dirección $+x$ y el camión en la dirección $+y$:

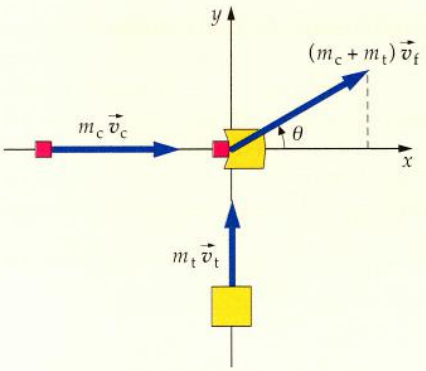


FIGURA 8.28

2. Escribir las ecuaciones de la conservación del momento en forma vectorial en función de las masas y de las velocidades:
$$m_c\vec{v}_c + m_t\vec{v}_t = (m_c + m_t)\vec{v}_f$$

3. Igualar la componente x del momento inicial con la componente x del momento final:
$$m_c v_c + 0 = (m_c + m_t)v_f \cos\theta$$

4. Igualar la componente y del momento inicial con la componente y del momento final:
$$0 + m_t v_t = (m_c + m_t)v_f \operatorname{sen}\theta$$

5. Eliminar v_f dividiendo la ecuación para la componente y por la ecuación para la componente x, obtenidas en los pasos anteriores:
$$\frac{m_t v_t}{m_c v_c} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \operatorname{tg}\theta$$
$$\text{por lo tanto, } v_c = \frac{m_t v_t}{m_c \operatorname{tg}\theta} = \frac{(3000\text{ kg})(50\text{ km/h})}{(1200\text{ kg})\operatorname{tg}59°} = \boxed{75\text{ km/h}}$$

6. ¿Se sustentan los argumentos del conductor del camión referentes a la velocidad del coche?
La velocidad de 75 km/h es inferior a los 80 km/h permitidos, por lo tanto después de aplicar argumentos de física vemos como el conductor del camión no esgrimía un argumento correcto.

COMPROBACIÓN La masa del camión es 2,5 veces la masa del coche. Si el coche fuese a 80 km/h, la velocidad del camión sería 5/8 de la del coche y el cociente entre los módulos de los momentos del camión y del coche sería $2{,}5 \times 5/8 = 1{,}56$. Como arctg 1,56 = 57°, que es ligeramente inferior a 59°; el resultado del paso 6 parece ser correcto.

Consideremos ahora una colisión inelástica en tres dimensiones en la cual los objetos no comparten la misma velocidad.

Ejemplo 8.16 Una colisión no frontal

Un objeto de masa m_1 y velocidad inicial 20 m/s colisiona de refilón con un segundo objeto de masa m_2 que se encuentra inicialmente en reposo. Después de la colisión, el primer objeto se mueve a 15 m/s con un ángulo de 25° respecto a la dirección inicial. ¿En qué dirección se moverá el segundo objeto?

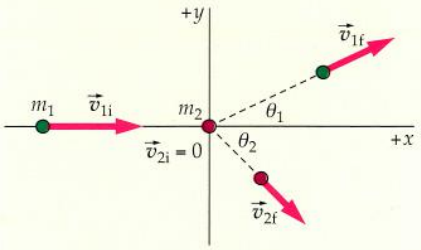


FIGURA 8.29

PLANTEAMIENTO El momento se conserva durante la colisión. Como se trata de una colisión bidimensional, igualamos la suma vectorial de momentos iniciales y finales en cada dirección. (El problema no indica si se trata de una colisión elástica, por lo que supondremos que no lo es.)

SOLUCIÓN

1. Dibujar las dos partículas antes y después de la colisión (figura 8.29). Elegimos la dirección $+x$ como la dirección de la velocidad inicial del objeto 1. Incluimos vectores velocidad y sus respectivos nombres:

2. Escribimos las relaciones para la conservación del momento, en forma vectorial y en forma de componentes:

$$m_1\vec{v}_{1i} + 0 = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f}$$
$$\text{o} \quad m_1v_{1ix} = m_1v_{1fx} + m_2v_{2fx}$$
$$m_1v_{1iy} = m_1v_{1fy} + m_2v_{2fy}$$

3. Expresamos las ecuaciones de las componentes de los momentos en función de los módulos de las velocidades y los ángulos:

$$m_1v_{1i} = m_1v_{1f}\cos\theta_1 + m_2v_{2f}\cos\theta_2$$
$$0 = m_1v_{1f}\operatorname{sen}\theta_1 + m_2v_{2f}\operatorname{sen}\theta_2$$

4. Para despejar θ_2 utilizamos $\operatorname{tg}\theta = \operatorname{sen}\theta/\cos\theta$. Primero despejamos $\operatorname{sen}\theta_2/\cos\theta_2$ de los resultados del paso 3:

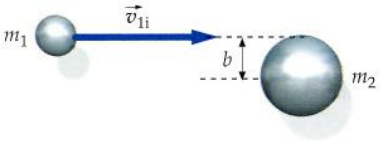
$$m_2v_{2f}\operatorname{sen}\theta_2 = -m_1v_{1f}\operatorname{sen}\theta_1$$
$$m_2v_{2f}\cos\theta_2 = m_1v_{1i} - m_1v_{1f}\cos\theta_1$$
$$\text{por lo tanto,} \quad \frac{m_2v_{2f}\operatorname{sen}\theta_2}{m_2v_{2f}\cos\theta_2} = \frac{-m_1v_{1f}\operatorname{sen}\theta_1}{m_iv_{1i} - m_1v_{1f}\cos\theta_1}$$
$$\text{y} \quad \operatorname{tg}\theta_2 = \frac{-\operatorname{sen}\theta_1}{\dfrac{v_{1i}}{v_{1f}} - \cos\theta_1}$$

5. Sustituimos los valores numéricos y despejamos θ_2:

$$\operatorname{tg}\theta_2 = \frac{-\operatorname{sen}25°}{\dfrac{20}{15} - \cos25°} = -0{,}990$$
$$\therefore \theta_2 = \boxed{-45°}$$

COMPROBACIÓN En el paso 1 tomamos un eje de coordenadas en que $\theta_1 = +25°$. Es de esperar que θ_2 esté entre 0 y 90°. Nuestro resultado $\theta_2 = -45°$ lo confirma.

OBSERVACIÓN El problema no daba ni m_2 ni v_{2f}, por lo que puede resultar sorprendente que sea posible obtener θ_2. Esto ha sido posible gracias a que los dos vectores momentos iniciales y uno de los finales estaban completamente especificados en el enunciado, de forma que la conservación del momento (paso 2) especifica completamente el otro vector momento final. Una vez que conocemos los cuatro momentos puede calcularse la dirección pedida.



Colisiones elásticas Los choques elásticos en dos y tres dimensiones son más complejos que los estudiados previamente. La figura 8.30 muestra una colisión no frontal entre un objeto de masa m_1 que se mueve con velocidad $\vec{v}_{1i}$ paralelamente al eje x hacia un objeto de masa m_2 que se encuentra inicialmente en reposo en el origen. Este tipo de colisiones se denominan colisiones no frontales (en contraposición a las colisiones frontales). La distancia b entre los centros medida perpendicularmente a la dirección de $\vec{v}_{1i}$ se denomina *parámetro de impacto*. Después del choque, el objeto 1 se aleja con velocidad $\vec{v}_{1f}$, formando un ángulo θ_1 con la velocidad inicial, y el objeto 2 se mueve con velocidad $\vec{v}_{2f}$, formando un ángulo θ_2 con $\vec{v}_{1i}$. Las velocidades finales dependen del parámetro de impacto y del tipo de fuerza que ejerce un objeto sobre el otro.

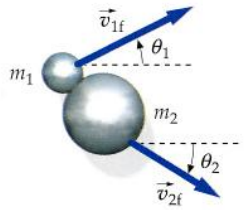


FIGURA 8.30 Choque no frontal. Las velocidades finales dependen del parámetro de impacto b y del tipo de fuerza ejercida por un objeto sobre otro.

La conservación del momento lineal nos da

$$\vec{P}_{\text{sist}} = m_1\vec{v}_{1\text{i}} = m_1\vec{v}_{1\text{f}} + m_2\vec{v}_{2\text{f}} \qquad 8.26$$

En esta ecuación vemos que el vector $\vec{v}_{2\text{f}}$ debe encontrarse en el plano formado por $\vec{v}_{1\text{i}}$ y $\vec{v}_{1\text{f}}$, que a partir de ahora denominaremos plano xy. Suponiendo conocida la velocidad inicial $\vec{v}_{1\text{i}}$, todavía quedan cuatro incógnitas: las componentes x e y de cada velocidad final; o alternativamente, los módulos de las dos velocidades finales y los dos ángulos de desviación. Podemos aplicar la ley de conservación del momento en forma de componentes para obtener dos de las ecuaciones que necesitamos entre esas cantidades:

$$m_1v_{1\text{i}} = m_1v_{1\text{f}}\cos\theta_1 + m_2v_{2\text{f}}\cos\theta_2 \qquad 8.27$$

$$0 = m_1v_{1\text{f}}\operatorname{sen}\theta_1 - m_2v_{2\text{f}}\operatorname{sen}\theta_2 \qquad 8.28$$

Como la colisión es elástica, podemos utilizar la conservación de la energía cinética para encontrar la tercera ecuación:

$$\tfrac{1}{2}m_1v_{1\text{i}}^2 = \tfrac{1}{2}m_1v_{1\text{f}}^2 + m_2v_{2\text{f}}^2 \qquad 8.29$$

Para obtener el valor de las cuatro incógnitas, es necesario una cuarta relación. Esta cuarta relación depende del parámetro de impacto b y del tipo de fuerza de interacción ejercida por los cuerpos entre sí. En la práctica, la cuarta relación se obtiene normalmente midiendo el ángulo de desviación o el ángulo de retroceso. Esta medida puede proporcionarnos información respecto a la fuerza de interacción de los cuerpos.

Considérese el caso especial e interesante de un choque elástico no frontal entre dos objetos de igual masa cuando uno de ellos se encuentra inicialmente en reposo (figura 8.31*a*). Si $\vec{v}_{1\text{i}}$ y $\vec{v}_{1\text{f}}$ son las velocidades inicial y final del objeto 1, respectivamente, y $\vec{v}_{2\text{f}}$ es la velocidad final del objeto 2, la conservación de la cantidad de movimiento nos dice

$$m\vec{v}_{1\text{i}} = m\vec{v}_{1\text{f}} + m\vec{v}_{2\text{f}}$$

o

$$\vec{v}_{1\text{i}} = \vec{v}_{1\text{f}} + \vec{v}_{2\text{f}}$$

Los vectores velocidad final se suman formando el triángulo que se indica en la figura 8.31*b*. La conservación de la energía correspondiente a este choque es

$$\tfrac{1}{2}mv_{1\text{i}}^2 = \tfrac{1}{2}mv_{1\text{f}}^2 + \tfrac{1}{2}mv_{2\text{f}}^2$$

o

$$v_{1\text{i}}^2 = v_{1\text{f}}^2 + v_{2\text{f}}^2 \qquad 8.30$$

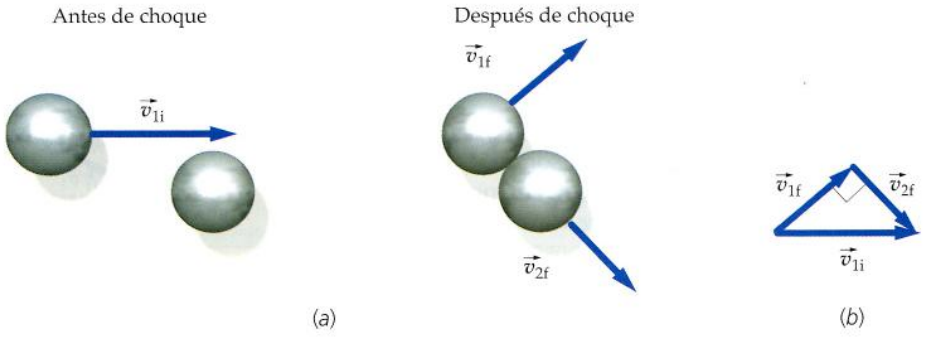
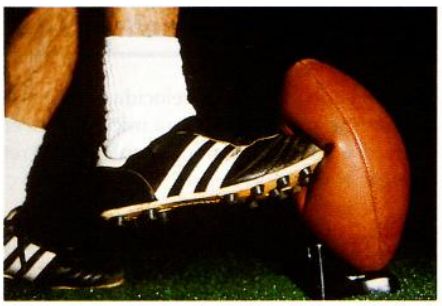


FIGURA 8.31 (*a*) Choque elástico no frontal entre dos esferas de igual masa cuando una de las esferas se encuentra inicialmente en reposo. Después del choque, las esferas se mueven formando entre sí un ángulo recto. (*b*) Los vectores velocidad correspondientes a este choque forman un triángulo rectángulo.



(Joe Strunk/Visuals Unlimited.)

! La relación $v_{1\text{i}} - v_{2\text{i}} = v_{2\text{f}} - v_{1\text{f}}$ (ecuación 8.23) es muy útil para resolver problemas de colisiones elásticas unidimensionales. No se puede utilizar esta ecuación, ni ninguna forma vectorial de la misma, para colisiones en dos o tres dimensiones.

Fotografías con destellos múltiples de un choque elástico no frontal de dos bolas de masas iguales. La bola con un punto incide desde la izquierda y choca contra la bola con rayas que está inicialmente en reposo. Las velocidades finales de las dos bolas son perpendiculares entre sí. *(Berenice Abbot/Photo Researchers.)*

La ecuación 8.30 es el teorema de Pitágoras para un triángulo rectángulo formado por los vectores $\vec{v}_{1f}$, $\vec{v}_{2f}$, y $\vec{v}_{1i}$, siendo $\vec{v}_{1i}$ la hipotenusa del triángulo. Por lo tanto, los vectores velocidad final son perpendiculares entre sí, como indica la figura 8.31*b*.

PROBLEMA PRÁCTICO 8.7

En una partida amistosa de billar, la bola 1 con velocidad v_0 colisiona de forma no frontal con la bola 2 que está inicialmente quieta. La colisión es elástica y la bola 1 sale formando un ángulo de 30° respecto a la dirección inicial. ¿Cuál es la velocidad de la bola 2? (Ambas bolas tienen la misma masa.)

* 8.4 COLISIONES EN EL SISTEMA DE REFERENCIA DEL CENTRO DE MASAS

Como hemos visto, la velocidad del centro de masas permanece invariable cuando la fuerza resultante externa que actúa sobre el sistema es nula, en cualquier sistema de referencia inercial. A veces es conveniente hacer los cálculos en un sistema de referencia alternativo que se mueve con el centro de masas. Entonces, con respecto al sistema de coordenadas original, llamado sistema de referencia de laboratorio, este sistema de coordenadas se mueve con una velocidad constante $\vec{v}_{cm}$ relativa al sistema de referencia de laboratorio. Un sistema de referencia que se mueve a la misma velocidad que el centro de masas recibe el nombre de **sistema de referencia del centro de masas**. Si una partícula tiene la velocidad $\vec{v}$ en el sistema de referencia original, su velocidad relativa al centro de masas es $\vec{u} = \vec{v} - \vec{v}_{cm}$. Como el momento total del sistema es igual a la masa total por la velocidad del centro de masas, el momento total también es cero en el sistema de referencia del centro de masas. Por ello, se llama también **sistema de referencia del momento lineal cero**.

El análisis matemático de las colisiones se simplifica enormemente cuando se consideran en el sistema de referencia del centro de masas. Las velocidades de las partículas en el sistema de referencia del centro de masas son $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$. Los momentos lineales, $m_1\vec{u}_1$ y $m_2\vec{u}_2$, de los dos objetos incidentes son iguales y opuestos.

$$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = 0$$

Después de una colisión perfectamente inelástica, los objetos permanecen en reposo. Toda la energía original se pierde en forma de energía térmica. Una colisión perfectamente elástica en una dimensión invierte la velocidad de cada objeto, pero no cambia su módulo. Es decir,

$$\vec{u}_{1i} = -\vec{u}_{1f} \quad \text{y} \quad \vec{u}_{2i} = -\vec{u}_{2f} \quad \text{(colisión unidimensional)}$$

Consideremos, por ejemplo, un sistema simple de dos partículas en un sistema de referencia, en el cual una partícula de masa m_1 se mueve con una velocidad $\vec{v}_1$ y una segunda partícula de masa m_2 se mueve con una velocidad $\vec{v}_2$ (figura 8.32). En este sistema, la velocidad del centro de masas es

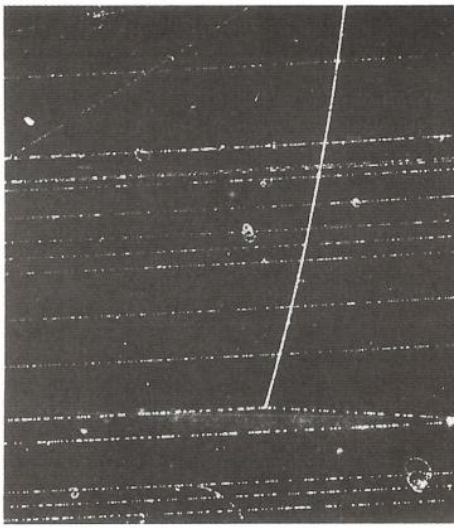
$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Para transformar las velocidades de las dos partículas a sus velocidades en el sistema de referencia del centro de masas, basta restar $\vec{v}_{cm}$. Las velocidades de las partículas en el sistema centro de masas son $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$, dadas por

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_{cm} \qquad 8.31a$$

y

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_{cm} \qquad 8.31b$$



Choque protón-protón en una cámara de burbujas con hidrógeno líquido. El protón incidente entra por la izquierda e interacciona con otro protón estacionario en la cámara. Las dos partículas se mueven formando un ángulo recto después del choque. La ligera curvatura de las trazas se debe a un campo magnético. *(Brookhaven National Laboratory.)*

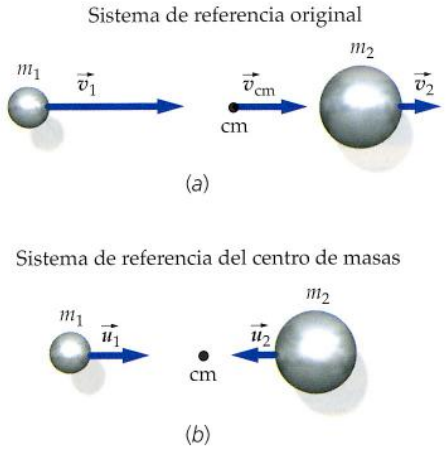


FIGURA 8.32 (*a*) Dos partículas se mueven en un sistema de referencia en el cual el centro de masas tiene una velocidad $\vec{v}_{cm}$. (*b*) Las dos partículas del apartado anterior vistas desde un sistema de referencia para el cual el centro de masas está en reposo.

Ejemplo 8.17 Colisión elástica de dos bloques

Determinar las velocidades finales de los bloques de la colisión elástica del ejemplo 8.13 (en donde un bloque de 4 kg que se mueve hacia la derecha a 6 m/s choca elásticamente con un bloque de 2 kg que se mueve también hacia la derecha a 3 m/s) transformando previamente sus velocidades al sistema de referencia del centro de masas.

PLANTEAMIENTO Para pasar al sistema de referencia del centro de masas, determinamos en primer lugar v_{cm} y lo restamos de cada velocidad. Resolvemos a continuación el choque invirtiendo las velocidades y transformando de nuevo al sistema original.

SOLUCIÓN

1. Calcular la velocidad del centro de masas, v_{cm} (figura 8.33):

$$v_{cm} = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} = \frac{(4{,}0\ \text{kg})(6{,}0\ \text{m/s}) + (2{,}0\ \text{kg})(3{,}0\ \text{m/s})}{4{,}0\ \text{kg} + 2{,}0\ \text{kg}} = 5{,}0\ \text{m/s}$$

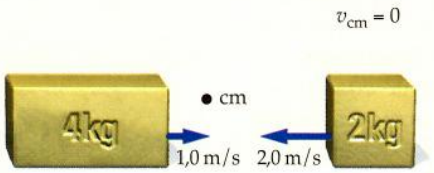
FIGURA 8.33

2. Transformar las velocidades iniciales al sistema de referencia del centro de masas, restando v_{cm} de las velocidades iniciales (figura 8.34):

$$u_{1i} = v_{1i} - v_{cm} = 6{,}0\ \text{m/s} - 5{,}0\ \text{m/s} = 1{,}0\ \text{m/s}$$

$$u_{2i} = v_{2i} - v_{cm} = 3{,}0\ \text{m/s} - 5{,}0\ \text{m/s} = -2{,}0\ \text{m/s}$$

FIGURA 8.34

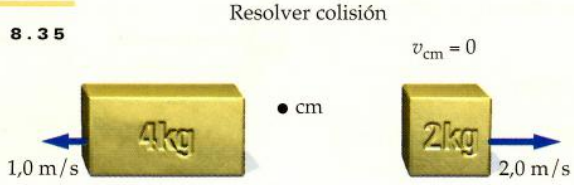


3. Resolver la colisión en el sistema de referencia del centro de masas invirtiendo la velocidad de cada objeto (figura 8.35):

$$u_{1f} = -u_{1i} = -1{,}0\ \text{m/s}$$

$$u_{2f} = -u_{2i} = +2{,}0\ \text{m/s}$$

FIGURA 8.35

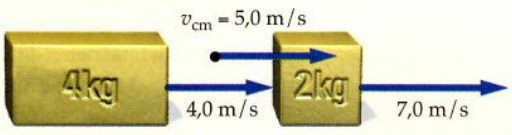


4. Para determinar las velocidades finales en el sistema original, sumar v_{cm} a cada velocidad final (figura 8.36):

$$v_{1f} = u_{1f} + v_{cm} = -1{,}0\ \text{m/s} + 5{,}0\ \text{m/s} = \boxed{4{,}0\ \text{m/s}}$$

$$v_{2f} = u_{2f} + v_{cm} = 2{,}0\ \text{m/s} + 5{,}0\ \text{m/s} = \boxed{7{,}0\ \text{m/s}}$$

FIGURA 8.36



COMPROBACIÓN Este resultado coincide con el obtenido en el ejemplo 8.13.

PROBLEMA PRÁCTICO 8.8 Verificar que el momento lineal total antes y después de la colisión es cero en el sistema de referencia del centro de masas.

8.5 SISTEMAS DE MASA VARIABLE: LA PROPULSIÓN DE LOS COHETES

Un aspecto muy importante y creativo en la resolución de problemas de física consiste en escoger adecuadamente el sistema. En esta sección, exploramos situaciones en que el sistema que consideramos cambia su masa continuamente. Un ejemplo de uno de estos sistemas es un cohete. En este caso se elige el sistema formado por el cohete más el combustible que aún está por usar. Cuando el combustible se utiliza, los gases se expelen fuera de la nave y la masa del sistema disminuye. Otro ejemplo es la arena que cae sobre la base de un reloj de arena (figura 8.37). Elegimos el sistema formado por la arena que en cada momento está sobre la base. La masa del sistema crece conforme la arena de la base continúa acumulándose.

FIGURA 8.37
(Brand-X Planteamientos/PunchStock.)

Sobre Io, una de las lunas de Júpiter, hay un gran volcán. Cuando el volcán se pone en erupción, la velocidad con que fluye el material ha de ser superior a la velocidad de escape de Io. Por consiguiente, un chorro de material se proyecta al espacio. El material colisiona con un asteroide que atraviesa el chorro y queda fijado a él. Consideremos el efecto del impacto de este material sobre el movimiento del asteroide. Para ello necesitamos una ecuación, que es la segunda ley de Newton para sistemas con masa variable.

Supongamos que un flujo de materia continuo que se mueve a velocidad $\vec{u}$ choca con un objeto de masa M que se mueve con velocidad $\vec{v}$ (figura 8.38). La masa de las partículas que chocan con el objeto y se enganchan a él durante el tiempo Δt aumentando su masa es ΔM. Durante este tiempo Δt, la velocidad $\vec{v}$ cambia $\Delta\vec{v}$. Aplicando el teorema impulso-momento a este sistema, se obtiene,

$$\vec{F}_{\text{neta ext}}\,\Delta t = \Delta\vec{P} = \vec{P}_f - \vec{P}_i = [(M + \Delta M)(\vec{v} + \Delta\vec{v})] - [M\vec{v} + \Delta M\vec{u}]$$

donde el primer término (en corchetes) es el momento en el tiempo $t + \Delta t$ y el segundo término en corchetes es el momento en el tiempo t. La reorganización de los términos de la ecuación anterior conduce a

$$\vec{F}_{\text{neta ext}}\,\Delta t = M\,\Delta\vec{v} + \Delta M\,(\vec{v} - \vec{u}) + \Delta M\,\Delta\vec{v} \qquad 8.32$$

Dividiendo la ecuación 8.32 por Δt, se llega a

$$\vec{F}_{\text{neta ext}} = M\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} + \frac{\Delta M}{\Delta t}(\vec{v} - \vec{u}) + \frac{\Delta M}{\Delta t}\Delta\vec{v}$$

y si se toma el límite cuando $\Delta t \to 0$ (que a su vez significa tanto $\Delta M \to 0$ como $\Delta\vec{v} \to 0$), se obtiene

$$\vec{F}_{\text{neta ext}} = M\frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{dM}{dt}(\vec{v} - \vec{u}) + \frac{dM}{dt}(0)$$

expresión que reordenando de nuevo, queda

$$\vec{F}_{\text{neta ext}} + \frac{dM}{dt}\vec{v}_{\text{rel}} = M\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad 8.33$$

SEGUNDA LEY DE NEWTON EN SISTEMAS DE MASA VARIABLE

donde $\vec{v}_{\text{rel}} = \vec{u} - \vec{v}$ es la velocidad del material que impacta relativa al objeto sobre el que impacta. Obsérvese que, excepto para el término $(dM/dt)\vec{v}_{\text{rel}}$, la ecuación 8.33 es precisamente la segunda ley de Newton para un sistema de masa constante.

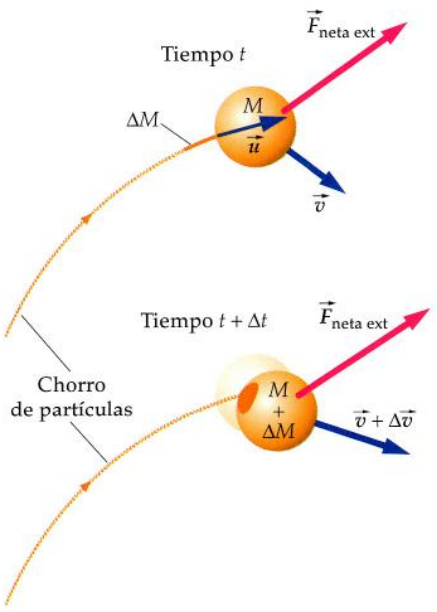


FIGURA 8.38 Un objeto de masa M que se mueve a velocidad $\vec{v}$ experimenta colisiones perfectamente ineslásticas con las partículas de un chorro continuo que se mueven a velocidad $\vec{u}$. Además, hay una fuerza neta $\vec{F}_{\text{neta ext}}$ que actúa sobre el objeto. El sistema se muestra en el instante t y en el instante $t + \Delta t$.

Ejemplo 8.18 La cuerda que cae

Una cuerda uniforme de masa M y de longitud L se sujeta de manera que su extremo inferior está justo por encima del plato de una balanza. Se suelta la cuerda y ésta empieza a caer. Determinar la fuerza que ejerce la cuerda sobre el plato de la balanza cuando ha caído la mitad de la cuerda.

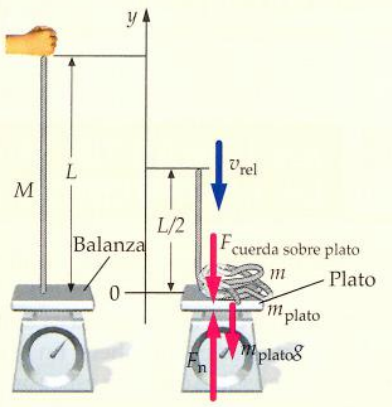


FIGURA 8.39 Una cuerda flexible uniforme de longitud L y masa M cae a partir del reposo sobre el plato de una balanza.

PLANTEAMIENTO Se aplica la ecuación 8.33 a la porción de cuerda que está en la balanza en el instante t y al plato de la balanza. Sobre el sistema se ejercen dos fuerzas externas, la fuerza de la gravedad y la fuerza normal ejercida por la balanza sobre el plato. Las velocidades con las que los diferentes puntos de la cuerda chocan con el plato de la balanza dependen de la altura desde donde caen. La fuerza normal ejercida por la balanza debe cambiar el momento de la cuerda que impacta sobre la balanza y soportar el peso del plato y la porción de cuerda que ya está sobre el plato.

SOLUCIÓN

1. Se dibuja un diagrama de la caída de la cuerda (véase la figura 8.39) junto con un eje de coordenadas. Se incluyen la configuración inicial y la configuración un tiempo arbitrario posterior:

2. Se expresa la ecuación 8.33 en sus componentes. Sea m la masa del sistema (la parte de la cuerda en la balanza). La velocidad del sistema es cero, por lo que $dv_y/dt = 0$:
$$F_{\text{neta ext } y} + \frac{dm}{dt}v_{\text{rel } y} = m\frac{dv_y}{dt}$$
$$F_n - mg + \frac{dm}{dt}v_{\text{rel } y} = 0$$

3. Sea dm la masa de un pequeño segmento de cuerda de longitud $d\ell$ que cae durante el tiempo dt sobre la balanza. La cuerda es uniforme, por lo que la relación entre dm y $d\ell$ es:
$$\frac{dm}{d\ell} = \frac{M}{L}$$

4. Multiplicando ambos términos del paso anterior por $d\ell/dt$ y despejando para dm/dt:
$$\frac{dm}{dt} = \frac{M}{L}\frac{d\ell}{dt}$$

5. $d\ell/dt$ es el módulo de la velocidad del impacto de un segmento, por lo que $v_{\text{rel } y} = -d\ell/dt$. ($v_{\text{rel } y}$ es negativa, ya que se ha elegido la dirección $+y$ hacia arriba, y la cuerda está cayendo.) Si se sustituye está relación en el resultado del paso 4 se obtiene:
$$\frac{dm}{dt} = -\frac{M}{L}v_{\text{rel } y}$$

6. Sustituyendo el resultado del paso 5 en el paso 2 y despejando F_n, se obtiene:
$$F_n = mg + \frac{M}{L}v_{\text{rel } y}^2$$

7. Hasta que un punto de la cuerda toca la balanza, se mueve con aceleración constante $\vec{g}$. Usando $v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_y\,\Delta y$ (ecuación 2.23) con $\Delta y = -L/2$, se obtiene:
$$v_{\text{rel } y}^2 = v_{\text{rel } y0}^2 + 2a_y\,\Delta y = 0 + 2(-g)(-L/2) = gL$$

8. Sustituyendo el resultado del paso anterior en el resultado del paso 6 con $m = m_{\text{plato}} + \frac{1}{2}M$, resulta:
$$F_n = \left(m_{\text{plato}} + \frac{M}{2}\right)g + \frac{M}{L}gL = m_{\text{plato}}g + \frac{3}{2}Mg$$

9. La fuerza normal de la balanza sobre el plato es igual al peso del plato más la fuerza que ejerce la cuerda sobre el plato:
$$F_n = m_{\text{plato}}g + F_{\text{cuerda sobre plato}}$$
por tanto, $F_{\text{cuerda sobre plato}} = F_n - m_{\text{plato}}g$

10. Restando $m_{\text{plato}}g$ de ambos lados del resultado del paso 8 y sustituyendo en el resultado del paso 9:
$$F_{\text{cuerda sobre plato}} = \boxed{\frac{3}{2}Mg}$$

COMPROBACIÓN Cuando la mitad de la cuerda ha caído sobre el plato de la balanza, la fuerza que ejerce la cuerda que descansa sobre la balanza es mayor que $\frac{1}{2}Mg$ (el peso de la cuerda sobre el plato en ese instante) como era de esperar. La fuerza que ejerce la cuerda sobre el plato debe ser mayor que $\frac{1}{2}Mg$ debido a que el plato debe soportar el peso de la cuerda y, además, detener el momento del impacto de la cuerda.

PROBLEMA PRÁCTICO 8.9 Determinar la fuerza normal ejercida por el plato de la balanza sobre la cuerda (*a*) justo antes de que el extremo superior de la cuerda alcance el plato de la balanza y, (*b*) justo después de que el extremo superior llegue al plato.

La propulsión de cohetes es un ejemplo interesante de la conservación de la cantidad de movimiento. Ahora vamos a deducir la ecuación del cohete (un caso especial de la ecuación 8.33). La masa del cohete cambia continuamente a medida que el motor quema combustible y expele los gases resultantes. Consideremos un cohete que se mueve en línea recta con una velocidad $\vec{v}$ relativa a la Tierra, tal como se muestra en la figura 8.40. Suponiendo que el combustible se quema a ritmo constante, en el tiempo t la masa del cohete es:

$$M = M_0 - Rt \tag{8.34}$$

donde M_0 es la masa inicial del cohete. Los gases se separan del cohete a una velocidad $\vec{u}_{ext}$ relativa al cohete, y el ritmo con que el cohete consume combustible coincide con la velocidad con que disminuye su masa M. Elegimos como sistema el cohete y el combustible no utilizado. Despreciando la resistencia del aire, la única fuerza externa que actúa sobre el sistema es la fuerza de la gravedad. Con $\vec{F}_{\text{neta ext}} = M\vec{g}$ y $dM/dt = -R$, la ecuación 8.33 se convierte en la **ecuación del cohete**:

$$M\vec{g} - R\vec{u}_{ext} = M\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{8.35}$$

ECUACIÓN DE UN COHETE

La magnitud $-R\vec{u}_{ext}$ es la fuerza ejercida sobre el cohete por el gas que escapa y se denomina **empuje** (o fuerza de impulsión) $\vec{F}_e$:

$$\vec{F}_e = -R\vec{u}_{ext} = -\left|\frac{dM}{dt}\right|\vec{u}_{ext} \tag{8.36}$$

DEFINICIÓN: EMPUJE DE UN COHETE

El cohete se mueve hacia arriba, por lo que se elige esta dirección como la positiva del eje y, con lo cual la ecuación 8.35 se expresa como

$$-Mg - Ru_{ex\,y} = M\frac{dv_y}{dt}$$

en forma de componentes y teniendo en cuenta que $\vec{u}_{ext}$ va hacia abajo, $u_{ext\,y} = -u_{ext}$.

$$-Mg + Ru_{ex} = M\frac{dv_y}{dt} \tag{8.37}$$

Despejando dv_y/dt (la aceleración), se tiene

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{Ru_{ex}}{M} - g$$

donde Ru_{ext}/M es la contribución del empuje a la aceleración y $-g$ es la contribución de la fuerza gravitacional a la aceleración. Sustituyendo M de la ecuación 8.34, se tiene

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{Ru_{ex}}{M_0 - Rt} - g \tag{8.38}$$

La ecuación 8.38 se resuelve integrando a los dos lados del signo igual con respecto del tiempo. Para un cohete que inicia su movimiento del reposo en el tiempo $t = 0$, resulta:

$$v_y = \int_0^{t_f}\left(\frac{Ru_{ext}}{M_0 - Rt} - g\right)dt = u_{ext}\int_0^{t_f}\frac{dt}{b - t} - \int_0^{t_f} g\,dt = -u_{ext}\ln\frac{b - t_f}{b} - gt_f$$

donde $b = M_0/R$. Reagrupando y sustituyendo t por t_f y M_0/R por b, da

$$v_y = u_{ext}\ln\left(\frac{M_0}{M_0 - Rt}\right) - gt \tag{8.39}$$

FIGURA 8.40 *(NASA/Superstock.)*

Ejemplo 8.19 Despegue

El cohete *Saturno V*, utilizado en el programa lunar *Apolo*, tenía una masa inicial M_0 de $2{,}85 \times 10^6$ kg, un 73% de combustible, un ritmo de combustión R de $13{,}84 \times 10^3$ kg/s, y una fuerza de impulsión F_e de 34×10^6 N. Determinar (*a*) la velocidad de expulsión de los gases, (*b*) el tiempo de combustión total t_b, (*c*) la aceleración inicial de despegue, (*d*) la aceleración en el tiempo t_b y (*e*) la velocidad final del cohete.

PLANTEAMIENTO (*a*) La velocidad de expulsión de los gases relativa al cohete se obtiene del empuje y del ritmo de combustión. (*b*) Para determinar el tiempo de combustión total, necesitamos conocer la masa total del combustible quemado, que es la masa inicial menos la carga útil. (*c*)y (*d*) La aceleración se determina mediante la ecuación 8.38. (*e*) La velocidad final viene dada por la ecuación 8.39.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Calcular u_{ext} a partir del empuje y de la velocidad de combustión:

$$F_e = \left|\frac{dM}{dt}\right| u_{ext}$$

$$\text{por lo tanto,} \quad u_{ext} = \frac{F_e}{|dM/dt|} = \frac{34{,}0 \times 10^6 \text{ N}}{13{,}84 \times 10^3 \text{ kg/s}} = \boxed{2{,}46 \text{ km/s}}$$

(*b*) 1. Calcular la masa final M_b del cohete:

$$M_b = 0{,}270 M_0 = 7{,}70 \times 10^5 \text{ kg}$$

2. La masa de combustible es igual a la velocidad de combustión por el tiempo de combustión:

$$M_{fuel} = Rt_b$$

$$\text{luego,} \quad t_b = \frac{M_{fuel}}{R} = \frac{M_0 - M_b}{R} = \boxed{150 \text{ s}}$$

(*c*) Calcular dv_y/dt en $t = 0$ utilizando la ecuación 8.38:

Inicialmente,

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{u_{ext}}{M_0}\left|\frac{dM}{dt}\right| - g = \frac{2{,}46 \text{ km/s}}{2{,}85 \times 10^6 \text{ kg}}(13{,}84 \times 10^3 \text{ kg/s}) - 9{,}81 \text{ m/s}^2$$

$$= \boxed{2{,}14 \text{ m/s}^2}$$

(*d*) Calcular dv_y/dt para $t = t_b$ utilizando la ecuación 8.38:

Finalmente,

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{u_{ext}}{M_b}\left|\frac{dM}{dt}\right| - g = \frac{2{,}46 \text{ km/s}}{7{,}70 \times 10^5 \text{ kg}}(13{,}84 \times 10^3 \text{ kg/s}) - 9{,}81 \text{ m/s}^2$$

$$= \boxed{34{,}3 \text{ m/s}^2}$$

(*e*) Calcular la velocidad para $t = t_b$ a partir de la ecuación 8.39:

$$v_y = u_{ext} \ln\left(\frac{M_0}{M_0 - Rt}\right) - gt = \boxed{1{,}75 \text{ km/s}}$$

COMPROBACIÓN En el momento de combustión total, la masa que se acelera es el 73% menor que la masa que se acelera en el instante del despegue. Por tanto, es de esperar que la aceleración en el instante de la combustión total sea mayor que la aceleración en el instante del despegue. Esto concuerda con los resultados de los apartados (*c*) y (*d*).

OBSERVACIÓN (1) La aceleración inicial es pequeña: sólo 0,21 g. Cuando ha transcurrido el tiempo de combustión total, la aceleración del cohete ha crecido a $3{,}5g$. Inmediatamente después de que se acabe el combustible, la aceleración es $-g$. La velocidad del cohete entonces, después de dos minutos y medio de combustión, es aproximadamente 6300 km/h. (2) En los cálculos de los apartados (*d*) y (*e*) se supone que el cohete se movía verticalmente hacia arriba y que g no varía con la altura. En realidad, el cohete se movía inicialmente hacia arriba, pero luego giró gradualmente hacia el este.

Motores de detonación por pulsos: más rápidos (y más fuertes)

Los motores de propulsión de cohetes de combustible líquido necesitan bombas que son muy delicadas y caras para comprimir el combustible a altas presiones en la cámara de combustión. La mayoría de los motores de propulsión son motores de turbina de gas, que tienen muchas partes móviles con tolerancias limitadas y grandes costes de mantenimiento. Los ingenieros aeronáuticos prefieren un motor con mayor eficiencia, menos partes móviles y mayor capacidad de operar con amplio rango de velocidades.

Los *motores de detonación por pulso* (PDE) pueden satisfacer estas necesidades. Los PDE funcionan mediante *detonación* en lugar de *deflagración*.

La detonación y la deflagración son tipos de combustión. La combustión por deflagración se propaga más lentamente que la velocidad del sonido calentando el aire que hay alrededor. Los fuegos artificiales, los motores de automóviles y las barbacoas de carbón vegetal son ejemplos de deflagraciones. Las detonaciones se propagan más rápido que la velocidad del sonido (a veces mucho más rápido) mediante una onda de choque que comprime y enciende el aire. Los explosivos que se utilizan en las minas y en las demoliciones experimentan detonación; algunos motores de coches con una mala puesta a punto también pueden tener detonaciones internas.

En un PDE, el tubo de detonación está cerrado por un extremo y abierto por el otro para la expulsión. El aire y el combustible acceden al extremo cerrado y son encendidos por una chispa. Esto inicia la deflagración. Conforme la deflagración se desplaza[1] por el tubo de detonación, se comprime rápidamente iniciándose así la detonación. Cuando la detonación se ha iniciado se propaga mucho más rápido que el sonido, llegándose a detectar en el laboratorio frentes de detonación de hasta Mach 5.[2] Los gases expulsados salen rápidamente por el extremo abierto del tubo. Como los gases expulsados tienen una velocidad tan elevada, su momento es mucho mayor que si hubiesen sido expulsados como fruto de la deflagración. Esto proporciona un empuje mayor a los cohetes con la misma cantidad de combustible. La detonación da el doble de impulso que la deflagración, utilizando el mismo combustible y el mismo cohete.[3]

Las únicas partes móviles de los PDE son las válvulas de admisión de la mezcla aire/combustible. La ignición se puede realizar mediante una bujía de automóvil y el resto del motor es sólo el tubo de detonación. Parece muy simple, a primera vista, pero la combustión es un proceso muy complejo, y en un PDE es además muy rápida. Para propulsar un cohete, los PDE necesitan de muchas detonaciones por segundo, al igual que los motores de explosión de los automóviles. Los PDE suelen producir unas 80 detonaciones por segundo durante varios minutos y horas, pero pueden llegar a alcanzar cientos de detonaciones por segundo.[4]

Pero las detonaciones son procesos muy violentos. Son extremadamente fuertes y causan vibraciones en los motores que pueden causar daños en los cohetes.[5] El ruido que producen los PDE no es recomendable para vehículos con pilotos o pasajeros humanos. Finalmente, para contener las detonaciones se utilizan tubos muy pesados, de un material que ha de ser muy fuerte pero a la vez ligero.

A principios del 2006 ningún avión volaba con PDE, pero la idea de motores de bajo coste, capaces de generar un amplio abanico de impulsos de diferentes intensidades y una mayor eficiencia hace que los PDE se sigan teniendo en cuenta.

Motor experimental de detonación por pulso en Rutan Vari-Eze. *(Tim Anderson.)*

[1] Paxson, D. E., Rosenthal, B. N., Sgondea, A., and Wilson, J.,"Parametric Investigation of Thrust Augmentation by Ejectors on a Pulsed Detonation Tube" Paper presented at the 41st Joint Propulsion Conference, 2005, Tuscon, AZ.

[2] Borisov, A.A., Frolov, S.M., Netzer, D. W., and Roy, G. D., "Pulse Detonation Propulsion: Challenges, Current Status, and Future Perspective." *Progress in Energy and Combustion Science* 30 (2004) 545-672.

[3] "Detonation Initiation and Impulse Measurement." Explosion Dynamics Laboratory: Pulse Detonation Engines, http://www.galcit.caltech.edu/EDL/projects/pde/pde.html May, 2006.

[4] Kandebo, Stanley W., "Taking the Pulse." *Aviation Week and Space Technology*, 160:10 Mar. 8, 2004, 32-33.

[5] Borisov et al. op. cit.

Resumen

La conservación del momento lineal en un sistema aislado es una ley fundamental de la naturaleza con aplicaciones en todas las áreas de la física.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
1. Momento lineal		
Definición para una partícula	$\vec{p} = m\vec{v}$	8.1
Energía cinética de una partícula	$K = \dfrac{p^2}{2m}$	8.16
Momento de un sistema de partículas	$\vec{P}_{\text{sist}} = \sum_i m_i \vec{v}_i = M\vec{v}_{\text{cm}}$	8.3
Segunda ley de Newton para sistemas	$\vec{F}_{\text{neta ext}} = \dfrac{d\vec{P}_{\text{sist}}}{dt}$	8.4
Ley de conservación del momento	Si la fuerza externa neta que actúa sobre un sistema es cero, el momento lineal total del sistema se conserva.	
2. Energía de un sistema		
Energía cinética	La energía cinética asociada al movimiento de las partículas de un sistema relativo al centro de masas es $K_{\text{rel}} = \Sigma \frac{1}{2} m_i u_i^2$, donde u_i es la velocidad de la partícula i relativa al centro de masas: $K = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 + K_{\text{rel}}$	8.7
3. Colisiones		
Impulso	El impulso de una fuerza se define como la integral de la fuerza extendida al intervalo de tiempo durante el cual actúa. $\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\, dt$	8.9
Teorema impulso-momento	$\vec{I}_{\text{neta}} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{\text{neta}} dt = \Delta\vec{p}$	8.10
Fuerza media	$\vec{F}_{\text{m}} = \dfrac{1}{\Delta t}\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\, dt = \dfrac{\vec{I}}{\Delta t}$ (por tanto, $\vec{I} = \vec{F}_{\text{m}}\, \Delta t$)	8.13
Colisiones elásticas	Se dice que un choque es elástico cuando la suma de las energías cinéticas de los dos objetos es la misma antes y después de la colisión.	
Velocidades relativas de aproximación y retroceso	En un choque elástico, la velocidad relativa de alejamiento de los cuerpos después del choque es igual a la velocidad relativa de aproximación antes del choque: $v_{2\text{f}} - v_{1\text{f}} = v_{1\text{i}} - v_{2\text{i}}$	8.23
Colisiones perfectamente inelásticas	En una colisión perfectamente inelástica, los cuerpos que chocan se acoplan y se mueven con la velocidad del centro de masas.	
*Coeficiente de restitución	El coeficiente de restitución e mide la elasticidad de un choque, y se define como el coeficiente entre la velocidad relativa de retroceso y la velocidad relativa de aproximación: $e = \dfrac{v_{2\text{f}} - v_{1\text{f}}}{v_{1\text{i}} - v_{2\text{i}}}$	8.25
	Para un choque elástico, $e = 1$; para un choque perfectamente inelástico, $e = 0$.	
* **4. Sistemas de masa variable**		
Segunda ley de Newton	$\vec{F}_{\text{neta ext}} + \dfrac{dM}{dt}\vec{v}_{\text{rel}} = M\dfrac{d\vec{v}}{dt}$ donde $R = \lvert dM/dt \rvert$ es el ritmo de combustión.	8.33
Ecuación del cohete	$M\vec{g} - R\vec{u}_{\text{ext}} = M\dfrac{d\vec{v}}{dt}$	8.35
Empuje	$\vec{F}_{\text{e}} = -R\vec{u}_{\text{ext}} = -\left\lvert \dfrac{dM}{dt} \right\rvert \vec{u}_{\text{ext}}$	8.36

Respuestas a las comprobaciones conceptuales

8.1 No

Respuestas a los problemas prácticos

8.1 8,4 J

8.2 140 s. El grano que escapa no transmite momento lineal alguno al resto del sistema. Si el suelo careciese de rozamiento y fuera plano, todo el grano inicialmente en el vagón llegaría al cambio de agujas al mismo tiempo que el vagón.

8.3 1,32 m/s. Ella gana más velocidad lanzándolos secuencialmente que simultáneamente.

8.4 (*a*) $v_{cm} = 0{,}50$ m/s, $v_A = +0{,}50$ m/s, y $v_B = -0{,}50$ m/s, (*b*) $K_{A\,rel} = K_{B\,rel} = 0{,}125$ J, (*c*) $K_{rel} = 0{,}25$ J, (*d*) $K_{rel} = 0$

8.5 La conservación del momento implica $v_{1i} + v_{2i} = v_{1f} + v_{2f}$, las colisiones elásticas cumplen $v_{1i} - v_{2i} = v_{2f} - v_{1f}$. Conjuntamente, $v_{2f} = v_{1i}$ y $v_{1f} = v_{2i}$.

8.6 0,73

8.7 $\frac{1}{2}v_0$

8.8 Antes: $P_{sist\,i} = (4{,}0\text{ kg})(1{,}0\text{ m/s}) + (2{,}0\text{ kg})(-2{,}0\text{ m/s}) = 0{,}0\text{ kg}\cdot\text{m/s}$

Después: $P_{sist\,f} = (4{,}0\text{ kg})(-1{,}0\text{ m/s}) + (2{,}0\text{ kg})(2{,}0\text{ m/s}) = 0{,}0\text{ kg}\cdot\text{m/s}$

8.9 (*a*) $3Mg$, (*b*) Mg

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben aportarse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

En los datos numéricos sin coma decimal se deben considerar significativos todos los dígitos, incluidos los ceros a la derecha del último diferente de cero.

Usar en todos los problemas $g = 9{,}81$ m/s² para la aceleración de la gravedad y despreciar, a menos que se indique lo contrario, el rozamiento y la resistencia del aire.

- • Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil
- •• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
- ••• Desafiante, para alumnos avanzados
- SSM La solución se encuentra en el *Manual de soluciones*

Los problemas consecutivos que están sombreados son problemas relacionados.

PROBLEMAS CONCEPTUALES

1 • Demostrar que si dos partículas tienen la misma energía cinética, los módulos de sus momentos son iguales sólo si tienen la misma masa. SSM

2 • Una partícula A tiene el doble de momento y cuatro veces más energía cinética que una partícula B. ¿Cuál es el cociente entre las masas de la partícula A y de la B? Explicar la respuesta.

3 • Utilizando el SI de unidades, demostrar que al dividir las unidades del cuadrado del momento por las unidades de masa se obtienen joules.

4 • Verdadero o falso:

(*a*) El momento lineal total de un sistema se conserva incluso cuando la energía mecánica no lo hace.

(*b*) Para que se conserve el momento lineal total de un sistema, no debe haber fuerzas externas actuando sobre el sistema.

(*c*) La velocidad del centro de masas de un sistema cambia sólo cuando actúa una fuerza externa neta sobre el sistema.

5 • Si se dispara una bala hacia el oeste, explicar cómo la conservación del momento lineal permite predecir qué el rifle retrocederá en dirección este. ¿Se conserva aquí la energía cinética?

6 • Una muchacha salta de un bote al muelle. ¿Por qué debe saltar con más energía de la que necesitaría si saltase la misma distancia de un muelle a otro?

7 •• Una gran parte de la investigación pionera sobre el movimiento de cohetes fue realizada por Robert Goddard, profesor de física en el Clark College de Worcester, Massachusetts. Un editorial de *New York Times*, publicado en 1920, ilustra la opinión pública de su trabajo: "El profesor Goddard con su cátedra en el Clark College y el apoyo de la Institución Smithsoniana desconoce la relación entre acción y reacción y la necesidad de tener algo mejor que el vacío frente a lo cual reaccionar —es decir, su idea es absurda. Naturalmente parece desconocer las enseñanzas impartidas diariamente en los centros de enseñanza media"*. La creencia de que un cohete necesitaba algún medio sobre el cual empujar, era un concepto erróneo predominante antes de que los cohetes en el espacio fueran algo común. Explicar por qué dicha creencia era errónea. SSM

* En la página 43 de la edición del 17 de julio de 1968 del *New York Times* se escribió una "corrección" al editorial de 1920. En dicha corrección, que se publicó 3 días antes de que el hombre pisara la Luna por primera vez, se decía que "ahora está totalmente demostrado que un cohete puede funcionar tanto en el vacío como en la atmósfera. *The Times* pide disculpas por su error".

8 • Dos bolas idénticas de una bolera se mueven con igual velocidad, pero una de ellas se desliza hacia abajo por la pista sin rodar, mientras la otra está rodando. ¿Cuál de las dos bolas tiene más energía cinética?

9 • Un filósofo dice: "Todo movimiento es imposible. Las fuerzas siempre actúan en pares iguales acción-reacción y, por lo tanto, se anulan. Como las fuerzas se cancelan, el momento de los objetos no puede cambiar." Responda a su argumento.

10 • Si dos objetos chocan estando uno de ellos inicialmente en reposo, ¿es posible que ambos queden quietos después del choque? (Supóngase que cualquier fuerza externa que actúe sobre el sistema de los dos objetos es muy pequeña, es decir, despreciable.) ¿Es posible que uno de los dos se quede parado? Explíquelo.

11 • Muchos investigadores en docencia de la física afirman que los errores conceptuales que tienen los estudiantes se deben, en parte, a los efectos especiales de los cómics y de las películas. A partir de la conservación del momento lineal, ¿cómo explicaría a una clase de secundaria cuál es el error conceptual de una escena en la que un superhéroe se mantiene estático suspendido en el aire mientras lanza un coche lleno de maleantes?

12 •• Un inquieto estudiante de física pregunta: "Si las fuerzas externas son las únicas fuerzas que hacen que el centro de masas de un sistema de partículas acelere, ¿cómo puede moverse un coche? ¿No es el motor de un coche el que proporciona la fuerza necesaria para acelerarlo? ¿De dónde viene la fuerza externa que acelera el coche?"

13 •• Cuando pisamos el pedal del freno para frenar un coche, las pastillas de los frenos presionan la rueda de modo que el rozamiento disminuye su velocidad de rotación. Sin embargo, el rozamiento de las pastillas no puede ser la fuerza que detiene el vehículo porque es una fuerza interna, ya que la rueda y las pastillas son elementos que forman el sistema. ¿Cuál es la fuerza externa que detiene el coche? Dé una explicación detallada de cómo funciona esta fuerza.

14 •• Explique por qué la red protectora puede salvar la vida de un artista de circo, mientras que si cae desde la misma altura pero sobre una superficie más rígida puede sufrir serias lesiones o incluso la muerte. Basar las explicaciones en el teorema impulso-momento.

15 •• Estimar el cociente entre el tiempo de colisión con la red de seguridad y el tiempo de colisión contra el suelo para el problema 14 cuando cae desde una altura de 25 m. *Ayuda: utilizar el procedimiento explicado en el paso 4 de la estrategia para la resolución de problemas de la sección 8.3.* SSM

16 •• (*a*) ¿Por qué un vaso de vidrio no se rompe cuando cae sobre una alfombra mientras que se rompe si cae sobre un suelo de hormigón? (*b*) En muchos circuitos de coches de carreras, en las curvas más peligrosas hay balas de paja. Explicar el motivo por el cual estas balas reducen la gravedad de los accidentes.

17 • Verdadero o falso:

(*a*) En un choque perfectamente inelástico, se pierde toda la energía cinética de las partículas en todos los sistemas de referencia inerciales.

(*b*) En un choque elástico frontal, la velocidad relativa de retroceso después del choque es igual a la velocidad relativa de aproximación antes del mismo.

(*c*) En un choque frontal perfectamente inelástico con un objeto inicialmente en reposo, sólo una parte de la energía cinética se disipa.

(*d*) Después de una colisión perfectamente inelástica a lo largo de la dirección este-oeste, se observa que ambos objetos se mueven hacia el oeste. El momento inicial del sistema iba, en consecuencia, en dirección oeste.

18 •• ¿En qué condiciones puede perderse toda la energía cinética inicial en un choque? Explicar cómo puede darse este resultado incluso cuando se conserva el momento del sistema.

19 •• Considerar una colisión perfectamente inelástica de dos objetos de igual masa. (*a*) ¿En qué caso es mayor la pérdida de la energía cinética: si los dos objetos tienen velocidades opuestas y de igual magnitud $v/2$, o si uno de los objetos se encuentra inicialmente en reposo y el otro tiene una velocidad inicial v? (*b*) ¿En qué situación es mayor el porcentaje de pérdida de energía cinética?

20 •• Un niño se ha construido una arma de juguete que consiste de dos cañas horizontales huecas por donde se pueden lanzar guisantes (véase la figura 8.41). El niño sopla desde la izquierda cuando dos guisantes están en las posiciones de la figura. Si el juguete está en posición horizontal, ¿cuál de los dos guisantes, el A o el B, saldrá con mayor velocidad? ¿Por qué? Sugerencia: la respuesta tiene que ver con el teorema impulso-momento.

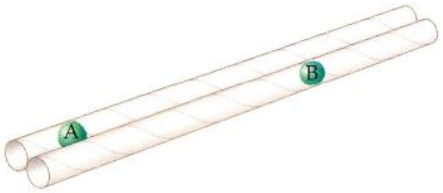


FIGURA 8.41 Problema 20

21 •• Una partícula cuya masa es m_1 que se mueve con velocidad v realiza un choque elástico frontal con una masa estacionaria m_2. ¿En qué condiciones será mayor la energía transmitida a m_2? (*a*) $m_2 << m_1$. (*b*) $m_2 = m_1$. (*c*) $m_2 >> m_1$. (*d*) Ninguna de las anteriores.

22 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Supóngase que usted forma parte de un equipo de reconstrucción de accidentes que ha reconstruido un accidente en el que un coche colisionó con la parte de atrás de otro de forma que sus parachoques quedaron enganchados hasta pararse. Durante el juicio, usted es llamado a declarar como experto de la acusación y el abogado de la defensa dice que usted despreció el rozamiento y la fuerza de la gravedad durante la fracción de segundo que duró la colisión. Defienda su informe. ¿Por qué usted tiene razón al ignorar tales fuerzas? Usted no las ignoró en su análisis del derrape anterior y posterior a la colisión. ¿Puede explicar al jurado por qué usted no ignoró esas fuerzas antes y después del choque?

23 •• Las boquillas de las mangueras de jardín habitualmente tienen la forma que se indica en la figura 8.42, acabando en ángulo recto. Si se abre la válvula de la boquilla y sale el agua a presión, se nota que la boquilla ejerce sobre la mano una presión hacia atrás más fuerte de lo que sería de esperar si la boquilla no acabara en ángulo recto. ¿Por qué?

FIGURA 8.42 Problema 23

PROBLEMAS CONCEPTUALES DE LAS SECCIONES OPCIONALES

24 • Describir una colisión perfectamente inelástica considerada en el sistema de referencia del centro de masas.

25 •• Un disco de hockey está inicialmente en reposo. Otro disco idéntico colisiona con el primero no frontalmente. Suponer que la colisión es elástica y despreciar cualquier movimiento rotacional de los discos. Describir la colisión en el sistema del centro de masas de los discos.

26 •• Se lanza, con un cierto ángulo, un bastón al aire. El bastón tiene un extremo más grueso que el otro. (*a*) Describir la trayectoria del centro de masas del bastón desde el sistema de referencia del suelo. (*b*) Describir el movimiento de los dos extremos del bastón usando el sistema de referencia del centro de masas del bastón.

27 •• Describir las fuerzas que actúan sobre una sonda lunar cuando pone en marcha sus retrocohetes para preparar la maniobra de aterrizaje. (Suponer que la masa que pierde la sonda durante el aterrizaje no es despreciable.)

28 •• Un vagón de un tren pasa por debajo de un silo que deja caer grano a velocidad constante. (*a*) ¿La conservación del momento conlleva que el vagón del tren disminuya su velocidad a medida que le cae grano? Suponer que no hay rozamiento en la vía, que el terreno es perfectamente plano y que el grano cae verticalmente. (*b*) Si el vagón frena, esto implica que hay una fuerza externa que actúa sobre él de modo que disminuye su velocidad. ¿De dónde procede? (*c*) Pasado el silo, el grano cae al suelo a velocidad constante por un agujero vertical en el suelo del vagón. ¿A medida que pierde masa, el vagón se acelera?

29 •• Como evidencia de que incluso personas muy brillantes pueden equivocarse, considere el problema siguiente, que fue propuesto a un estudiante de primer curso en el Caltech (abreviatura del prestigioso instituto californiano: California Institute of Technology): *Un barco de vela estaba en el agua un día sin viento. Para hacer que el barco se moviera, un marinero, erróneamente, colocó un ventilador a popa de manera que enviaba viento hacia las velas para que empujara el barco hacia delante. Explicar por qué esto es imposible.* La idea de quien propuso el problema era que la fuerza neta del aire que empujaba las velas hacia adelante se contrarrestaba con la fuerza que ejercía el ventilador hacia atrás (tercera ley de Newton). Sin embargo, uno de los estudiantes señaló al profesor que, de hecho, el barco podía moverse hacia delante. ¿Por qué? SSM

ESTIMACIONES Y APROXIMACIONES

30 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un coche de 2000 kg que viaja a 90 km/h choca contra una pared de hormigón que no cede. (*a*) Estimar el tiempo de choque suponiendo que el centro del coche recorre la mitad del camino hasta la pared con desaceleración constante. (Utilizar una longitud razonable para el coche.) (*b*) Estimar la fuerza media ejercida por la pared sobre el coche.

31 •• En una carrera de vagonetas de tracción manual sobre raíles, una de estas unidades de masa 350 kg se mueve a 32 km/h con un equipo de cuatro personas (cada una de ellas de 75 kg). La vagoneta se dirige hacia un río, cuando observan que el puente por el que han de pasar se ha derrumbado. Los cuatro componentes del equipo saltan simultáneamente hacia atrás con una velocidad de componente horizontal de 4 m/s relativa a la vagoneta después del salto. La vagoneta cae al agua a una distancia de 25,0 m de la orilla. (*a*) Estimar el tiempo de caída de la vagoneta. (*b*) ¿Qué ocurre con las cuatro personas?

32 •• Un bloque de madera y una pistola están firmemente sujetos a los extremos de una guía que se desliza sobre un carril de aire que no ofrece rozamiento (figura 8.43). El bloque y la pistola están separados una distancia L. El sistema está inicialmente en reposo. Se dispara la pistola y la bala sale con una velocidad v_b e impacta sobre el bloque incrustándose en él. La masa de la bala es m_b y la masa del sistema pistola-bloque-guía es m_p. (*a*) ¿Cuál es la velocidad de la guía inmediatamente después de salir la bala? (*b*) ¿Cuál es la velocidad de la guía inmediatamente después de que la bala se incruste completamente en el bloque? (*c*) ¿Qué distancia recorre la guía desde que sale la bala hasta que se incrusta en el bloque?

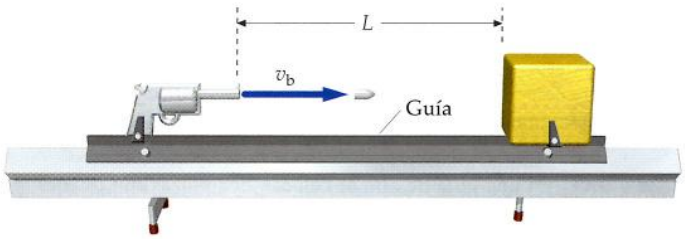


FIGURA 8.43 Problema 32

CONSERVACIÓN DEL MOMENTO LINEAL

33 • Tyrone, un adolescente de 85 kg, corre por un embarcadero y cuando llega al final cae sobre una balsa de 150 kg que estaba inicialmente en reposo. Después de caer sobre la balsa, ésta, con Tyrone dentro, se aleja del embarcadero a 2 m/s. ¿Con qué velocidad corría Tyrone por el embarcadero? SSM

34 •• Una concursante de 55 kg de un concurso de televisión está en una balsa de 150 kg que flota sobre agua infestada de cocodrilos. Ella y la balsa están inicialmente en reposo. La concursante necesita saltar de la balsa a la plataforma que hay varios metros más allá. Para eelo corre sobre la balsa desde uno de sus extremos hasta el otro extremo más cercano a la plataforma. Cuando llega a ese extremo, su velocidad respecto de la balsa es de 5 m/s. En ese instante, ¿cuál es su velocidad respecto del agua?

35 • Dos masas de 5 kg y 10 kg situadas sobre una masa sin rozamiento están conectadas por un muelle comprimido. Cuando el muelle se libera, la masa menor posee una velocidad de 8 m/s hacia la izquierda. ¿Cuál es la velocidad de la masa mayor?

36 • La figura 8.44 muestra el aspecto de un proyectil un instante después de haber estallado en tres fragmentos. ¿Cuál era la velocidad del proyectil un instante antes de su explosión? (*a*) v_3, (*b*) $v_3/3$, (*c*) $v_3/4$, (*d*) $4v_3$, (*e*) $(v_1 + v_2 + v_3)/4$.

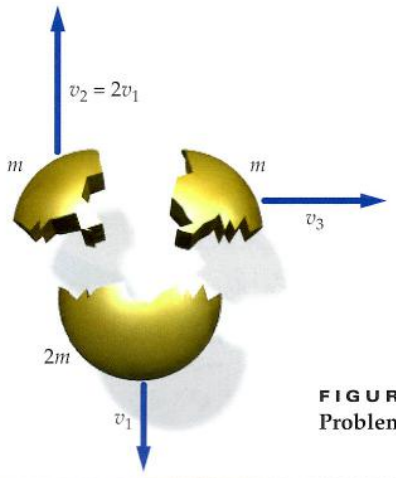


FIGURA 8.44
Problema 36

37 • Una granada de masa m y velocidad v explota en dos fragmentos idénticos. Si la granada se movía horizontalmente respecto a la Tierra y después de la explosión uno de los fragmentos se mueve verticalmente con el módulo de la velocidad v, determinar la velocidad $\vec{v}'$ del otro fragmento inmediatamente después de la explosión.

38 •• En una guía de aire se colocan dos piezas con imanes que se atraen uno a otro (véase la figura 8.45). La masa de la primera pieza es de 0,10 kg y la de la segunda de 0,20 kg (cada una incluye la masa propia de la pieza más la del imán). Se sitúa el origen en el extremo izquierdo, el centro de la pieza 1 está en $x = 0{,}1$ m y el centro de la pieza 2 está en $x = 1{,}60$ m. La pieza 1 mide 10 cm y la 2 mide 20 cm, y ambas piezas tienen el centro de masas en su centro. Cuando se sueltan las dos piezas se mueven una al encuentro de la otra y quedan enganchadas. (*a*) ¿Cuál es la posición de los centros de cada pieza cuando chocan por primera vez? (*b*) Determinar la velocidad de las dos piezas después de quedar unidas.

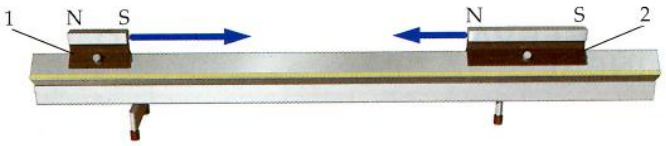


FIGURA 8.45 Problema 38

39 •• Un muchacho dispara su escopeta de perdigones hacia un taco de queso que descansa sobre un bloque de hielo. En uno de los disparos, el perdigón de 1,2 g se incrusta en el taco de queso y se deslizan juntos una distancia 25 cm sobre el hielo hasta pararse por completo. Si la velocidad con la que sale el perdigón es de 65 m/s y el taco de queso tiene una masa de 120 g, ¿cuál es el coeficiente de rozamiento entre el queso y el hielo?

40 ••• **MÚLTIPLES PASOS** Una cuña de masa M descansa sobre una superficie horizontal que no ofrece rozamiento. Sobre ella se coloca un bloque de masa m cuya superficie tampoco ejercerá rozamiento (figura 8.46). El centro de masas del bloque desciende una altura h cuando el bloque se desliza desde su posición original hasta que llega a la superficie horizontal. (*a*) ¿Cuáles son las velocidades del bloque y de la cuña cuando se separan el uno de la otra? (*b*) Comprobar el resultado considerando el caso límite cuando $M >> m$.

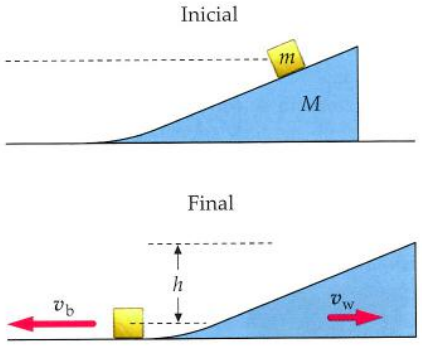


FIGURA 8.46 Problema 40

ENERGÍA CINÉTICA DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

41 •• **MÚLTIPLES PASOS** Un bloque de 3 kg se mueve hacia la derecha a 5 m/s y un segundo bloque de 3 kg se mueve hacia la izquierda a 2 m/s. (*a*) Hallar la energía cinética total de ambos bloques en este sistema. (*b*) Hallar la velocidad del centro de masas del sistema formado por los dos bloques. (*c*) Hallar las velocidades de los dos bloques respecto al centro de masas. (*d*) Hallar la energía cinética del movimiento respecto al centro de masas. (*e*) Demostrar que la respuesta del apartado (*a*) es mayor que la correspondiente al apartado (*d*) en una cantidad igual a la energía cinética del centro de masas. SSM

42 •• Repetir el problema 41 para un segundo bloque de masa 5 kg que reemplaza al de 3 kg y que se mueve hacia la derecha con velocidad de 3 m/s.

IMPULSO Y FUERZA MEDIA

43 • Un balón de rugby de masa 0,43 kg sale del pie del chutador con una velocidad inicial de 25 m/s. (*a*) ¿Cuál es el impulso impartido al balón por el chutador? (*b*) Si el pie del jugador está en contacto con el balón durante 0,008 s, ¿cuál es la fuerza media ejercida por el pie sobre el balón? SSM

44 • Un ladrillo de 0,3 kg se deja caer desde una altura de 8 m. Choca contra el suelo y queda en reposo. (*a*) ¿Cuál es el impulso ejercido por el suelo sobre el ladrillo durante la colisión? (*b*) Si desde que el ladrillo toca el suelo hasta que queda en reposo transcurren 0,0013 s, ¿cuál es la fuerza media ejercida por el suelo sobre el ladrillo en el impacto?

45 • En el Hayden Planetarium de Nueva York se exhibe un meteorito de 30,8 ton (1 ton = 1000 kg). Supongamos que la energía cinética del meteorito cuando chocó contra el suelo fue de 617 MJ. Determinar el impulso I experimentado por el meteorito en el momento en que su energía cinética se había reducido a la mitad (después de unos 3,0 s). Determinar también la fuerza media F ejercida sobre el meteorito durante este intervalo de tiempo.

46 •• Al golpear horizontalmente una pelota de béisbol de 0,15 kg, su velocidad cambia de + 20 m/s a – 20 m/s. (*a*) ¿Cuál es el módulo del impulso impartido por el bate a la pelota? (*b*) Si la pelota está en contacto con el bate durante 1,3 ms, ¿cuál es la fuerza media ejercida por el bate sobre la pelota?

47 •• Una pelota de frontón de 60 g choca contra la pared con una velocidad de 5,0 m/s con un ángulo de 40° y rebota con la misma velocidad y el mismo ángulo con la normal. Si está en contacto con la pared durante 2 ms, ¿cuál es la fuerza media ejercida por la bola sobre la pared?

48 •• **ESTIMACIÓN** Se lanza una pelota de 150 g a una altura de 40 m. (*a*) Utilizar un valor razonable para la distancia que recorrerá la pelota de manera que mientras se encuentre en la mano de la persona que la lanza se pueda calcular la fuerza media ejercida y el tiempo que la pelota permanece en la mano durante el lanzamiento. (*b*) ¿Es posible despreciar el peso de la pelota mientras ésta es lanzada?

49 •• Una pelota de frontón de 0,06 g de masa se lanza perpendicularmente contra una pared con una velocidad de 10 m/s. Rebota con una velocidad de 8 m/s. (*a*) ¿Qué impulso se ha transmitido a la pared? (*b*) Si el contacto entre la pelota y la pared dura 0,003 s, ¿qué fuerza media se ejerce sobre la pared? (*c*) La pelota la recoge un jugador que la deja en reposo. En el proceso, sus manos retroceden 0,5 m. ¿Cuál es el impulso recibido por el jugador? (*d*) ¿Cuál es la fuerza media ejercida sobre el jugador por la pelota?

50 •• Una naranja esférica de 0,34 kg y 2 cm de radio se deja caer desde la cima de un edificio de 35 m de altura. Tras chocar contra el suelo, la naranja queda completamente aplastada con un grosor de 0,5 cm. Despreciar el rozamiento con el aire y suponer que la colisión es completamente inelástica. (*a*) ¿Cuánto tiempo tarda la naranja en deformarse completamente? (*b*) ¿Qué fuerza media hizo el pavimento sobre la naranja?

51 •• El colchón que se utiliza para el salto de altura en una competición olímpica, no es más que un cojín de aire que se comprime durante el proceso de frenado que tiene lugar cuando el saltador cae sobre él hasta pararlo completamente, pasando de un grosor de 1,2 m en reposo a 0,2 m tras el impacto. (*a*) ¿Cuál es el intervalo de tiempo durante el cual, un saltador que cae después de saltar una altura de 6,4 m, es frenado por el colchón? (*b*) ¿Cuál sería el intervalo de tiempo si el colchón se comprime 5 cm en lugar de 20 cm? (*c*) Discutir cualitativamente la diferencia en la fuerza media que experimenta el saltador al comparar un colchón que se comprime dos distancias distintas. Es decir, ¿qué distancia se tendría que comprimir el colchón para que se ejerciera la mínima fuerza sobre el saltador?

52 ••• Las grandes cavernas de piedra caliza se formaron gracias al goteo constante de agua. (*a*) ¿Cuál es la fuerza media ejercida sobre el suelo de caliza por las gotas de agua de 0,03 mL que caen desde una altura de 5 m a razón de 10 gotas por minuto? (suponer que el agua no se acumula sobre el suelo) (*b*) Comparar esta fuerza con el peso de una gota de agua.

COLISIONES EN UNA DIMENSIÓN

53 • Un coche de 2000 kg se mueve hacia la derecha a 30 m/s en persecución de un segundo coche de igual masa que se mueve también hacia la derecha a 10 m/s. (*a*) Si los dos coches chocan y quedan acoplados, ¿cuál es su velocidad inmediatamente después de la colisión? (*b*) ¿Qué fracción de la energía cinética inicial de los coches se pierde durante esta colisión? ¿Adónde va a parar esta energía? SSM

54 • Un jugador de rugby de 85 kg que se mueve a la velocidad de 7 m/s realiza un choque perfectamente inelástico con un defensa de 105 kg que está inicialmente en reposo. ¿Cuál es la velocidad de los jugadores inmediatamente después de la colisión?

55 • Un cuerpo de 5 kg con una velocidad de 4,0 m/s choca frontalmente con otro de 10 kg que se mueve hacia él con una velocidad de 3,0 m/s. Si el bloque de 10 kg queda inmóvil después del choque, (*a*) ¿cuál es la velocidad final del cuerpo de 5 kg? (*b*) ¿Es elástico el choque?

56 • Una bola de masa m se mueve con velocidad v hacia la derecha y choca contra un bate mucho más pesado que se mueve hacia la izquierda con velocidad v. Determinar la velocidad de la bola después del choque elástico con el bate.

57 •• Un protón de masa m experimenta un choque elástico frontal con un núcleo de carbono estacionario de masa $12m$. La velocidad del protón es de 300 m/s. (*a*) Determinar la velocidad del centro de masas del sistema. (*b*) Determinar la velocidad del protón y del núcleo de carbono después del choque.

58 •• Un cuerpo de 3 kg que se mueve con una velocidad de 4 m/s verifica un choque elástico contra un cuerpo estacionario de masa 2 kg. Utilizando el principio de conservación de la cantidad de movimiento, y el hecho de que la velocidad relativa de separación es igual a la velocidad relativa de aproximación, determinar la velocidad de cada cuerpo después de la colisión. Comprobar la respuesta calculando las energías cinéticas inicial y final de cada cuerpo.

59 •• Un bloque de masa $m_1 = 2$ kg se desliza a lo largo de una mesa sin rozamiento con una velocidad de 10 m/s. Directamente enfrente de este bloque y moviéndose en la misma dirección con una velocidad de 3 m/s hay otro bloque de masa $m_2 = 5$ kg, conectado a un muelle de masa despreciable y constante de fuerza $k = 1120$ N/m, como se muestra en la figura 8.47. (*a*) ¿Cuál es la velocidad del centro de masas del sistema? (*b*) Durante el choque, el muelle se comprime hasta un valor máximo Δx. ¿Cuál es el valor de Δx? (*c*) Los bloques finalmente se separan de nuevo. ¿Cuáles son las velocidades finales de los dos bloques medidas en el sistema de referencia de la mesa, después de separarse?

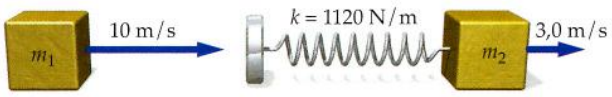


FIGURA 8.47 Problema 59

60 •• Una bala de masa m se dispara verticalmente desde abajo sobre una lámina delgada de madera contrachapada de masa M que está inicialmente en reposo, soportada por una lámina delgada de papel (figura 8.48). La bala perfora la lámina, la cual asciende hasta una altura H por encima de su posición inicial antes de volver a caer. La bala sigue ascendiendo hasta una altura h. (*a*) Expresar la velocidad ascendente de la bala y la lámina inmediatamente después de que la primera emerja de la lámina en función de h y H. (*b*) ¿Cuál es la velocidad de la bala? (*c*) Obtener expresiones para las energías mecánicas del sistema antes y después de la colisión inelástica. (*d*) ¿Cuánta energía mecánica se disipa durante la colisión?

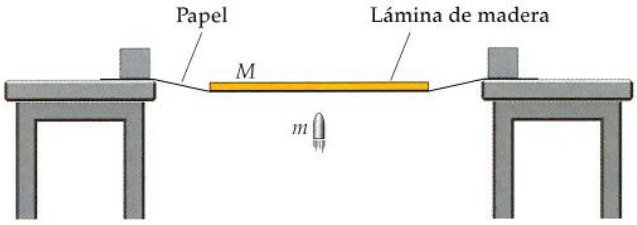


FIGURA 8.48 Problema 60

61 •• Un protón de masa m se mueve con velocidad inicial v_0 hacia una partícula α de masa $4m$ inicialmente en reposo. Como ambas partículas poseen carga eléctrica positiva, se repelen entre sí. (Las fuerzas repulsivas son suficiente para evitar que las partículas entren en contacto directo.) Determinar la velocidad v_α de la partícula α (*a*) cuando la distancia entre las dos partículas es mínima y (*b*) cuando las dos partículas están muy separadas.

62 •• Un electrón choca con un átomo de hidrógeno inicialmente en reposo. Todo el movimiento se da en una línea recta. ¿Qué fracción de la energía cinética inicial se transfiere al átomo? (Considere que la masa del átomo de hidrógeno es 1840 veces la masa de un electrón.)

63 •• Una bala de 16 g se dispara contra el bloque de madera de un péndulo balístico de masa 1,5 kg (figura 8.18). Cuando el bloque de madera está a su altura máxima, las cuerdas forman con la vertical un ángulo de 60°. La longitud del péndulo es de 2,3 m. Determinar la velocidad de la bala. SSM

64 •• Demostrar que en una colisión elástica en una dimensión, si la masa y la velocidad del objeto 1 son m_1 y v_{1i}, y si la masa y la velocidad del objeto 2 son m_2 y v_{2i}, entonces las velocidades finales v_{1f} y v_{2f} vienen dadas por

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

y

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

65 •• Usar los resultados del problema 64 para investigar las colisiones elásticas en una dimensión en los límites siguientes: (*a*) Cuando las dos masas son iguales, demostrar que las partículas "canjean" velocidades: $v_{1f} = v_{2i}$ y $v_{2f} = v_{1i}$. (*b*) Si $m_2 >> m_1$, y $v_{2i} = 0$, demostrar que $v_{1f} \approx -v_{1i}$ y $v_{2f} \approx 0$. (*c*) Si $m_1 >> m_2$, y $v_{2i} = 0$, demostrar que $v_{1f} \approx v_{1i}$ y $v_{2f} \approx 2v_{1i}$.

66 •• Se dispara horizontalmente un proyectil de masa m_1 con una velocidad v sobre un péndulo balístico, que tiene masa m_2. El péndulo está sujeto a una varilla muy ligera de longitud L que puede girar por su otro extremo. El proyectil se detiene en el péndulo. Hallar la velocidad mínima v para que el péndulo llegue a describir una circunferencia completa.

67 •• Se dispara horizontalmente un proyectil de masa m_1 con velocidad v sobre un péndulo balístico de masa m_2 (figura 18.19). Hallar la máxima altura h alcanzada por éste si el proyectil pasa a través del péndulo y sale con velocidad $v/3$.

68 •• Si colocamos un bloque de madera, como los que se usan habitualmente en un péndulo balístico, lo ponemos en una mesa plana, y disparamos una bala sobre él, ¿qué distancia recorrerá hasta pararse? Considerar que la bala tiene una masa de 10,5 g, que la masa del bloque de madera es de 10,5 kg y que el coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y la mesa es 0,22. Suponer también que la bala no induce rotación sobre el bloque.

69 •• Una bola de 0,425 kg de masa y 1,3 m/s de velocidad rueda por una mesa hasta que entra en una caja vacía de 0,327 kg que descansa sobre la mesa. La caja con la bola dentro recorre por la mesa una distancia de 0,520 m. ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y la mesa? SSM

70 •• Tarzán está frente a una estampida de elefantes cuando Jane le rescata colgada de una liana. La liana tiene una longitud de 25 m, y Jane ha iniciado su salto cuando la liana estaba en posición horizontal. Si la masa de Jane es de 54 kg y la de Tarzán de 82 kg, ¿hasta qué altura por encima del suelo podrá subir la pareja? (Suponer que la liana está en posición vertical cuando ella lo agarra a él.)

71 •• Los científicos estiman que el meteorito que produjó el cráter conocido como Barringer Meteorite Crater en Arizona tenía una masa de $2{,}72 \times 10^5$ toneladas y viajaba a 17,9 km/s. Considerar que la velocidad orbital de la Tierra es de 30 km/s. (*a*) ¿Cuál debería ser la dirección del impacto si la velocidad orbital de la Tierra sufre el máximo cambio? (*b*) Suponiendo la condición de colisión del apartado (*a*), estimar el máximo porcentaje en el cambio de la velocidad orbital de la Tierra como resultado de esta colisión. (*c*) ¿Cuál debería ser la masa del asteroide, si tuviera una velocidad igual a la velocidad orbital de la Tierra, necesaria para cambiar la velocidad orbital de la Tierra en un 1%? SSM

72 ••• Guillermo Tell dispara a la manzana que tiene su hijo sobre la cabeza. La velocidad de la flecha de 125 g justo antes del impacto es de 25 m/s, y tiene dirección horizontal. La flecha se clava en la manzana y el conjunto cae al suelo a 8,5 m detrás de la posición del niño. ¿Cuál es la masa de la manzana? Suponer que el hijo mide 1,85 m.

EXPLOSIONES Y DESINTEGRACIONES RADIACTIVAS

73 •• El isótopo del berilio ^{8}Be es inestable y se desintegra en dos partículas α (núcleos de helio de masa $m = 6{,}64 \times 10^{-27}$ kg), liberándose una energía de $1{,}5 \times 10^{-14}$ J. Determinar las velocidades de las dos partículas alfa que surgen de la desintegración de un núcleo de ^{8}Be en reposo. Suponer que toda la energía aparece como energía cinética. SSM

74 •• El isótopo ligero del litio ^{5}Li es inestable y se rompe espontáneamente en un protón (núcleo de hidrógeno) y una partícula α (núcleo de helio). En este proceso, se libera una energía total de $3{,}15 \times 10^{-13}$ J, que aparece en forma de energía cinética de los dos productos de reacción. Determinar las velocidades del protón y de la partícula alfa que surgen de la desintegración de un núcleo de ^{5}Li en reposo. (*Nota*: las masas del protón y de la partícula alfa son $m_p = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg y $m_\alpha = 4\,m_p = 6{,}64 \times 10^{-27}$ kg.)

75 ••• Se lanza un proyectil de 3 kg con un ángulo de 30° sobre la horizontal y con una velocidad inicial de 120 m/s. En la parte superior de su trayectoria, explota en dos partes de 1 y 2 kg de masa. El fragmento de 2 kg cae al suelo directamente debajo del punto de explosión, 3,6 segundos después de que ésta se ha verificado. (*a*) Determinar la velocidad del fragmento de 1 kg inmediatamente después de la explosión. (*b*) Determinar la distancia entre el punto del disparo y el punto en el cual el fragmento de 1 kg choca contra el suelo. (*c*) Calcular la energía liberada en la explosión.

76 ••• El isótopo de boro ^{9}B es inestable y se desintegra en un protón y dos partículas alfa. La energía total liberada en forma de energía cinética de los productos de desintegración es $4{,}4 \times 10^{-14}$ J. En uno de estos procesos, con el núcleo de ^{9}B en reposo antes de la desintegración, la velocidad del protón medida experimentalmente es $6{,}0 \times 10^6$ m/s. Si las dos partículas alfa tienen energías iguales, determinar el módulo y dirección de sus velocidades respecto a la del protón.

COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN

77 • APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO El coeficiente de restitución del acero sobre acero se mide dejando caer una bola de este material sobre una placa de acero rígidamente ligada a la Tierra. Si la bola se deja caer desde una altura de 3 m y rebota hasta 2,5 m, ¿cuál es el coeficiente de restitución? SSM

78 • De acuerdo con la normas oficiales de un juego de pelota con raqueta, una pelota aceptable para un torneo debe rebotar hasta una altura comprendida entre 173 y 183 cm cuando se deja caer libremente desde una altura de 254 cm a temperatura ambiente. ¿Cuál es el intervalo aceptable de valores del coeficiente de restitución para el sistema pelota-suelo?

79 • Una pelota rebota hasta el 80 por ciento de su altura original. (*a*) ¿Qué fracción de su energía mecánica se pierde en cada rebote? (*b*) ¿Cuál es el coeficiente de restitución del sistema pelota-suelo?

80 •• Un bloque de 2 kg se mueve con una velocidad de 6 m/s y choca frontalmente con un bloque de 4 kg inicialmente en reposo. Después del choque, el bloque de 2 kg retrocede con velocidad de 1 m/s. (*a*) Calcular la velocidad del bloque de 4 kg después del choque. (*b*) Calcular la energía perdida en el choque. (*c*) ¿Cuál es el coeficiente de restitución para este choque?

81 •• Un bloque de 2 kg que se mueve hacia la derecha con velocidad de 5 m/s choca con un bloque de 3 kg que se mueve en la misma dirección a 2 m/s, como indica la figura 8.49. Después del choque, el bloque de 3 kg se mueve a 4,2 m/s. Determinar (*a*) la velocidad del bloque de 2 kg después del choque y (*b*) el coeficiente de restitución de la colisión.

FIGURA 8.49 Problema 81

82 ••• PÓNGALO EN SU CONTEXTO Con el fin de poder comparar los récords logrados en las carreras y lanzamientos de béisbol de diferentes temporadas, la federación de béisbol mide aleatoriamente los coeficientes de restitución entre las pelotas y la madera de los bates. (*a*) En un test aleatorio se comprueba que cuando se deja caer la pelota desde 2 m de altura sobre la madera del bate rebota 0,25 m. ¿Cuál es coeficiente de restitución de la pelota? (*b*) ¿Cuál debería ser la distancia máxima lograda con

esa pelota, suponiendo que no hay rozamiento con el aire y estimando la velocidad del bate y la velocidad de lanzamiento del *pitcher*?

83 •• **CONCEPTUAL** Para que los discos de hockey sean más manejables, se congelan hasta justo antes del partido. (*a*) Explicar por qué a temperatura ambiente sería más difícil manejar los discos con los sticks que si estuvieran congelados. (Ayuda: los discos están hechos de goma.) (*b*) A temperatura ambiente el disco rebota 15 cm cuando se deja caer sobre una superficie de madera desde 1 m de altura. Si un disco congelado tiene sólo la mitad del coeficiente de restitución que uno a temperatura ambiente, predecir hasta qué altura rebotaría un disco congelado bajo las mismas condiciones. SSM

COLISIONES EN MÁS DE UNA DIMENSIÓN

84 •• En la sección 8.3 se probó, mediante argumentos geométricos, que cuando una partícula choca elásticamente con otra de igual masa que inicialmente está en reposo, las dos se separan formando un ángulo recto. En este problema examinamos otra forma de demostrar este resultado que ilustra la potencia de la notación vectorial. (*a*) Si $\vec{A} = \vec{B} + \vec{C}$, elevar al cuadrado ambos lados (así se obtendrá el producto escalar de cada lado con él mismo) para demostrar que $A^2 = B^2 + C^2 + 2\vec{B} \cdot \vec{C}$. (*b*) Sea $\vec{P}$ el momento inicial de la primera partícula y sean $\vec{p}_1$ y $\vec{p}_2$ los momentos de las partículas tras la colisión elástica. Escribiendo la ecuación para la conservación del momento, realizando el producto escalar de cada término por él mismo, y comparando con la ecuación para la conservación de la energía, demostrar que $\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = 0$.

85 •• En un juego de billar, la bola golpeada por el taco, con una velocidad inicial de 5 m/s, realiza un choque elástico con la bola ocho, que está inicialmente en reposo. Después del choque, la bola ocho se mueve formando un ángulo de 30° con la bola golpeada. Suponer que las bolas tienen la misma masa. (*a*) Determinar la dirección del movimiento de esta última después de la colisión. (*b*) Calcular la velocidad de cada bola inmediatamente después de la colisión.

86 •• Un objeto A de masa m choca con una velocidad $v_0\hat{i}$, contra un objeto B de masa $2m$ con velocidad $\frac{1}{2}v_0\hat{j}$. Después de la colisión, el objeto B posee una velocidad $\frac{1}{4}v_0\hat{i}$. (*a*) Determinar la velocidad del objeto A después de la colisión. (*b*) ¿Es esta una colisión elástica? Si no lo es, expresar la variación de energía cinética en función de m y v_0.

87 •• Un disco de masa 0,5 kg se aproxima a otro semejante que se encuentra estacionario sobre hielo sin rozamiento. La velocidad inicial del disco móvil es de 2 m/s. Después del choque, el primer disco sale con velocidad v_1 formando un ángulo de 30° con la línea original de movimiento; el segundo disco sale con velocidad v_2 a 60°, como indica la figura 8.50. (*a*) Calcular v_1 y v_2. (*b*) ¿Fue elástica la colisión? SSM

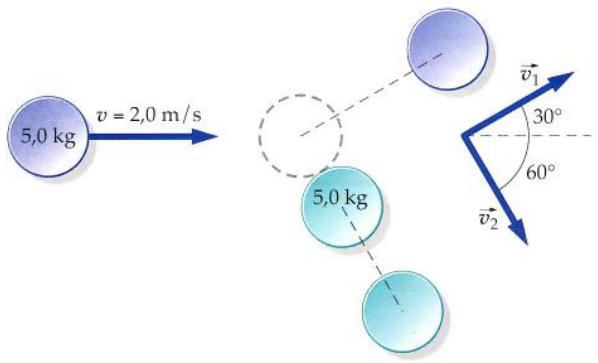


FIGURA 8.50 Problema 87

88 •• La figura 8.51 muestra el resultado de un choque entre dos objetos de distinta masa. (*a*) Calcular la velocidad v_2 de la masa mayor después del choque y el ángulo θ_2. (*b*) Demostrar que este choque es elástico.

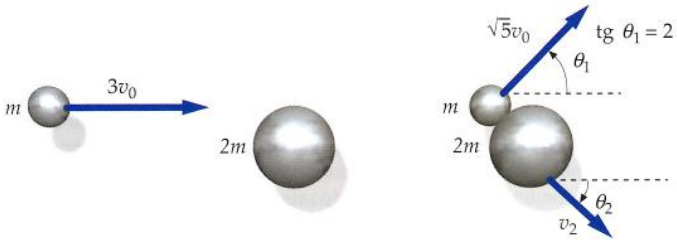


FIGURA 8.51 Problema 88

89 •• Una pelota de 2 kg que se desplaza con una velocidad de 10 m/s experimenta un choque elástico no frontal con otra pelota de 3 kg de masa inicialmente en reposo. La pelota de 2 kg es desviada 30° de su dirección original de movimiento mientras que la pelota de 3 kg se mueve a 4 m/s. Calcular la velocidad de la pelota de 2 kg y la dirección de la pelota de 3 kg después del choque.

90 •• Una partícula tiene inicialmente una velocidad v_0. Choca contra una segunda partícula de igual masa en reposo. Después del choque, la primera partícula se desvía un ángulo ϕ. Su velocidad después del choque es v. La segunda partícula retrocede, de tal forma que su velocidad forma un ángulo θ con la dirección inicial de la primera partícula. (*a*) Demostrar que $\text{tg}\,\theta = (v \,\text{sen}\,\phi)/\,[(v_0 - v\cos\phi)]$. (*b*) Demostrar que si la colisión es elástica, $v = v_0 \cos\phi$.

*SISTEMA DE REFERENCIA CENTRO DE MASAS

91 •• Una partícula de momento lineal p_1 en una dimensión experimenta un choque elástico con una segunda partícula de momento lineal $p_2 = -p_1$, en el sistema de referencia del centro de masas. Tras el choque su momento lineal es p'_1. Expresar la energía total y la final en función de m_1, m_2 y p_1, y demostrar que $p'_1 = \pm p_1$. Si $p'_1 = -p_1$, la partícula invierte su sentido en la colisión y sale con el mismo módulo de velocidad que tenía inicialmente. ¿Cuál sería el significado del signo más en la solución?

92 •• **MÚLTIPLES PASOS** Un bloque de 3 kg se mueve en la dirección negativa de x a 5 m/s y otro bloque de 1 kg se mueve en la dirección positiva a 3 m/s. (*a*) Determinar la velocidad v_{cm} del centro de masas. (*b*) Restar v_{cm} de la velocidad de cada bloque para determinar la velocidad de cada bloque en el sistema del centro de masas. (*c*) Después de realizar una colisión elástica, la velocidad de cada bloque se invierte en el sistema de referencia del centro de masas. Determinar la velocidad de cada bloque después de una colisión elástica. (*d*) Transformar de nuevo al sistema original sumando v_{cm} a la velocidad de cada bloque. (*e*) Comprobar el resultado determinando las energías cinéticas inicial y final de los bloques en el sistema original.

93 •• Repetir el problema 92 con un segundo bloque de masa 5 kg que se mueve hacia la derecha a 3 m/s. SSM

*SISTEMAS DE MASA VARIABLE: LA PROPULSIÓN DE LOS COHETES

94 • **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un cohete quema combustible a un ritmo de 200 kg/s y expulsa los gases con una velocidad relativa de 6 km/s respecto al cohete. Calcular el empuje del cohete.

95 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un cohete tiene una masa inicial de 30 000 kg, de la cual un 80% es combustible. Quema combus-

tible a razón de 200 kg/s y expulsa los gases de combustión con una velocidad relativa de 1,8 km/s. Determinar (*a*) la fuerza de empuje del cohete, (*b*) el tiempo transcurrido hasta quemar todo el combustible y (*c*) su velocidad final, suponiendo que se mueve verticalmente hacia arriba en las proximidades de la superficie de la Tierra, donde el campo gravitatorio g es constante.

96 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** El *impulso específico* del combustible de un cohete se define como $I_{es} = F_e/(Rg)$, donde F_e es el empuje producido por el combustible, g el módulo de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra y R la tasa a la que se quema el combustible que depende de las características de éste. (*a*) Demostrar que el impulso específico tiene dimensiones de tiempo. (*b*) Demostrar que $u_g = gI_{es}$, donde u_g es la velocidad de salida de los gases. (*c*) ¿Cuál es el impulso específico (expresado en segundos) del combustible usado en el cohete *Saturno V* del ejemplo 8.19?

97 ••• **HOJA DE CÁLCULO, APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** La *relación inicial empuje-peso* τ_0 de un cohete es $\tau_0 = F_e/(m_0 g)$, donde F_e es el empuje del cohete y m_0 es la masa inicial del cohete más la del combustible. (*a*) En un cohete lanzado desde la superficie terrestre, demostrar que $\tau_0 = 1 + (a_0/g)$, donde a_0 es la aceleración inicial del cohete. En los vuelos tripulados, τ_0 no puede ser mayor de 4, atendiendo al confort y a la seguridad de los astronautas. (Los astronautas sentirán durante el ascenso del cohete que su peso es igual a τ_0 veces su peso normal.) (*b*) Demostrar que la velocidad final del cohete lanzado desde la superficie de la Tierra, en función de τ_0 y de I_{es} (véase el problema 96) se escribe como

$$v_f = gI_{es}\left[\ln\left(\frac{m_0}{m_f}\right) - \frac{1}{\tau_0}\left(1 - \frac{m_f}{m_0}\right)\right]$$

donde m_f es la masa del cohete (no se incluye el combustible utilizado). (*c*) Usando una **hoja de cálculo** o una **calculadora gráfica**, representar gráficamente v_f en función del cociente de masas m_0/m_f si $I_{es} = 250$ s y $\tau_0 = 2$ para valores del cociente de masas desde 2 hasta 10. (Obsérvese que el cociente de masas no puede ser inferior a 1.) (*d*) Para colocar un satélite en órbita se necesita una velocidad final $v_f = 7$ km/s. Calcular el cociente de masas necesario para un cohete de una única fase, usando los valores del impulso específico y del empuje dados en el apartado (*b*). Por razones de ingeniería, es difícil construir un cohete con un cociente de masas mayor de 10. ¿Por qué se utilizan cohetes de varias fases para poner satélites en órbita alrededor de la Tierra? SSM

98 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** La altura que puede alcanzar un prototipo de cohete lanzado desde la Tierra se estima suponiendo que el tiempo durante el cual se quema el combustible es pequeño comparado con el tiempo total de vuelo, por lo que durante la mayor parte del vuelo el cohete se mueve en condiciones de caída libre. (Esta estimación en los cálculos del tiempo y del desplazamiento desprecia el tiempo durante el cual se quema combustible.) Para un prototipo de cohete con $I_{es} = 100$ s, $m_0/m_f = 1{,}2$ y $\tau_0 = 5$ (estos parámetros se definen en los problemas 96 y 97) estimar (*a*) la altura que puede alcanzar el cohete y (*b*) el tiempo total de vuelo. (*c*) Justificar la suposición según la cual el tiempo de vuelo es mucho mayor que el tiempo durante el cual se quema combustible comparando el tiempo de vuelo del apartado (*b*) con el tiempo que tarda en gastarse el combustible.

PROBLEMAS GENERALES

99 • Un vagón de tren de juguete que tiene una masa de 250 g y se mueve a razón de 0,50 m/s, se acopla a otro de masa 400 g que está inicialmente en reposo. ¿Cuál es la velocidad de ambos vagones después de acoplados? Determinar la energía cinética inicial y final del sistema formado por los dos coches. SSM

100 • **MÚLTIPLES PASOS** Un modelo de vagón de tren de 250 g viaja a 0,5 m/s y se engancha a otro de 400 g que está inicialmente en reposo. (*a*) Calcular la energía cinética total del sistema de los dos vagones. (*b*) Determinar la velocidad de cada vagón en el sistema de referencia del centro de masas y utilizar esas velocidades para calcular la energía cinética del sistema de los dos coches en el sistema de referencia del centro de masas. (*c*) Calcular la energía cinética asociada al movimiento del centro de masas. (*d*) Comparar la respuesta del apartado (*a*) con la suma de los resultados de los apartados (*b*) y (*c*).

101 •• Un coche de 1500 kg que viaja hacia el norte a 70 km/h choca en un cruce con otro coche de 2000 kg que viaja hacia el oeste a 55 km/h. Después del choque ambos coches permanecen unidos. (*a*) ¿Cuál es el momento lineal total del sistema antes del choque? (*b*) Calcular el módulo, dirección y sentido de la velocidad del conjunto de chatarra después del choque.

102 •• Una mujer de 60 kg se encuentra de pie en la parte trasera de una balsa de 6 m de longitud y 120 kg que flota en reposo en aguas tranquilas. La balsa se encuentra a 0,5 m de un embarcadero fijo, (figura 8.52). (*a*) La mujer camina hasta la proa de la balsa y se detiene. ¿A qué distancia se encuentra ahora la balsa del embarcadero? (*b*) Mientras la mujer camina, mantiene una velocidad constante de 3 m/s relativa a la balsa. Determinar la energía cinética total del sistema (mujer más balsa) y comparar este valor con la energía cinética en el caso de que la mujer caminara a 3 m/s sobre una balsa atada al embarcadero. (*c*) ¿De dónde procede esta energía y adónde va cuando la mujer se detiene en la proa de la balsa? (*d*) En tierra firme, la mujer puede lanzar una bola de plomo a 6 m. Situada en la parte trasera de la balsa, apunta hacia delante y lanza la bola de modo que justo cuando sale de su mano, posee la misma velocidad respecto a ella que cuando la bola fue lanzada en tierra firme. ¿Dónde caerá la bola?

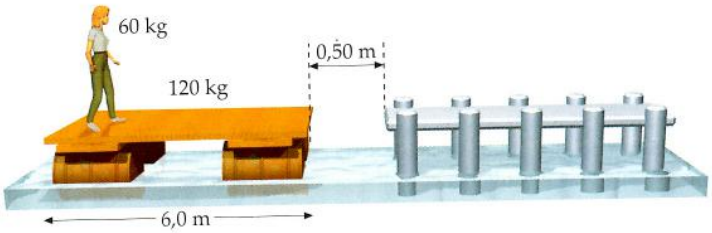


FIGURA 8.52 Problema 102

103 •• Una bola de acero de 1 kg y una cuerda de 2 m de masa despreciable forman un péndulo simple que puede oscilar sin rozamiento alrededor del punto O, como muestra la figura 8.53. Este péndulo se deja libre desde el reposo en una posición horizontal, y cuando la bola está en su punto más bajo choca contra un bloque de 1 kg que descansa sobre una plataforma. Suponiendo que el choque es perfectamente elástico y que el coeficiente de rozamiento entre el bloque y la plataforma es 0,1, determinar (*a*) la velocidad del bloque justo después del impulso, (*b*) la distancia recorrida por el bloque antes de detenerse.

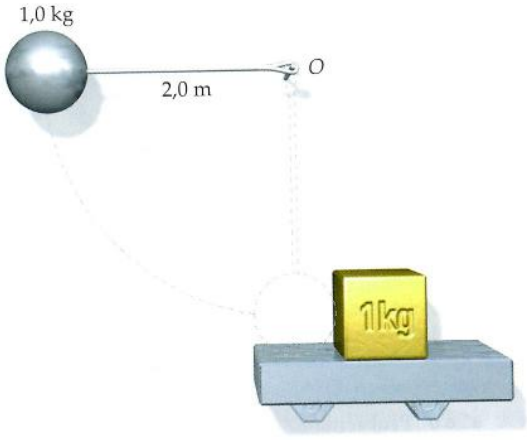


FIGURA 8.53 Problema 103

104 •• Durante la I Guerra Mundial, una de las armas de guerra más temibles eran los grandes cañones montados sobre vagones de ferrocarril. La figura 8.54 muestra este tipo de cañón, montado sobre un raíl sin rozamiento de modo que podía disparar una granada con un ángulo de 30°. Con el vagón inicialmente en reposo, el cañón dispara un proyectil de 200 kg a 125 m/s. (Todos los valores son relativos a la vía.) Consideremos un sistema formado por un cañón, una granada y un vagón que se mueve sobre una vía sin pérdidas por rozamiento. (*a*) El momento total del sistema vagón-cañón-proyectil, ¿será el mismo (es decir, "se conserva") antes y después de disparar la granada? Explicar la respuesta. (*b*) Si la masa de la plataforma más el cañón es 5000 kg, ¿cuál será la velocidad de retroceso del sistema a lo largo de la vía después del disparo? (*c*) La granada se eleva hasta una altura máxima de 180 m en su trayectoria. En dicho punto la velocidad es de 80 m/s. Con esta información, calcular la energía térmica (calor) producida por el rozamiento del aire sobre el proyectil desde su lanzamiento hasta que alcanza la altura máxima.

FIGURA 8.54 Problema 104

105 ••• **MÚLTIPLES PASOS** Un experimento popular, y un tanto peligroso, consiste en aguantar una pelota de béisbol unos pocos centímetros por encima de una pelota de baloncesto, que a su vez sostenemos aproximadamente un metro por encima del suelo. Ambas pelotas se sueltan a la vez y chocan después que la pelota de baloncesto haya rebotado en el suelo. La pelota de béisbol sale disparada contra el techo, mientras que la de baloncesto llega hasta media altura. (*a*) Suponiendo que la colisión de la pelota de baloncesto con el suelo es elástica, ¿cuál es la relación entre las velocidades de las dos pelotas justo antes de que choquen? (*b*) Suponiendo que la colisión entre las dos pelotas sea elástica, use el resultado del apartado (*a*) y la conservación del momento y de la energía para demostrar que si la pelota de baloncesto pesa 3 veces más que la de béisbol, la velocidad final de la pelota de baloncesto será cero. (Esta es aproximadamente la verdadera relación entre las masas, que hace que el experimento sea tan especial.) (*c*) Si el módulo de la velocidad de la pelota que está arriba es v antes de la colisión, ¿cuál es el módulo de la velocidad inmediatamente después del choque? SSM

106 •••′ (*a*) En el problema 105, si mantenemos una tercera pelota por encima de las otras dos y queremos que la pelota de baloncesto y la de béisbol se paren en medio de la habitación donde realizamos el experimento, ¿cuál debe ser el cociente de masas entre la bola de arriba y la bola de béisbol inmediatamente después de la colisión? (*b*) Si el módulo de la velocidad de la pelota que está arriba es v antes de la colisión, ¿cuál es el módulo de la velocidad inmediatamente después del choque?

107 ••• En el llamado "efecto de honda", la transferencia de energía en una colisión elástica se utiliza para incrementar la energía de una sonda espacial, de tal modo que ésta pueda escapar del sistema solar. Todas las velocidades se dan respecto a un sistema de referencia inercial en cuyo centro el Sol permanece en reposo. La figura 8.55 muestra una sonda espacial moviéndose a 10,4 km/s hacia Saturno, el cual se mueve a 9,6 km/s hacia la sonda. Debido a la atracción gravitatoria entre Saturno y la sonda, ésta se mueve alrededor de Saturno y escapa en dirección opuesta con velocidad v_f. (*a*) Suponiendo que esta colisión es elástica y unidimensional, siendo la masa de Saturno mucho mayor que la de la sonda, determinar v_f. (*b*) ¿En qué factor se incrementa la energía cinética de la sonda? ¿De dónde procede esta energía? SSM

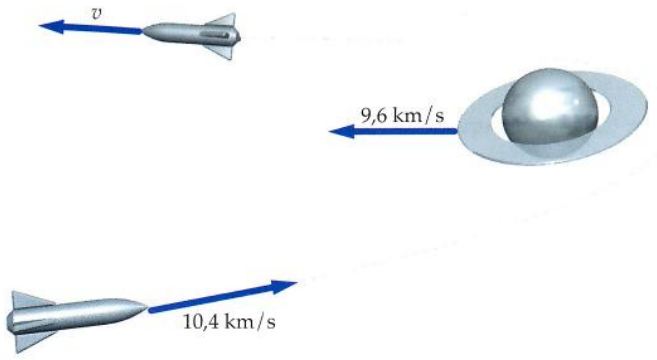


FIGURA 8.55 Problema 107

108 •• Un bloque de 13 kg se encuentra en reposo sobre un suelo horizontal. Se lanza sobre él un pegote de barro de 400 g de modo que su trayectoria sea horizontal, golpee el bloque, y se quede adherido a él. El bloque y el pegote se deslizan 15 cm por el suelo. Si el coeficiente de rozamiento es 0,4, ¿cuál es la velocidad original del pegote?

109 ••• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Un conductor descuidado choca por detrás contra un coche que está parado en una señal de tráfico. Justo antes del impacto, el conductor pisa el freno bloqueando las ruedas. El conductor del coche golpeado tiene también su pie apretando con fuerza el pedal del freno, bloqueando el sistema de frenado. La masa del coche golpeado es de 900 kg y la del vehículo culpable es de 1200 kg. En la colisión, los parachoques de los dos coches se enganchan entre sí. La policía determina, a partir de las marcas del deslizamiento sobre el suelo, que después del choque los dos vehículos se movieron juntos 0,76 m. Las pruebas revelan que el coeficiente de rozamiento deslizante entre los neumáticos y el pavimento es 0,92. El conductor del coche que provoca la colisión afirma que él se movía a una velocidad inferior a 15 km/h cuando se aproximaba al cruce. ¿Está diciendo la verdad? SSM

110 •• Un péndulo está formado por una lenteja de 0,4 kg atada a una cuerda de longitud 1,6 m. Un bloque de masa m descansa sobre una superficie horizontal sin rozamiento. El péndulo se suelta desde el reposo con un ángulo de 53° con la vertical y la lenteja choca elásticamente contra el bloque. Después de la colisión, el ángulo máximo del péndulo con la vertical es 5,73°. Determinar la masa m.

111 ••• Inicialmente, la masa $m = 1{,}0$ kg y la masa M están ambas en reposo sobre un plano inclinado sin rozamiento (figura 8.56). La masa M se apoya en un muelle de constante 11 000 N/m. La distancia en el plano entre m y M es de 4,0 m. La masa m se deja libre, choca elásticamente con la masa M y rebota a una distancia de 2,56 m sobre el plano inclinado. La masa M se detiene momentáneamente a 4,0 cm de su posición inicial. Determinar la masa M. SSM

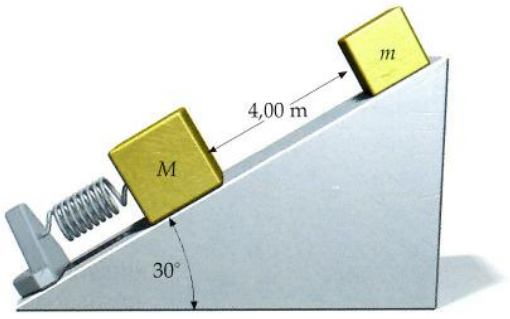


FIGURA 8.56 Problema 111

112 ••• Un neutrón de masa m choca elásticamente y frontalmente con un núcleo estacionario de masa M. (*a*) Demostrar que la energía del núcleo después de la colisión es $K_{\text{núcleo}} = [4mM/(m + M)^2]K_n$, siendo K_n igual a la energía cinética inicial del neutrón. (*b*) Demostrar que la fracción de energía perdida por el neutrón en este choque es

$$\frac{\Delta K_n}{K_n} = -\frac{4(m/M)}{(1 + [m/M])^2}$$